

LE

CONSTRUCTEUR

LIBRAIRIE F. SAVY

TRAITÉ PRATIQUE

SUR LES

CHAUDIÈRES A VAPEUR

PAR

L. DELVORDRE

In-8 de xv-365 pages et 39 planches

PRIX : 6 FRANCS

PARIS. — IMP. SIMON RAÇON ET COMP., RUE D'ERFURTH, 1

LE

CONSTRUCTEUR

Tables, Formules, Règles, Calculs, Tracés et Renseignements

POUR LA CONSTRUCTION

DES ORGANES DE MACHINES

AIDE-MÉMOIRE

A L'USAGE DES INGÉNIEURS, CONSTRUCTEURS, ARCHITECTES, MÉCANICIENS, ETC.

PAR F. REULEAUX

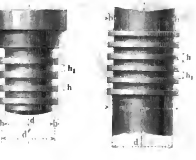
DIRECTEUR DE L'ACADÉMIE INDUSTRIELLE DE BERLIN

ÉDITION FRANÇAISE PUBLIÉE SUR LA TROISIÈME ÉDITION ALLEMANDE

PAR MM. A. DEBIZE ET E. MÉRIJOT

Anciens élèves de l'École polytechnique

AVEC 714 GRAVURES DANS LE TEXTE





PARIS

LIBRAIRIE F. SAVY

24, RUE HAUTEFEUILLE

1875





PRÉFACE.

Parmi les nombreux traités relatifs à la construction des machines, qui ont été publiés en Allemagne, *le Constructeur* de Reuleaux est un de ceux dont le succès a été le plus rapide. En quelques années seulement il est arrivé à sa troisième édition. Nous croyons rendre un véritable service aux constructeurs et aux ingénieurs français, en les mettant à même de consulter l'ouvrage du savant professeur, et de tirer parti d'un grand nombre de renseignements, qu'on chercherait vainement dans la plupart des recueils du même genre publiés en France. Tels sont, par exemple, pour n'en citer que quelques-uns, les calculs des ressorts de toute nature, des filets de vis, des cylindres de presses hydrauliques, des chaînes en fer, des câbles de transmission, etc.

L'ouvrage de Reuleaux présente, en outre, sur tous les traités analogues, une supériorité incontestable, due à l'emploi de la méthode si féconde des *rapports* pour la détermination des divers organes d'une machine.

L'ouvrage complet est divisé en quatre parties principales :

La première, qui comprend la résistance des matériaux, a l'avantage de donner, sous une forme très-simple, toutes les formules dont l'emploi peut présenter quelque utilité dans la pratique. L'usage de ces formules se trouve d'ailleurs singulièrement facilité par la disposition en tableaux, adoptée par l'auteur, et où les formules se trouvent accompagnées de figures et d'observations indiquant clairement les conditions dans lesquelles ces formules sont applicables.

La seconde partie est entièrement consacrée à l'exposé des principes de la graphostatique, avec de nombreux exemples d'application à la construction des bâtiments et des machines. Cette méthode si simple, qui n'a été réunie en corps de doctrine que depuis sept à huit ans seulement, par le professeur Culmann, de Zurich, est aujourd'hui passée dans l'enseignement des écoles industrielles en Suisse et en Allemagne. Les avantages incontestables qu'elle présente, dans la plupart des cas, sur toutes les autres méthodes, nous permettent d'espérer qu'elle ne sera pas moins bien accueillie en France.

La troisième partie comprend la détermination des organes de machines proprement dits, fondée, comme nous l'avons dit, sur la méthode des nombres proportionnels. Les dimensions des diverses parties de chaque organe se trouvent inscrites sur les figures intercalées dans le

texte; elles sont toutes exprimées en fonction d'un module spécial, qui a été déterminé, dans chaque cas, par les résultats de l'examen d'un grand nombre d'organes du même genre, reconnus d'une exécution satisfaisante.

Enfin la quatrième partie renferme une série de tables, reproduisant sous une forme commode divers éléments de calcul, dont le constructeur a constamment besoin, tels que tracés des courbes, surfaces, volumes des corps, puissances, racines, nombres réciproques, lignes trigonométriques, etc.

En dehors des tables et de formules, l'ouvrage renferme un très-grand nombre de figures et de tracés, rigoureusement à l'échelle, exécutés avec un luxe et une précision de détails qui ne se rencontrent dans aucun des traités du même genre publiés jusqu'à ce jour.

Ces dessins sont certainement de nature à rendre de réels services à tous ceux qui, à un titre ou à un autre, ont à traiter les nombreuses questions qui se rattachent à la construction de bâtiments ou de machines.

Février 1873.

LE CONSTRUCTEUR.

PREMIERE PARTIE.

RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX.

§ 1.

Observations préliminaires.

La Résistance des Matériaux a pour objet l'étude des forces moléculaires qui se développent dans les corps solides sous l'action des efforts extérieurs auxquels ils se trouvent soumis. Nous réunissons ici les termes les plus usuels de cette science, en précisant le sens que nous y attacherons dans cet ouvrage.

La *Charge par unité de surface* est le quotient obtenu en divisant la pression totale exercée sur une surface par le nombre d'unités contenues dans cette surface (1).

La *Charge limite* est celle qui correspond à la limite d'élasticité. Suivant qu'il s'agit d'efforts de tension ou de compression, cette charge est dite Charge limite de traction ou Charge limite de compression.

Le *Coefficient* ou *Module de rupture* est la tension qui détermine la rupture d'une fibre moléculaire.

Le *Coefficient* ou *Module d'Elasticité*, qui mesure le pouvoir d'élasticité d'un corps, est la tension sous laquelle un corps

(1) Cette définition suppose que la pression est uniformément répartie. Dans le cas contraire, la pression en un point est exprimée en fonction des coordonnées de ce point et la charge par unité de surface est la dérivée de cette fonction (N. d. T.).

prismatique, soumis à un effort dans le sens de sa longueur, s'allongerait d'une quantité égale à sa longueur primitive, en supposant que cet allongement soit possible.

La *Résistance théorique* est la force qui, dans un corps soumis à un effort quelconque (traction, pression, torsion, flexion), détermine, dans la fibre la plus chargée, une tension correspondant à la charge limite; en d'autres termes, c'est la charge sous laquelle un corps travaille à sa limite d'élasticité.

La *Résistance pratique*, qu'on désigne souvent, mais à tort, simplement sous le nom de *Résistance*, est celle qui correspond au cas où la tension précédente n'est poussée que jusqu'à une limite arbitraire, considérée comme admissible, et inférieure à la limite d'élasticité.

Le *Coefficient de Sécurité*, pour la traction ou la compression, est le rapport entre la résistance théorique et la charge réelle du corps, ou, ce qui revient au même, entre la tension correspondant à la limite d'élasticité et la tension maximum réellement développée.

La *Charge de rupture* est la force qui détermine, dans la fibre la plus chargée, une tension égale au module de rupture; cette force est précisément celle qu'il faut développer pour rompre, déchirer, cisailler, etc., un corps donné.

Le *Coefficient de Sécurité* contre la rupture est le rapport entre la charge de rupture et la charge réelle.

Dans la Construction des Machines, on admet comme règle pratique que, pour une pièce soumise à des efforts statiques, il convient de doubler le coefficient de sécurité correspondant à la matière employée et dont on trouvera plus loin la valeur. Toutefois, on peut, suivant les circonstances, s'écarter, soit en plus, soit en moins, de la règle précédente et prendre un nombre d'autant plus rapproché du coefficient de Sécurité qu'on aura calculé plus exactement chacune des forces statiques en jeu; or, cette détermination exacte des forces statiques est souvent facile, surtout si l'on fait usage des méthodes de calcul graphique. — On ne doit jamais, dans la pratique, charger une pièce de machine au-delà de sa résistance théorique. Cependant, il semble que pour certains matériaux, le fer forgé notamment, il n'y ait aucun inconvénient à les soumettre à des charges d'épreuve temporaires qui dépassent la limite d'élasticité, sans approcher trop de la charge qui détermine la rupture. (Voir § 2.)

Lorsqu'un corps est soumis à une charge qui dépasse sa résistance théorique, sans atteindre la charge de rupture, il s'y produit des déformations permanentes; dès qu'on atteint la charge de rupture, les fibres qui travaillent le plus se déchirent ou s'écrasent. — La charge de rupture ne se détermine, et par suite on ne fait guère usage du coefficient de rupture, que dans les cas où l'on se propose précisément comme but la rupture d'un corps (choc, outil tranchant, etc.). Pour les calculs de constructions permanentes, on a surtout besoin de connaître les charges correspondant à la limite d'élasticité.

§ 2.

Coefficients de résistance.

Les coefficients réunis dans la table suivante sont les moyennes de nombreuses expériences, effectuées par plusieurs observateurs sur des matériaux des provenances les plus diverses. Ces coefficients peuvent donc, dans un cas donné, différer de ceux que fournira l'expérience directe sur des matériaux particuliers, mais ces variations accidentelles ne sauraient jamais entrainer de conséquences fâcheuses, si l'on a soin de ne soumettre les matériaux qu'à des efforts restant suffisamment au dessous de la charge limite d'élasticité. — Le sens des lettres qui nous serviront à désigner les différents coefficients est inscrit en tête de chaque colonne. — Pour le bois, on a réuni dans un même chiffre les valeurs moyennes applicables au chêne, au hêtre, au sapin et au frêne, chacune de ces valeurs différant peu des autres.

Les matériaux, pour lesquels il existe de grandes différences entre la charge de rupture et la limite d'élasticité, ont une très grande ténacité. — Les essais effectués sur le fer prouvent qu'une charge, d'assez peu supérieure à la limite d'élasticité, déterminant par conséquent une déformation permanente, ne modifie pas le module d'élasticité, mais augmente la charge limite. Ainsi, une tige de fer forgé, allongée d'abord sous une charge de 20^k par millimètre carré, accusa, à l'état d'équilibre, dans une nouvelle expérience, une charge limite de tension de 20^k au lieu de 15 (cette propriété est utilisée dans l'étirage des fils de fer). Cette ténacité est une propriété précieuse pour des matériaux de construction; on peut la mesurer, au moins approximativement, par les rapports $K : T$ ou $K_1 : T_1$. — La

tige de fer chargée, comme nous venons de le voir, au-dessus de sa limite d'élasticité perd immédiatement de sa ténacité si, après cette extension, on la comprime au-delà de la limite d'élasticité de compression. Lorsqu'on la chauffe, et qu'on la lamine ensuite, elle reprend son module initial d'élasticité.

Tableau des Coefficients de résistance.

Mesures en Millimètres et Kilogrammes.

Matière	Module d'Elasticité E	Charge correspondant à la limite d'élasticité		Coefficient de rupture	
		de traction T	de compression T_1	à la traction T	à la compression T_1
Fer forgé	20000	15	15	40	22
Fil de fer	20000	30	—	70	—
Tôle laminée	17000	—	—	32	—
Fonte	10000	7,5	15	11	63
Acier	20000	25	—	80	—
Acier fondu	20000	30	—	80	—
Acier trempé et recuit	30000	65—150	—	100	—
Cuivre rouge battu	11000	2,5	—	30	70
Fil de cuivre	13000	12	—	40	—
Laiton	6500	4,8	—	12	110
Fil de laiton	10000	13	—	50	—
Bronze	3200	2 (?)	—	23	—
Plomb	500	1	—	1,3	5
Bois de construction	1100	2	1,8	9	5
Corde neuve en chanvre	250 (?)	5 (?)	—	12	—
Corde vieille en chanvre	50 (?)	1 (?)	—	5	—
Courroie en cuir	15—20	1,6	—	2,9	—
Basalte	—	—	—	—	9
Granit	—	—	—	—	8
Pierre à chaux	—	—	—	—	5
Quartz	—	—	—	—	12
Grès dur	—	—	—	—	7
Brique	—	—	—	—	0,6
Mortier	—	—	—	—	—
Mur en moellons	—	—	—	—	5
Mur en roche dure	—	—	—	—	1,5
Mur en briques	—	—	—	—	0,4

§ 3.

Résistances à la traction et à la compression.

Une tige travaille par traction, lorsque la force P qui agit sur elle tend à l'allonger dans le sens de la longueur. Si, au contraire, la force tend à la raccourcir, la tige travaille par compression, sous la réserve d'ailleurs que la longueur de cette tige ne soit pas trop considérable par rapport à sa section (Voir § 16.).

Si l'on désigne par

q la surface de la section de la tige considérée,

$\mathfrak{S}$ la tension déterminée dans cette tige par la force P,

on a, en négligeant le poids propre de la tige, la relation:

$$P = \mathfrak{S} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Exemple: L'arbalétrier d'une ferme, dans une toiture, exerce à sa base un effort de 10000 kgs, effort qui doit être neutralisé par une tige horizontale ronde formant tirant. Si l'on fixe comme tension admissible $\mathfrak{S} = 5$ *kgs, on devra poser, pour avoir le diamètre du tirant d,* $\mathfrak{S}q = 5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 10000$, *d'où* $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot 2000} = 50{,}42$, *soit 50mm.*

Les déformations principales, qui se produisent dans un corps travaillant par tension ou par compression, sont des allongements ou des raccourcissements. Un corps prismatique, soumis à un effort de traction P, s'allonge en vertu de cet effort, et la quantité λ, dont varie la longueur primitive l de la tige, est donnée par la relation:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

cette formule demeure applicable tant que $\mathfrak{S}$ est inférieur à la tension T correspondant à la limite d'élasticité. Elle s'applique également à la compression. Dans ce cas, la limite à laquelle la formule cesse d'être applicable est fournie par le module d'élasticité de compression T_1.

Exemple: la tige calculée plus haut avait, avant sa mise en place, une longueur de 35m; une fois chargée, elle s'allongera de $\lambda = \frac{35000 \times 5}{20000} = \frac{35}{4}$, *soit 9mm.*

Comme, dans les efforts de traction ou de compression, tous les éléments d'une section travaillent également, même quand

on dépasse la limite d'élasticité, la formule (1) peut encore, à la rigueur, être appliquée à ce dernier cas et donner, par suite, la force nécessaire pour rompre ou écraser un corps. Il suffit d'y introduire le module de rupture correspondant.

Exemple: pour rompre la tige déjà calculée plus haut, il faut exercer un effort de traction $P = K \times q$ *ou, d'après la table du paragraphe 2,* $P = 40 \times 50^2 \frac{\pi}{4} = 78540$. — *Pour écraser une petite longueur de cette tige, il faudrait développer une force* $P_1 = K_1 q = 22 \times 50^2 \frac{\pi}{4} = 43197$ *kgr.*

§ 4.

Solides d'égale résistance à la traction et à la compression.

On obtient des formes de solides d'égale résistance, en choisissant des sections successives telles que, dans toutes, la tension maximum $\mathfrak{S}$ conserve la même valeur, ce qui permet un emploi relativement avantageux de la matière. Il est rare que ces formes se déterminent avec une exactitude rigoureuse; habituellement on se contente d'une approximation; souvent même ce sont de simples types d'architecture, destinés à donner à certaines parties d'une construction l'apparence de pièces d'égale résistance, sans que cette propriété existe réellement. Toutefois, les formes exactes d'égale résistance ont un intérêt réel pour le constructeur. Une fois qu'il est bien familiarisé avec elles, il dessine sans peine les profils convenables pour les parties chargées d'un édifice, en faisant intervenir le sentiment artistique pour corriger le type, souvent peu agréable à l'œil, que fournit le calcul mathématique.

Les formes indiquées ci-après se rapportent aux pièces travaillant, soit par traction, soit par compression. Comme exemples de leur utilité technique, nous citerons les vis à bois, les boulons, les colonnes, etc. Les conditions spéciales aux colonnes se retrouvent d'ailleurs dans les cheminées en maçonnerie, dont le fût est légèrement incliné, les piles de ponts et de viaducs, etc.

Forme.	Equation.	Observations.
	$\frac{y}{d} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ $d = \sqrt{\frac{4P}{\pi \mathfrak{S}}}$	Charge P uniformément répartie sur toute la longueur do la pièce. Les sections de la pièce sont circulaires. Profil parabolique. — Forme approchée : tronc de cône ayant pour diamètre à l'extrémité $\frac{d}{2}$.
	$\frac{y}{d} = \frac{x}{l}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{P}{\mathfrak{S}}}$	Charge P répartie de façon à décroitre uniformément à partir du haut. Section circulaire. Forme du corps : cône droit.
	$q = \frac{P}{\mathfrak{S}} e^{\frac{\gamma}{\mathfrak{S}} x}$ $e = 2{,}718$ ... Base des logarithmes naturels. $log.\ q = log. \frac{P}{\mathfrak{S}}$ $+ 0{,}434 \frac{\gamma}{\mathfrak{S}} x.$	En dehors de P la pièce a à supporter son poids propre, qu'on suppose de γ par unité de volume. Les sections vont en croissant vers la section d'encastrement, suivant la même loi que les abscisses d'une logarithmique.

§ 5.

Résistance transversale de glissement ou de cisaillement.

Un corps est soumis, dans une de ses sections, à un effort transversal de glissement ou de cisaillement, lorsque la force extérieure P est dirigée dans le plan de cette section.

Si q est encore la surface de cette section et $\mathfrak{S}$ la tension développée, on a pour la charge, comme dans le cas d'une compression ou d'un allongement,

$$P = \mathfrak{S} q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

La limite d'élasticité est atteinte, lorsque $\mathfrak{S}$ est égal aux $^4/_5$es de la plus petite des deux charges limites de traction et de compression; ainsi, pour le fer forgé, où $T = T_1 = 15$, la limite a lieu pour $\mathfrak{S} = 12$; avec la fonte, où $T < T_1$ et est égal à 7,5, elle correspond à $\mathfrak{S} = 6$. La tension maximum ne se produit pas, en effet, ici dans le plan de la section, mais elle est oblique sur ce plan et a pour valeur les $^5/_4$es de $\mathfrak{S}$.

Dans le cas d'un effort de glissement, le déplacement relatif qu'éprouvent deux sections infiniment voisines est extrêmement faible, tant qu'on reste au-dessous de la limite d'élasticité, mais il devient sensible, lorsqu'un grand nombre de sections consécutives éprouvent chacune cet effet de glissement, dans le cas, par exemple, d'une tige travaillant par torsion.

Si l'on admet que l'équation (3) soit encore applicable dans les cas où on atteint l'effort capable de produire la séparation, dans les cas, par conséquent, où le corps est buriné, cisaillé ou percé, cette équation permettra de calculer la tension correspondant à la rupture par cisaillement. Cette valeur de $\mathfrak{S}$ est un peu différente du coefficient de rupture par traction K, ce qui s'explique par ce fait que, dans le cisaillement, K et K_1 sont en jeu simultanément(1). Pour le calcul des machines travaillant dans ces conditions, on prend, en général, pour valeur du Coefficient de rupture 1,1 K.

(1) Voir Reiche: Percement des plaques métalliques. Civ. Ing. 1864.

§ 6.

Résistance à la flexion.

Lignes élastiques.

Une pièce travaille par flexion, lorsqu'elle est soumise à des forces extérieures dirigées perpendiculairement à son axe. Tant qu'on ne dépasse pas la limite d'élasticité, il se produit, dans chaque section normale de la tige, un équilibre entre le moment des forces extérieures et celui des forces moléculaires développées dans la section, ces moments étant pris par rapport à l'axe neutre de la section. Cet axe passe par le centre de gravité de la section et est perpendiculaire au plan de flexion; il divise la section en deux parties: dans l'une, chacune des fibres, parallèles à l'axe de la tige, est soumise à un effort de traction, dont l'intensité est proportionnelle à la distance de la fibre à l'axe neutre; dans l'autre, au contraire, les fibres travaillent par compression et l'intensité de l'effort est encore proportionnelle à leur distance de l'axe neutre. Il suit de là que des fibres, situées de part et d'autre et à la même distance de l'axe neutre, subissent des déformations égales, mais de sens contraire. Comme on le voit, la résistance à la flexion se compose de deux résistances combinées, l'une à la traction, l'autre à la compression, ces deux résistances se trouvant compliquées d'ailleurs par une déformation de la ligne d'axe.

Si maintenant on nomme

M le moment statique de la résultante des forces qui agissent par flexion dans la surface, ce moment étant rapporté à l'axe neutre de la section,

J le moment d'inertie de la surface par rapport à son axe neutre,

a la distance de la fibre la plus éloignée de l'axe neutre, soit sur le côté qui travaille par compression, soit sur l'autre,

$\mathfrak{S}$ l'effort moléculaire développé dans cette fibre,

on a:

$$M = \mathfrak{S}\frac{J}{a} \qquad (4)$$

Le produit $\frac{\mathfrak{S} J}{a}$ s'appelle le moment fléchissant de la section considérée. Si la tige fléchie est prismatique et si l'on désigne par P la résultante des forces qui déterminent la flexion, par x son bras de levier pour une section quelconque, l'expression $M = Px$ peut avoir des valeurs différentes pour les diverses sections. Celle pour laquelle Px prend sa plus grande valeur porte le nom de section dangereuse, et la force P, qui détermine, dans cette section, la tension positive ou négative $\mathfrak{S}$, a pour expression:

$$P = \frac{\mathfrak{S} J}{x_m a}, \tag{5}$$

x_m représentant la valeur spéciale de x pour laquelle Px devient maximum.

Lorsque la ligne des centres de gravité des sections est située dans le même plan que la résultante des forces extérieures, cette ligne n'éprouve, par l'effet de la flexion, qu'un allongement nul, ou tout au moins négligeable; elle est simplement courbée et le rayon de courbure correspondant ϱ est donné par la formule

$$\varrho = \frac{JE}{M}. \tag{6}$$

La courbe correspondante s'appelle ligne élastique, et son équation rentre dans l'expression générale

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{JE} \tag{7}$$

Dans la table qui suit, on a réuni, pour une tige prismatique soumise à une force fléchissante, agissant dans diverses conditions, les valeurs ci-après:

1°, le moment M de la force pour le point x;

2°, la charge de flexion P, calculée suivant la formule (5);

3°, les coordonnées x et y de la ligne élastique;

4°, la valeur f de l'abscisse y au point d'application de la force, dans les exemples I à VI;

5°, enfin, la flèche maximum f, dans les exemples VII à XIII.

Dans tous les cas examinés, on a négligé le poids propre de la pièce, ce qui, dans nombre d'applications, notamment dans la construction des machines, est parfaitement permis; (il n'en serait plus de même pour les ponts ou les grandes constructions). Les exemples VII à X indiquent d'ailleurs comment on devrait

procéder pour tenir compte de ce poids. — Les N°s XI et XII montrent qu'une répartition inégale de la charge peut, dans certaines conditions, augmenter notablement la charge de flexion d'une poutre, qui, dans ces deux cas, se trouve être une fois et demie celle des N°s VII et VIII. En même temps, la répartition de charge admise pour XI et XII donne lieu à des flèches plus faibles que dans les cas des N°s VII et VIII. Ces considérations sont très-importantes pour l'établissement des projets de magasins. — Le mode de répartition du N° XIII est, par contre, désavantageux au point de vue de la charge de flexion, qui se trouve réduite aux $^3/_4$ de celle du N° VIII; en outre la flèche est plus grande.

Il convient de remarquer que la flèche f croit comme les cubes des longueurs et que, suivant la manière dont est supportée la pièce, cette flèche varie dans des limites très-étendues.

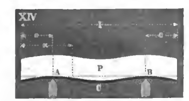
Mode d'application.	Moment fléchissant M.	Charge de Flexion P.
I	$M = Px$	$P = \frac{\mathfrak{S} J}{l a}$
II	$M = \frac{Px}{2}$	$P = 4 \frac{\mathfrak{S} J}{a l}$
III	Pour $AC: M = \frac{P c_1 x}{l}$ Pour $BC: M = \frac{P c x_1}{l}$	$P = \frac{l}{c c_1} \frac{\mathfrak{S} J}{a}$
IV	Pour $AC: M = \frac{5}{16} Px$ Pour BC: $M = Pl \left(\frac{5}{32} - \frac{11}{16} \frac{x_1}{l}\right)$	$P = \frac{16}{3} \frac{\mathfrak{S} J}{l a}$
V	$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\right)$	$P = 8 \frac{\mathfrak{S} J}{l a}$
VI	Pour $AB: M = Pc$	$P = \frac{\mathfrak{S} J}{c a}$

Equation de la ligne élastique.	Flèche f.	Observations.
$y = \frac{Pl^3}{2JE}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{3}$	Une des extrémités libre. Section dangereuse en B.
$y = \frac{Pl^3}{16JE}\left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{48}$	Pièce à deux appuis simples. Section dangereuse au milieu.
$y = \frac{P}{JE}\frac{c^2 c_1^2}{6l}\left[2\frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1}\right]$ $y_1 = \frac{P}{JE}\frac{c_1^2 c^2}{6l}\left[2\frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x^3}{c_1^2 c}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{3}\frac{c^2 c_1^2}{l^2 l^2}$ f_{max} pour $x = c\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{c_1}{c}}$	Section dangereuse en C. Réaction $X = P\frac{c_1}{l}$ „ $X_1 = P\frac{c}{l}$
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{32}\left[\frac{x}{l} - \frac{5}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$ $y_1 = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{32}\left[\frac{1}{4}\frac{x_1}{l} + \frac{5}{2}\frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3}\frac{x_1^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{7l^3}{768}$ $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}}\frac{Pl^3}{48JE}$ pour $x = l\sqrt{\frac{1}{5}}$	Pièce encastrée à une de ses extrémités et supportée librement à l'autre. Section dangereuse en B. Réaction $X = {}^5/_{16}\,P$.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{16}\left[\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3}\frac{x^3}{l^3}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{192}$	Pièce doublement encastrée. Sections dangereuses en B et C.
$y = f - \varrho + \sqrt{\varrho^2 - x^2 + l\left(x - \frac{l}{4}\right)}$ où $\varrho = \frac{JE}{Pc}$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{8}\frac{c}{l}$	Section dangereuse en l'un quelconque des points entre A et B.

Mode d'application.	Moment fléchissant M.	Charge de flexion P.
VII	$M = \frac{Px}{2}\frac{x}{l}$	$P = 2\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$
VIII	$M = \frac{Px}{2}\left(1 - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$
IX	$M = \frac{Px}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$
X	$M = \frac{Pl}{2}\left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 12\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$
XI	$M = \frac{Px}{3}\frac{x^2}{l^2}$	$P = 3\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$
XII	$M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 12\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$
XIII	$M = Px\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 6\,\frac{\mathfrak{S}J}{la}$

Equation de la ligne élastique.	Flèche f.	Observations.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{6}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{8}$	Une des extrémités libre. Section dangereuse en B.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[2\frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4} - \frac{x}{l}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{5l^3}{384}$	Pièce à deux appuis simples. Section dangereuse au milieu.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{48}\left[\frac{x}{l} - 3\frac{x^3}{l^3} + 2\frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{192}$	Section dangereuse en C. Flèche maximum pour $x = \frac{l}{16}(1+\sqrt{33})$ Réaction $X = {}^3/_8 P$. Point d'inflexion en $x = {}^3/_4 l$.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{24}\left[\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{384}$	Section dangereuse en B. Point d'inflexion pour $x = \frac{l}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[\frac{x}{l} - \frac{1}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{15}$	Une des extrémités libre. Section dangereuse en B.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[\frac{3}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{3l^3}{320}$	Section dangereuse au milieu.
$y = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{12}\left[\frac{5}{8}\frac{x}{l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2}{5}\frac{x^5}{l^5}\right]$	$f = \frac{P}{JE}\frac{l^3}{60}$	Section dangereuse au milieu.

XIV. Etant donnée une tige reposant sur deux appuis symétriquement placés et soumise à une charge P uniformément répartie, on a, pour le moment fléchissant,



$$M = \frac{Px}{2}\left(\frac{x}{l} - 1 + \frac{c}{x}\right).$$

La charge de flexion de la pièce varie avec la position des appuis, par suite, avec le rapport de c à l; elle devient maximum lorsque

$$c = l\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) = 0{,}207\ l.$$

La charge de flexion est alors approximativement:

$$P = 47\frac{\mathfrak{S} J}{al},$$

c'est-à-dire 6 fois plus grande que dans le cas N° VIII; ce mode d'appuis est donc très-favorable. Les sections dangereuses correspondent aux points A, B et C.

§ 7.

Tables de sections.

La valeur du terme $\frac{J}{a}$, dans l'équation (4), dépend uniquement des dimensions de la section de la pièce; nous la désignerons sous le nom de module de section. Les tableaux ci-après contiennent, pour une série de formes de section, les valeurs

1°, du moment d'inertie J par rapport à l'axe neutre, lequel est figuré en pointillé sur les dessins;

2°, de l'écartement maximum a des fibres sur le côté comprimé et sur le côté allongé, ou des écartements a' et a'' pour chacun des côtés, quand a' et a'' sont différents, c'est-à-dire quand la section n'est pas symétrique par rapport à deux axes;

3°, du module de section $Z = \frac{J}{a}$, pour lequel on a encore deux valeurs quand a' et a'' sont différents;

4°, de la surface F de la section, surface qui est nécessaire pour calculer le poids des pièces.

Lorsque la colonne qui donne a porte „à déterminer par expérience ou par un tracé,“ c'est que les expressions analytiques sont trop complexes pour être admissibles dans la pratique. Dans ce cas, on découpe un modèle en carton de la section considérée et on détermine le centre de gravité par expérience ou par les méthodes de calcul graphique (voir § 46).

L'usage de la table des sections se comprendra d'ailleurs sans peine par l'exemple suivant:

Exemple: On cherche le moment d'inertie d'une section circulaire de 104mm de diamètre. D'après le N° XX de la table, ce moment d'inertie a pour valeur $J = \frac{\pi}{64} \cdot 104^4$, *soit 5742500.*

En divisant convenablement le profil d'une section complexe, on la transformera en d'autres plus simples, auxquelles s'appliqueront directement les formules. Ainsi, à l'aide de la section VIII, on trouvera la formule d'un tuyau à section rectangulaire; avec la section XI, celle d'une pièce en E, et ainsi de suite. — Il n'est pas d'ailleurs inutile de signaler ici quelques conclusions générales que fournit notre table. Elle met d'abord en évidence l'influence considérable de la hauteur des sections et des parties situées à une grande distance de l'axe neutre. Ce fait justifie l'avantage des nervures de renforcement, qu'on emploie si fréquemment, surtout dans les pièces en fonte. Dans les pièces exposées à la flexion, ces nervures agissent, non-seulement par leur propre matière, mais encore en assurant une répartition plus avantageuse des efforts pour les autres couches. Un exemple fera ressortir plus nettement cette propriété précieuse:

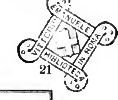
Supposons que l'on donne une section de la forme N° XV, avec les relations $b = 8\,b_1$, $h = 12\,b_1$, $h_1 = 11\,b_1$ (voir fig. 1, § 9). Imaginons maintenant cette section divisée en deux parties, l'une verticale, l'autre horizontale, et supposons qu'on considère isolément chacune de ces parties. Elles auront alors pour modules de section $\frac{11^2 b_1^{\,3}}{6} = 20^1/_6\, b_1^{\,3}$ et $\frac{8\, b_1^{\,3}}{6}$, soit au total $21{,}5\, b_1^{\,3}$. Mais la même section, considérée comme formant un seul tout (§ 9), a pour module $Z = 34{,}8\, b_1^{\,3}$; autrement dit, sa résistance se trouve, dans ce cas, augmentée de moitié, et la nervure verticale a décuplé, ou à peu près, la résistance qu'aurait présentée la partie horizontale, si on l'avait considérée isolément. D'autres types de profils fournissent souvent des résultats encore plus nets.

N°.	Section.	Moment d'inertie J.
I.		$\frac{bh^3}{12}$
II.		$\frac{b(h^3 - h_1^3)}{12}$
III.		$\frac{b^4}{12}$
IV.		$\frac{b^4}{12}$
V.		$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4 = 0{,}5413\, b^4$
VI.		$\frac{5\sqrt{3}}{16} b^4$
VII.		$\frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} b^4 = 0{,}638\, b^4$

Distance a.	Module de section Z.	Surface F.
$\frac{h}{2}$	$\frac{bh^2}{6}$	bh
$\frac{h}{2}$	$\frac{b(h^2-h_1^2)}{6h}$	$b(h-h_1)$
$\frac{b}{2}$	$\frac{b^3}{6}$	b^2
$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}b^3 = 0{,}118b^3$	b^2
$b\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866\,b$	$^5/_8\,b^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 = 2{,}598\,b^2$
b	$\frac{5\sqrt{3}}{16}b^3$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}b^2$
$0{,}924\,b$	$0{,}677\,b^3$	$0{,}828\,b^2$

N°.	Section.	Moment d'inertie J.
VIII.		$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{12}$
IX.		$\frac{b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3)}{12}$
X.		$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$
XI.		$\frac{b h^3 - (b - b_2) h_1^3 + b_1 h_2^3}{12}$
XII.		$\frac{b h^3 + (h_1 - b) h_1^3 + (h - h_1) b^3}{12}$
XIII.		$\frac{b h^3}{36}$
XIV.		$\frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{36 (b + b_1)} h^3$





Distance a.	Module de section Z.	Surface F.
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{6h}$	$b h - (b - b_1) h_1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3)}{6h}$	$b (h - h_1) + b_1 (h_1 - h_2)$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6h}$	$bh + b_1 h_1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 - (b - b_2) h_1^3 + b_1 h_2^3}{6h}$	$b h - (b - b_2) h_1 + b_1 h_2$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 + (h_1 - b) h_1^3 + (h - h_1) b^3}{6h}$	$b h + (h_1 - b) h_1 + (h - h_1) b$
$a' = \frac{h}{3}$ $a'' = \frac{2}{3} h$	$Z' = \frac{b h^2}{12}$ $Z'' = \frac{b h^2}{18}$	$\frac{bh}{2}$
$a' = \frac{b + 2 b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$ $a'' = \frac{2 b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$Z' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (b + 2 b_1)} h^2$ $Z'' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (2 b + b_1)} h^2$	$\frac{b + b_1}{2} h$

N°.	Section.	Moment d'inertie J.
XV.		$\frac{1}{3}\left[b\,(a'^3 - f^3) + b_1\,(f^3 + a''^3)\right]$
XVI.		$\frac{1}{3}\left[b\,(a'^3 - f^3) + b_1\,(f^3 + g^3) + b_2\,(a''^3 - g^3)\right]$
XVII.		$\frac{1}{3}\left[b\,(a'^3 - f^3) + b_1\,(f_3 + g^3 - i^3 - k^3) + b_2\,(a''^3 - g^3)\right]$
XVIII.		$\frac{1}{3}\left[\frac{b_1 - b_2}{4\,(f + a'')}\,(a''^4 - f^4) + b\,(a'^3 - f^3) + b_2\,(f^3 + a''^3)\right]$
XIX.		$\frac{1}{3}\left[\frac{b_1 - b_2}{4\,(f + g)}\,(g^4 - f^4) + b\,(a'^3 - f^3) + b_2\,(f^3 + g^3)\right.$ $\left. + b_3\,(a''^3 - g^3)\right]$
XX.		$\frac{\pi}{64}\,d^4 = 0{,}0491\,d^4$
XXI.		$\frac{\pi}{64}\,(d^4 - d_1^4) = 0{,}0491\,(d^4 - d_1^4)$

Distance a.	Module de section Z.	Surface F.
$a' = \frac{b h_2^2 + b_1 h_1 (h + h_2)}{2[b h - (b - b_1) h_1]}$ $a'' = h - a'$	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b_1 h_1 + b h_2$
A déterminer par expérience ou graphiquement.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a - f) + b_1 (f + g)$ $+ b_2 (a'' - g)$
A déterminer par expérience ou graphiquement.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a' - f) +$ $b_1 (f + g - i - k) + b_2 (a'' - g)$
A déterminer par expérience ou graphiquement.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a' - f) + \frac{b_1 + b_2}{2} (f + a'')$
A déterminer par expérience ou graphiquement.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a' - f) + \frac{b_1 + b_2}{2} (f + g)$ $+ b_2 (a'' - g)$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} d^3$	$\frac{\pi}{4} d^2$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$	$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2)$

N°.	Section.	Module d'inertie J.
XXII.		$\frac{\pi}{64} b h^3$
XXIII.		$0{,}110 r^4$
XXIV.		(Segment parabolique) $\frac{8}{175} b h^3 = 0{,}0457 b h^3$
XXV.		$\frac{1}{12}\left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h - d)\right]$
XXVI.		$\frac{1}{3}\left[b(a'^3 - f^3) + b_1(f^3 - g^3 + k^3 - l^3) + b_2(a''^3 - k^3)\right] + \frac{\pi}{64}(d^4 + 16 d^2 i^2)$
XXVII.		$\frac{1}{3}\left[b(a'^3 - f^3) + b_1(f^3 - g^3) + b_2(g^3 - i^3 + l^3 - m^3) + b_3(k^3 - l^3) + b_4(a''^3 - k^3)\right] + \frac{\pi}{64}\left[(a' - f)^4 + 8(a' + f)(a' - f)^2\right]$

Distance a.	Module de section Z.	Surface F.
$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{32} b h^2$	$\frac{b h \pi}{4}$
$a' = 0,5765\, r$ $a'' = 0,4244\, r$	$Z' = 0,19\, r^3$ $Z'' = 0,26\, r^3$	$\frac{r^2 \pi}{2}$
$a' = {}^2/_5\, h$ $a'' = {}^3/_5\, h$	$Z' = \frac{4}{35} b h^2 = 0,114\, b h^2$ $Z'' = \frac{8}{105} b h^2 = 0,076\, b h^2$	${}^2/_3\, b h$
$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h}\left(0,589 d^4 + b(h^3 - d^3) + b^3(h-d)\right)$	$\frac{\pi}{4} d^2 + 2 b (h-d)$
A déterminer par expérience ou graphiquement.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a'-f) + b_1(f-g+k-l)$ $+ b_2(a''-k) + \frac{\pi}{4} d^2$
A déterminer par expérience ou graphiquement.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a-f) + b_1(f-g)$ $+ b_2(g-i+l-m)$ $+ b_3(k-l) + b_4(a-k)$ $+ \frac{\pi}{4}(a'-f)^2$

§ 8.

Valeur de la tension $\mathfrak{S}$.

Dans une pièce soumise à la flexion, la limite d'élasticité, soit à la traction, soit à la compression, est atteinte lorsque la tension développée $\mathfrak{S}$ devient égale à T ou à T_1. Il importe donc que cette limite ne soit dépassée sur aucun des deux côtés de la section. Pour les sections qui présentent deux axes de symétrie, cette condition se trouve remplie, en prenant, pour $\mathfrak{S}$, la plus petite des deux valeurs T ou T_1, réduite dans un certain rapport pour avoir une sécurité convenable; ainsi, pour la fonte, on partira de la charge correspondant à la traction.

Au contraire, lorsque $a' \gtrless a''$, on commencera par chercher quel est le côté de la section qui travaille par traction, quel est celui qui travaille par pression. Si alors

- a est l'écartement maximum des fibres sur le côté soumis à la traction, a_1 sur la partie soumise à la compression,
- T et T_1 les charges limites correspondant à la traction et à la compression,
- M le moment fléchissant,
- m le coefficient de sécurité qui, suivant les cas, sera pris égal à 2, 3 ou 4,

on aura:

pour $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m}\frac{J}{a}$
pour $\frac{a}{a_1} < \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T_1}{m}\frac{J}{a_1}$
pour $\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m}\frac{J}{a}$ ou $\frac{T_1}{m}\frac{J}{a_1}$

Exemple: pour la fonte, on a $\frac{T}{T_1} = {}^1/_2$; *d'autre part, dans la section parabolique du N° XXIV, l'effort de traction s'exerce du côté de la base. Cette section donne* $a = {}^2/_5\,h$, $a_1 = {}^3/_5\,h$, $\frac{a}{a_1} = {}^2/_3$; *on a donc* $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$; *par suite, on devra prendre pour* $\mathfrak{S}$ *la valeur* $\frac{T}{m}$ *ou* $\frac{7,5}{m}$, *d'où* $M = \frac{7,5}{m}\frac{4}{35}bh^2$. — *Pour le fer forgé où* $T = T_1$, *une pareille recherche n'est pas nécessaire. La fonte est d'ailleurs à peu près le seul corps pour lequel, dans l'état actuel de nos connaissances, on doive attribuer à* T *et à* T_1 *des valeurs différentes.*

§ 9.

Sections d'égale résistance.

Dans les pièces destinées à travailler par flexion, comme les poutres, il convient, pour assurer la meilleure utilisation de la matière, de la répartir aussi loin que possible de l'axe neutre, tout en conservant entre les diverses parties de la section des liaisons suffisantes. Il est avantageux, en outre, de choisir des formes de section telles que, pour une charge suffisante, les parties comprimées et les parties allongées arrivent à travailler en même temps à leur limite d'élasticité. On doit, pour cela, prendre

$$\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1} \tag{7}$$

Les sections, dans lesquelles ce rapport est observé, prennent le nom de sections d'égale résistance (1). Pour le fer forgé, les sections à deux axes de symétrie sont donc les plus avantageuses, puisque $T = T_1$. Pour la fonte, et dans l'hypothèse où la force fléchissante conserve une direction constante, les sections les plus favorables sont celles où $a_1 = 2a$, attendu qu'alors $T_1 = 2T$. C'est en observant ce rapport qu'on a tracé les sections suivantes, dans lesquelles b et b_1 peuvent avoir, entre eux, un rapport arbitraire (Fig. 1, 2, 3).

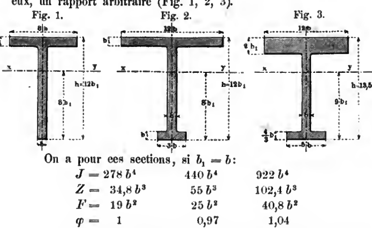


Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3.

On a pour ces sections, si $b_1 = b$:

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3
$J =$	$278\,b^4$	$440\,b^4$	$922\,b^4$
$Z =$	$34{,}8\,b^3$	$55\,b^3$	$102{,}4\,b^3$
$F =$	$19\,b^2$	$25\,b^2$	$40{,}8\,b^2$
$\varphi =$	1	0,97	1,04

(1) Voir à ce sujet Klose: Théorie des poutres en fer à double cornière, Hanovre 1862. C'est à cet ouvrage qu'est empruntée la seconde des sections représentées ici.

Le côté qui travaille par traction est celui qui est le plus rapproché de l'axe neutre; comme module de section, on a pris la valeur $\frac{J}{a_1}$, de telle sorte que l'on doit prendre pour $\mathfrak{S}$ le rapport $\frac{T_1}{m}$. F désigne encore la surface de la section, φ l'emploi proportionnel de matière, en prenant pour unité celui qui correspond à la fig. 1.

La valeur de φ est donnée d'une manière générale par l'expression

$$\varphi = \frac{\beta_1}{\beta}\left(\frac{\alpha}{\alpha_1}\right)^{2/3}\left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}\right)^{2/3} \qquad (8)$$

Dans cette formule, les lettres affectées d'un indice se rapportent à la section à étudier, les lettres sans indice à la section connue, prise comme unité de dépense de matière; on doit poser, en outre, $F = \beta b^2$, $Z = \alpha b^3$ et $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$. $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}_1$ n'ont de valeurs différentes que si le rapport $\frac{a}{a_1}$ n'est pas le même dans les deux sections. La relation (8) prouve d'ailleurs que de petites variations dans ce rapport n'ont qu'une influence très-faible.

Si la force fléchissante agit alternativement dans des directions opposées, les sections à deux axes de symétrie sont, même pour la fonte, les plus avantageuses et l'on doit prendre, comme limite de $\mathfrak{S}$, la plus petite des charges limites d'élasticité. Si la direction de la force change d'une manière continue, de telle sorte que l'axe neutre tourne autour du centre de gravité (axes et arbres de transmission), la section annulaire est la plus avantageuse, mais on peut aussi adopter les sections en croix ou étoilées, comme celles des N°s IX, XI et XXIV du § 7, attendu que, pendant la rotation, on ramène constamment dans le plan de flexion des éléments de section très-éloignés de l'axe.

Exemple: on veut construire un bras en fonte, encastré comme au N° I, § 6, pour une charge $P = 2500^k$, avec une longueur $l = 2^m$. Nous choisirons la section indiquée fig. 2 et nous aurons à faire, dans l'équation (4), $M = \mathfrak{S} Z$. Or $M = 2500 \times 2000$, $Z = 55 b^3$. En admettant 2 pour le coefficient de sécurité, nous aurons $\mathfrak{S} = 0{,}5 \times 15 = 7{,}5$. Ces valeurs, introduites dans l'équation, donnent $2500 \times 2000 = 7{,}5 \times 55\, b^3$, d'où $b = 100 \sqrt[3]{\frac{5}{55 \times 7{,}5}}$, soit $b = 23^{mm}$. La surface de la section est alors $25 \times 23^2 = 13225^{mm\,c}$. Les autres dimensions se déterminent d'après les nombres proportionnels inscrits sur la fig. 2.

§ 10.

Solides d'égale résistance à la flexion.

On obtient un solide d'égale résistance à la flexion, en choisissant les sections successives, de telle sorte que la tension maximum, soit sur le côté comprimé, soit sur le côté allongé, ait partout la même valeur. En vertu de la formule (4), l'équation qui exprimera la forme du corps sera:

$$\frac{Ma}{J} = Const. \qquad (9)$$

Les solides d'égale résistance à la flexion, et surtout les formes qui s'en rapprochent, trouvent, dans la construction des machines, de nombreuses applications. Les considérations du § 4 s'appliquent d'ailleurs d'une manière complète au cas actuel. Nous reproduisons ci-dessous une série de ces profils.

La flexion qu'éprouve un solide d'égale résistance, sous l'action d'une charge extérieure, est nécessairement plus grande qu'elle ne l'est pour des solides prismatiques, avec le même mode d'application de la force. Ainsi, en comparant les valeurs des flèches qui se trouvent inscrites dans le tableau ci-après, on voit que la flèche est, dans le N° I deux fois, dans le N° V une fois et demie ce qu'elle serait pour une tige prismatique, chargée dans les mêmes conditions. En général, lorsque l'axe d'un solide, avant d'être chargé, forme une ligne droite, la ligne élastique a pour équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_0\ a_0}{J_0 E\, a_x}. \qquad (10)$$

Dans cette formule

M_0 est le moment de la force fléchissante pour une section quelconque, par exemple au point d'encastrement;

J_0 le moment d'inertie de la section;

a_0 l'écartement de la fibre la plus éloignée;

a_x l'écartement maximum de fibre (compté du même côté que a_0) pour la section située en x.

Le rayon de courbure ϱ de la ligne élastique, au point xy, est alors:

$$\varrho = \frac{EJ_0}{M_0\, a_0}\, a_x \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (11)$$

Cette valeur est constante et, par suite, la courbe représente un cercle, lorsque $a_x = a_0$, c'est-à-dire lorsque la pièce présente, en tous ses points, la même hauteur, comme il arrive pour les types I, V, X, XIV etc.

N°.	Forme.	Mode d'application de la force.	Equation.
I.		La charge P agit à l'extrémité libre, cas N° I, § 6.	Pour la section rectangulaire: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x}{l}$, Cas I et II, $z = b$, $\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}$. Prisme arrondi paraboliquement.
II.			
III.			Approximation de la forme I. Prisme à arête abattue.
IV.			Approximation de la forme II. Prisme à arête abattue.
V.			$y = h;\ \frac{z}{b} = \frac{x}{l}$. Prisme droit.
VI.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h};\ \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$. Pyramide à sommet arrondi par une parabole cubique.
VII.			Approximation de la forme VI. Pyramide à sommet abattu.
VIII.			Tronc de cône droit, forme approchée de la forme rigoureuse donnée par $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$.

Charge de flexion.	Volume du corps.	Observations.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{2}{3} b h l$	Flèche à l'extrémité libre : $f = \frac{2}{3} \frac{P l^3}{J_0 E}$; $J_0 = \frac{b h^3}{12}$.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{2}{3} b h l$	La ligne élastique est, à l'état normal, une parabole.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{3}{4} b h l$	Section dangereuse au point d'encastrement.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{3}{4} b h l$	A l'état normal, la ligne élastique est bissectrice de l'angle au sommet du prisme.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{1}{2} b h l$	La ligne élastique est un arc de cercle. $f = \frac{1}{2} \frac{P l^3}{J_0 E}$; $J_0 = \frac{b h^3}{12}$.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{3}{5} b h l$	L'équation $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ s'applique si toutes les sections sont semblables.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{6 l}$	$\frac{19}{27} b h l$	Section dangereuse au point d'encastrement.
$P = \frac{\mathfrak{S} \pi}{32} \frac{d^3}{l}$	$\frac{19}{108} \pi l d^2$	Pour une même charge de flexion qu'aux cas Nos I à VII on a $\frac{d}{h} = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi} \frac{b}{h}}$.

N°.	Forme.	Mode d'application de la force.	Equation.
IX.		Charge *P* uniformément répartie. Cas VII, § 6.	Pour les sections rectangulaires, d'une manière générale, $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x^2}{l^2}$; $z = b;\ \frac{y}{h} = \frac{x}{l}$. Coin.
X.			$y = h;\ \frac{x}{l} = \sqrt{\frac{z}{b}}$. Coin à angle vif formé par des paraboles.
XI.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h};\ \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$. Pyramide arrondie suivant des paraboles semi-cubiques.
XII.			Approximation de la forme XI. Pyramide à sommet abattu.
XIII.		Charge *P* uniformément décroissante. Cas XI, § 6.	Pour les sections rectangulaires, d'une manière générale, $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x^3}{l^3}$; $z = b;\ \frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{y^2}{h^2}}$. Coin à angle vif suivant une parabole semi-cubique.
XIV.			$y = h;\ \frac{x}{l} = \sqrt[3]{\frac{z}{b}}$. Coin à angle vif formé par des paraboles cubiques.
XV.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h};\ \frac{y}{h} = \frac{x}{l}$. Pyramide.

Charge de flexion.	Volume du corps.	Observations.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	$\frac{1}{2} b h l$	Type admissible en abattant l'angle vif.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	$\frac{1}{3} b h l$	La ligne élastique est un arc de cercle. $f = \frac{1}{4} \frac{P l^3}{J_0 E}$; $J_0 = \frac{b h^3}{12}$.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	$\frac{3}{7} b h l$	Type avantageux pour les consoles en pierre.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	$\frac{13}{27} b h l$	Section dangereuse au point d'encastrement.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{2 l}$	$\frac{2}{5} b h l$	Type architectural satisfaisant.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{2 l}$	$\frac{1}{4} b h l$	La ligne élastique est un arc de cercle. $f = \frac{1}{6} \frac{P l^3}{J_0 E}$; $J_0 = \frac{b h^3}{12}$.
$P = \frac{\mathfrak{S} b h^2}{2 l}$	$\frac{1}{3} b h l$	Forme extrêmement simple.

N°	Forme.	Mode d'application de la force.	Equation.
XVI.		La charge P est uniformément répartie. Cas N° VIII, § 6.	Pour les sections rectangulaires, en général, $\frac{z\,y^2}{b\,h^2} = \frac{l^2 - 4\,x^2}{l^2}$; $z = b$; $\frac{y}{h} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{l^2}{4} - x^2}$. Demi-cylindre elliptique.
XVII.			Approximation de la forme XVI. Surface supérieure cylindrique.
XVIII.			$y = h$; $\frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \sqrt{\frac{b-z}{b}}$. Prisme droit à bases paraboliques.
XIX.		La charge P va en décroissant uniformément jusqu'au milieu. Cas N° XII, § 6.	Pour les sections rectangulaires, en général, $\frac{z\,y^2}{b\,h^2} = \frac{l^3 - 8x^3}{l^3}$; $z = b$; $\frac{y^2}{h^2} = 1 - 8\,\frac{x^3}{l^3}$.
XX.			Approximation de la forme XIX. Surface supérieure cylindrique.
XXI.			$y = h$; $\frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \sqrt{\frac{b-z}{b}}$. Prisme à bases limitées par des paraboles cubiques.
XXII.			Approximation de la forme XXI. Les deux surfaces courbes sont cylindriques.

Charge de flexion.	Volume du corps.	Observations.
$P = \frac{4 \mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	$\frac{\pi}{4} b h l$	Les formes XVI à XVIII s'appliquent encore au cas où le point d'application de P est mobile sur la longueur l; mais la charge de flexion est alors plus faible et se réduit à $P = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{S} b h^2}{l}$.
$P = \frac{4 \mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	Approximativement $\frac{5}{6} b h l$	
$P = \frac{4 \mathfrak{S} b h^2}{3 l}$	$\frac{2}{3} b h l$	La ligne élastique est un arc de cercle. $f = \frac{1}{64} \frac{P l^3}{J_0 E}$; $J_0 = \frac{b h^3}{12}$.
$P = \frac{2 \mathfrak{S} b h^2}{l}$	Approximativement $\frac{5}{6} b h l$	La courbe est composée de deux parties se raccordant au point milieu.
Approximativement comme pour le N° XIX.	Approximativement $\frac{11}{12} b h l$	Deux sections dangereuses de part et d'autre de la section moyenne.
$P = \frac{2 \mathfrak{S} b h^2}{l}$	$\frac{3}{4} b h l$	La ligne élastique est un arc de cercle. $f = \frac{1}{96} \frac{P l^3}{J_0 E}$; $J_0 = \frac{b h^3}{12}$.
Approximativement comme pour le N° XXI.	Approximativement $\frac{7}{9} b h l$	Deux sections dangereuses de part et d'autre de la section moyenne.

Les types que nous venons de reproduire sont les plus simples de ceux qui peuvent se présenter; il serait facile d'en augmenter le nombre à l'infini, en se donnant, par exemple, une loi de variation plus complexe des dimensions en hauteur ou en largeur. Ainsi, dans le type N° I, par exemple, si on suppose que la base soit parabolique, c'est-à-dire si $\frac{z}{b} = \sqrt{\frac{x}{l}}$, on a $\frac{y}{h} = \sqrt[4]{\frac{x}{l}}$ (parabole cubique), etc. On trouvera des exemples de formes, correspondant à des sections plus complexes, dans l'étude des arbres de transmission (chap. V). Les ressorts, dont il sera question plus loin, répondent également à des formes toutes spéciales, dues à ce que l'axe neutre, dans sa position primitive, n'est pas une ligne droite.

§ 11.

Résistance au glissement dans la couche neutre.

Dans une pièce travaillant par flexion, l'une des parties de la section n'éprouve que des efforts de traction, tandis que l'autre n'est soumise qu'à des efforts de compression. La couche neutre qui les sépare est donc forcément soumise à un effort de glissement et, dès-lors, il convient de ne pas descendre pour la largeur à lui donner au-dessous d'une certaine limite.(1) Cette limite est, à la vérité, très-éloignée, mais il importe néanmoins de la connaître. Si l'on désigne par z_0 la largeur minimum admissible et par R la résultante des forces extérieures, agissant sur l'un ou l'autre des côtés d'une section, on doit avoir, pour que l'effort de glissement sur la couche neutre ne dépasse pas la limite $\mathfrak{S}_0$,

$$z_0 \geq \frac{R}{\mathfrak{S}_0} \frac{U}{2J}. \tag{14}$$

Dans cette formule $\mathfrak{S}_0$ ne doit pas dépasser les $^4/_5$ es de la plus petite des deux charges limites d'élasticité, correspondant à la matière (voir § 5). D'autre part, J représente, comme toujours, le moment d'inertie de la section, c'est-à-dire la somme des produits des éléments de surface par les carrés de leurs distances à la couche neutre. U est le moment statique de la section,

(1) Voir Zeitschr. des Ver. deutsch. Ing. 1859, p. 193 et Grashof, Résistance des matériaux, p. 147.

c'est-à-dire la somme des produits de tous les éléments de la surface par les mêmes distances.

Pour la section rectangulaire N° I, p. 18, on a

$$U = \frac{bh^2}{4};$$

pour la section à double *T*, N° VIII, p. 20,

$$U = \frac{bh^2 - (b - b_1)h_1^2}{4}.$$

R doit être déterminé dans chaque cas particulier. Ainsi, pour le mode d'application N° II, p. 12, *R* est constant pour toutes les sections entre *B* et *C* et égal à la réaction des appuis $\frac{P}{2}$.

L'équation (14) ne sert pas tant à déterminer z_0 lui-même qu'à vérifier si la largeur de la couche neutre n'a pas été prise trop faible. En fait, ce danger n'existe que très-rarement dans les constructions ordinaires et surtout dans les projets de machines. Si, pour fixer les idées, on prend, pour z_0, la valeur donnée par l'équation (14), et si l'on fait $\mathfrak{S}_0 = {}^4/_5\,\mathfrak{S}$, cette équation donne:

$$\mathfrak{S} = \frac{5}{4}\,\frac{R}{z_0}\,\frac{U}{2J}.$$

Si on introduit cette valeur dans l'équation (4), qui se rapporte à la même section, on trouve:

$$\frac{M}{R} = \frac{5}{8}\,\frac{U}{z_0 a} \qquad (15)$$

$\frac{M}{R}$ est le bras de levier de la force *R*, et nous le désignerons par *A*. $\frac{U}{z_0 a}$ donne une des dimensions en hauteur de la section; la relation (15) fournit donc une équation entre deux dimensions de la pièce considérée. Dans le cas simple d'une section rectangulaire, en remplaçant *U* par sa valeur donnée plus haut, faisant, en outre, $z_0 = b$ et $a = \frac{h}{2}$, on a

$$\frac{h}{A} = \frac{16}{5}.$$

C'est là la limite à donner à *h* si l'on ne veut pas s'exposer à ce que l'effort de glissement soit supérieur aux efforts de tension ou de compression. Cette condition doit d'ailleurs s'appliquer surtout à la section dangereuse, si la tige est prismatique, par

conséquent au point B, dans le cas du N° II, § 12. Mais, dans ce cas, on a $A = \frac{l}{2}$; on doit donc prendre

$$\frac{h}{l} < \frac{8}{5}.$$

Ce rapport des hauteurs est tellement élevé qu'il n'y a pas à s'en préoccuper dans les cas ordinaires. On doit y prêter plus d'attention dans le calcul des poutres américaines. Dans ces pièces, l'existence du treillis a pour effet de réduire, dans une très-forte proportion, à moitié par exemple, la résistance de la couche neutre; il en résulte nécessairement une diminution correspondante dans le rapport $\frac{h}{l}$.

Pour les pièces à double T, on a

$$\frac{h}{A} = \frac{16}{5\left[\frac{b}{b_1} - \left(\frac{b}{b_1} - 1\right)\left(\frac{h_1}{h}\right)^2\right]}.$$

Le terme entre parenthèses ne forme qu'une fraction très-faible; la limite supérieure est donc un peu plus petite que $\frac{h}{A}$, mais cette valeur est encore généralement très-élevée.

Des tendances à la rupture, présentant quelque analogie avec celles que nous venons d'étudier, se produisent dans les fers à T, aux points d'assemblage de l'âme avec les semelles, mais il est assez rare qu'on ait à s'en préoccuper. On trouvera d'ailleurs les indications nécessaires à ce sujet dans les ouvrages que nous avons cités.

§ 12.

Poutres à charge commune.

Si l'on prend deux poutres prismatiques, reposant l'une sur l'autre en leur milieu et soumises en ce point à une charge P, pendant que leurs extrémités reposent sur des appuis, ces poutres fléchiront et les réactions P' et P'', résultant de cette flexion, devront faire équilibre à la force P. Ces réactions sont reliées entre elles par la formule de la ligne II, 2e colonne, p. 12:

$$\frac{P'}{P''} = \frac{J' \; E' \; l''^3}{J'' \; E'' \; l'^3}.$$

Comme d'ailleurs

$$P' = 4\frac{\mathfrak{S}' J'}{a' l'},\quad P'' = 4\frac{\mathfrak{S}'' J''}{a'' l''},$$

on en tire

$$\frac{\mathfrak{S}'}{\mathfrak{S}''} = \frac{E'}{E''}\frac{a'}{a''}\left(\frac{l''}{l'}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Il suit de là que les deux pièces, supposées de la même matière ($E' = E''$), ne travailleront avec le même coefficient de sécurité que si l'on a $\frac{a'}{a''}\left(\frac{l''}{l'}\right)^2 = 1$. Si donc ces pièces ont la même longueur, on doit avoir $a' = a''$, c'est-à-dire que les hauteurs doivent être égales, sans d'ailleurs qu'il soit nécessaire que cette égalité s'étende aux dimensions en largeur.

Exemple. Un support en fonte, en forme de croix symétrique, doit porter, au point de jonction des bras, une charge P. Les longueurs étant dans le rapport de 3 à 2, pour que les quatre bras, supposés prismatiques, travaillent dans les mêmes conditions, il faudra poser, d'après la formule (16),

$$\frac{a'}{a''} = \left(\frac{l'}{l''}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

En d'autres termes, la hauteur de la section des petits bras doit être à celle des grands bras dans le rapport de 4 à 9. Si on donnait la même section aux bras, le rapport des tensions développées serait 9 : 4.

Les considérations qui précèdent montrent que, pour des plaques de tôle reposant par leurs bords sur des appuis et chargées, soit uniformément, soit au centre seulement, les fibres parallèles au petit axe travaillent beaucoup plus que les fibres parallèles au grand axe. Si des poutres, à charge commune, sont formées de matériaux différents, leur bonne utilisation dépend essentiellement, comme l'indique la formule (16), des rapports des dimensions, en hauteur et en longueur. Ainsi, dans le cas où l'on superpose deux poutres, l'une en fonte, l'autre en fer, la résistance totale, que présentent ces deux pièces, n'atteint la somme de leurs résistances partielles que si leurs dimensions sont dans un certain rapport déterminé. Il importe de tenir compte de cette remarque dans les travaux de consolidation de constructions déjà existantes.

§ 13.

Résistance à la torsion.

Résistance et angle de torsion.

Lorsqu'une pièce est soumise à l'action de couples, qui tendent à la faire tourner autour de son axe géométrique, on dit qu'elle travaille par torsion. Dans une section normale, les éléments se trouvent ainsi soumis à un effort de glissement et, pourvu qu'on ne dépasse pas les limites d'élasticité, il se produit un équilibre entre le moment des forces extérieures de rotation, d'une part, et les moments des tensions dans les divers éléments de la section, d'autre part, ces moments étant pris par rapport à l'axe polaire du centre de gravité de la section, c'est-à-dire un axe passant par le centre de gravité de la section et perpendiculaire au plan de cette section. La résistance à la torsion n'est donc autre chose qu'une résistance complexe au glissement, de même que la résistance à la flexion par rapport à la résistance à la pression ou à la traction.

Si l'on nomme

M le moment statique des forces de rotation agissant sur une section de la pièce,

J_p le moment d'inertie polaire de la section, c'est-à-dire le moment d'inertie pris par rapport à l'axe polaire du centre de gravité,

a la distance au centre de gravité de la section de l'élément le plus éloigné,

$\mathfrak{S}$ la tension de glissement, développée dans cet élément,

on a

$$M = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Si la pièce a une section uniforme, $\frac{J_p}{a}$ est constant. Si l'on exprime M en fonction de la force P, qui produit la rotation, et de son bras de levier A, la section dangereuse sera celle qui correspondra au maximum de M et, par suite, la force, qui représente la résistance à la torsion de la pièce, sera

$$P = \frac{\mathfrak{S}}{A_m} \frac{J_p}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

A_m désignant la valeur que prend A pour le maximum de M.

De même que pour la résistance au glissement, la limite d'élasticité est atteinte, lorsque $\mathfrak{S}$ devient égal aux $^4/_5{}^{es}$ du plus petit des deux modules d'élasticité de la matière, qui constitue la pièce (voir § 5). Il importe d'avoir cette condition présente à l'esprit, lorsque l'on compare entre eux des efforts de flexion et de torsion.

On désigne sous le nom d'angle de torsion le déplacement angulaire relatif de deux sections de la pièce. En représentant cet angle par ϑ, on a, d'une manière générale, pour deux sections dont l'écartement est x,

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_p G} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

G désignant le module de torsion de la matière, qui a pour valeur les $^2/_5{}^{es}$ du module E d'élasticité.

Le tableau suivant contient, pour une série de modes d'application des forces de torsion sur une tige prismatique:

1°, la valeur du moment M en un point quelconque x de la tige;

2°, la résistance à la torsion P d'après la formule (18);

3°, l'angle de rotation ϑ de la tige, exprimé en longueur d'arc.

Dans ces formules, PR représente la somme totale des moments des forces de torsion. En outre, dans le type N° IV, S désigne le point d'application de la résultante des forces, tendant à faire tourner la tige et ramenées toutes au bras de levier R; l_0 est la distance du point S au point d'encastrement de la tige.

Les types ci-après se rencontrent tous plus ou moins fréquemment dans les machines; on en trouvera quelques autres dans le paragraphe consacré aux ressorts. Le type N° IV dans le tableau suivant est celui des arbres de transmission ordinaires. Les types V et VI trouvent leur application dans les constructions des bâtis et des chassis de machines.

N°	Mode d'application de la force.	Moment de torsion M.
I.		$M = PR$ pour tous les points entre A et B.
II.		$M = PR\frac{x}{l}$.
III.		$M = PR\frac{x^2}{l^2}$. PR = moment total des forces de rotation.
IV.		M = somme des moments agissant sur la longueur x.
V.		Partie c : $M = PR\frac{c_1}{l}$. Partie c_1 : $M = PR\frac{c}{l}$.
VI.		$M = PR\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l}\right)$.

Résistance de la pièce P.	Angle de torsion ϑ.	Observations.
$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a R}$	$\vartheta = \frac{P R . l}{J_p G} = \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{l}{a}$	Toutes les sections entre A et B sont également résistantes.
$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a R}$	$\vartheta = \frac{1}{2} \frac{P R . l}{J_p G} = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{l}{a}$	Section dangereuse en B.
$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a R}$	$\vartheta = \frac{1}{3} \frac{P R . l}{J_p G} = \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{l}{a}$	Les forces de torsion décroissent uniformément depuis B jusqu'en A. Section dangereuse en B.
$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a R}$	$\vartheta = \frac{P R . l_0}{J_p G} = \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{l_0}{a}$	Forme générale pour les cas I, II, III. Section dangereuse en B. La valeur de ϑ pour III se détermine d'après celle de IV, en remplaçant l_0 par la valeur correspondante $\frac{l}{3}$, etc.
Si $c_1 < c$, on a $P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a R} \frac{l}{c}$	$\vartheta = \frac{P R}{J_p G} \frac{c c_1}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{c_1}{a}$	Section dangereuse dans la partie la plus petite c_1.
$P = 2 \frac{\mathfrak{S} J_p}{a R}$	$\vartheta = \frac{1}{8} \frac{P R . l}{J_p G} = \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{S}}{G} \frac{l}{a}$	Sections dangereuses en A et B.

§ 14.

Moment polaire d'inertie et module de section.

Le moment d'inertie polaire J_p d'une section se détermine facilement par la relation

$$J_p = J_1 + J_2, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

J_1 et J_2 étant les moments d'inertie de la même section par rapport aux deux axes principaux d'inertie et dont les valeurs sont données, pour diverses sections, dans la table du paragraphe 7. On peut donc facilement calculer le module polaire de section $\frac{J_p}{a} = Z_p$, pour la plupart des cas de la pratique; toutefois, on doit faire une exception pour le cas des sections où l'on n'a pas $J_1 = J_2$, égalité qui a lieu, par exemple, pour les types III, VII, XII, XX, XXV, etc. § 7. Lorsque $J_1 \gtrless J_2$, les expressions J_p et $\frac{J_p}{a} = Z_p$ doivent subir une correction, qui nécessite de longs calculs, attendu qu'alors la déformation des sections, par le fait même de la torsion, exerce une influence très-notable. Pour le rectangle, qui constitue dans la pratique la plus importante de ces sections, on trouvera, dans le tableau ci-après, les valeurs corrigées de J_p et $\frac{J_p}{a}$. Pour le cercle et le carré, qui n'ont pas à subir de corrections, les valeurs sont directement fournies par la relation (20).

Exemple. Une pièce cylindrique en fer forgé, d'un diamètre $d = 100^{mm}$ et d'une longueur $l = 1200^{mm}$, est soumise à une force $P = 450^k$, agissant à l'extrémité d'un bras de levier $R = 600^{mm}$ et appliquée dans les conditions du N° I du paragraphe précédent. La tension $\mathfrak{S}$ à la circonférence est alors $\mathfrak{S} = \frac{a}{J_p} PR = \frac{16}{\pi} \frac{270000}{100^3} = 1,38$ et l'angle de torsion qui en résulte est $\vartheta = \frac{1,38 \cdot 1200}{8000 \times 50} = 0,00414$, ce qui correspond à un angle de $0°14'$. Si maintenant on veut réduire le diamètre d, de telle sorte que $\mathfrak{S}$ ait pour valeur la moitié de la résistance limite de torsion, soit $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times 15 = 6$, on devra prendre $\mathfrak{S} = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathfrak{S}} PR} = \sqrt[3]{\frac{16 \times 270000}{\pi \times 6}} = 61,2$; l'angle de torsion devient alors $\vartheta = \frac{6 \times 1200}{8000 \times 30,5} = 0,0294$ ou, en degrés, $1°40'$.

N°.	Section.	Moment d'inertie polaire J_p.	Module de section polaire $Z_p = \frac{J_p}{a}$.
I.		$\frac{\pi}{32} d^4$	$\frac{\pi}{16} d^3$
II.		$\frac{b^4}{6}$	$\frac{b^3}{3\sqrt{2}}$
III.		$\frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$	$\frac{b^2 h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$ approximativement $\frac{b^2 h^2}{3(0{,}46 + 0{,}96h)}$

§ 15.

Solides d'égale résistance à la torsion.

On obtiendra un solide d'égale résistance à la torsion, en déterminant les rapports des sections à l'aide de la formule (17), dans laquelle on supposera $\mathfrak{S}$ constant, c'est-à dire à l'aide de l'équation

$$\frac{M a}{J_p} = Const. \tag{21}$$

Dans le cas N° I, § 13, on a, pour toutes les sections, $M = PR$. Ces sections doivent donc être toutes égales entre elles et, par conséquent, la pièce doit être prismatique, pour satisfaire à la condition d'égale résistance. Les types N°s II et III donnent lieu aux formes reproduites dans le tableau ci-dessous. Il est clair, d'ailleurs, que l'angle de torsion doit être plus grand dans les solides

d'égale résistance que dans les pièces prismatiques. Cet angle, dont la valeur est indiquée pour les deux types reproduits ci-dessous, se détermine à l'aide de la formule

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_x G} \qquad (22)$$

J_x représentant le moment d'inertie polaire de la section au point x.

Forme.	Mode d'action.	Equation et angle de torsion.
I.	Cas N° II, § 11.	Section circulaire $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$; $PR = \mathfrak{S}\,\frac{\pi}{16}\,d^3$; $\vartheta = 3\,\frac{\mathfrak{S}}{G}\,\frac{l}{d}$ Forme approximative: tronc de cône avec un diamètre supérieur égal à $^2/_3\,d$.
II.	Cas N° III, § 11.	Section circulaire $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}$; $PR = \mathfrak{S}\,\frac{\pi}{16}\,d^3$ $\vartheta = 6\,\frac{\mathfrak{S}}{G}\,\frac{l}{d}$. Forme approximative: tronc de cône avec un diamètre supérieur égal à $\frac{d}{3}$.

On trouvera, § 20, à propos des ressorts de torsion, d'autres formes de solides d'égale résistance.

§ 16.

Résistance des pièces chargées debout.

Lorsqu'une pièce prismatique est comprimée dans le sens de sa longueur et qu'en même temps les dimensions de la section sont très-petites par rapport à cette longueur, la pièce se trouve soumise à des efforts mixtes de compression et de flexion. Les efforts de flexion se produisent, d'ailleurs, dans des conditions

particulières: le bras de levier de la force fléchissante n'est plus, comme dans le cas de la flexion simple, l'abscisse de la ligne élastique, mais l'ordonnée de cette même ligne. Il en résulte que la force de compression P, du moment où elle est suffisante pour produire un commencement de flexion, tendra à augmenter la flèche indéfiniment, même jusqu'à la rupture. En admettant que les lois de l'élasticité théorique restent applicables jusqu'à la limite de rupture, cette force P, capable de maintenir la pièce fléchie, sera donc en même temps l'expression de la force de rupture.

Le tableau suivant renferme, pour quelques-uns des modes d'application les plus importants des forces de compression, les formules relatives à la résistance mixte des pièces chargées debout. Dans ces formules,

E désigne le module d'élasticité de la matière, qui constitue la pièce, supposée prismatique,

J le plus petit moment d'inertie de sa section par rapport à un axe passant par le centre de gravité; ainsi, pour un rectangle, dont le plus petit côté est b, le plus grand h, on a, d'après le § 7: $J = \frac{hb^3}{12}$.

Il importe de remarquer ici que les expériences précieuses d'Hodgkinson fournissent, en général, une résistance limite à la rupture un peu inférieure à celle que donneraient nos formules. Toutefois, cette différence s'explique par ce fait que nos formules sont établies seulement pour le cas de corps parfaitement élastiques; elles ne sont donc exactes que si la charge est une fraction suffisamment faible de la force de rupture P. Or, les différents auteurs admettent des coefficients de sécurité très-variables. Pour la fonte et le fer forgé, on indique $^1/_4$ à $^1/_6$ᵉ (et même moins) de la force de rupture théorique, comme limite de la charge admissible; pour le bois, la limite descendrait de $^1/_5$ᵉ à $^1/_{10}$ᵉ ou $^1/_{12}$ᵉ de la force de rupture. Ces différences tiennent, en majeure partie, à ce qu'on ne saurait toujours déterminer exactement quel est celui des cas du tableau ci-après dont il convient d'appliquer la formule.

Les nombres de la colonne 2 de ce tableau ont été établis en admettant, pour le genre de résistance que nous considérons, le même coefficient de sécurité que pour la résistance à la compression.

N°.	Mode d'application.	Résistance théorique ou de rupture.	Observations.
I.	P, l	$P = \frac{\pi^2}{4}\frac{JE}{l^2}$	Support libre à un bout. L'extrémité *B* est encastrée. Section dangereuse au point d'encastrement.
II.	P, l	$P = \pi^2 \frac{JE}{l^2}$	Support libre. Les deux extrémités sont maintenues dans la direction de l'axe primitif de la pièce. Section dangereuse au milieu.
III.	P, l	$P = 2\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	Pièce encastrée à l'une de ses extrémités, l'autre étant assujettie à se déplacer dans la direction primitive de l'axe.
IV.	P, l	$P = 4\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	Pièce encastrée à ses deux extrémités, lesquelles sont maintenues dans la direction de l'axe primitif. Sections dangereuses aux extrémités et au milieu.

La pièce doit être calculée comme résistant à la compression, si:		
la section étant circulaire, $\frac{l}{d}$ est plus petit que	la section étant rectangulaire, $\frac{l}{b}$ (b étant le plus petit côté) est plus petit que	nature de la matière employée.
5	$5^3/_4$	Fonte.
12	14	Fer forgé.
6	8	Bois.
10	$11^1/_2$	Fonte.
24	28	Fer forgé.
$11^1/_2$	$13^1/_2$	Bois.
14	16	Fonte.
33	38	Fer forgé.
16	19	Bois.
20	23	Fonte.
48	56	Fer forgé.
28	27	Bois.

Les expériences d'Hodgkinson ont montré, en outre, que des colonnes, reposant sur des bases dressées, se comportent à peu près comme si elles étaient encastrées à hauteur de ces bases. On trouvera, dans la troisième section, différentes applications des formules de la résistance mixte que nous venons d'étudier.

§ 17.

Formes d'égale résistance pour les pièces chargées debout.

On obtient une forme de solide d'égale résistance, pour les pièces chargées debout, en faisant décroître les sections, à partir de la section dangereuse, de telle sorte qu'en supposant produite une petite flexion, la tension maximum reste la même dans toutes les sections.

Pour le cas N° II du paragraphe précédent, et en supposant que la section soit un cercle plein, on peut se servir de la formule suivante, établie par Redtenbacher:

$$\frac{x}{\frac{l}{2}} = \frac{2}{\pi}\left(arc\ sin\ \frac{y}{h} - \frac{y}{h}\sqrt{1-\left(\frac{y}{h}\right)^2}\right).$$

Cette formule se simplifie si l'on pose:

$$\frac{y}{h} = sin\ \varphi \quad \ldots\ldots$$

on trouve alors:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y}{h} = sin\ \varphi \\ &\frac{x}{\frac{l}{2}} = \frac{1}{\pi}(2\varphi - sin\ 2\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (23)$$

Fig. 4.

Cette équation permet de construire graphiquement le contour de la pièce. En prenant l'angle φ, comme variable indépendante, cette courbe a, pour équation de ses abscisses, l'équation d'une cycloïde, pour celle des ordonnées, une sinusoïde. On trouvera plus loin, à propos des bielles, un mode de tracé de cette courbe. La forme de solide qu'on obtient ainsi est représentée approximativement dans le deuxième tracé de la fig. 4. La génératrice est ici un arc de cercle, dont le rayon est le rayon de cour-

bure de la courbe réelle pour le point $x = \frac{l}{2}$. D'une manière générale, on peut remplacer la courbe réelle par une ligne à faible courbure. Cette approximation est parfaitement suffisante, attendu qu'en réalité la pièce ne doit pas éprouver de flexion sensible. La pièce précédente, supposée libre, présente les $^3/_4$ de la résistance d'une pièce cylindrique de diamètre h et de même hauteur l.

§ 18.

Résistance composée.

Il arrive fréquemment qu'un corps soit soumis à la fois à plusieurs forces, susceptibles de produire des effets différents, qu'une section, par exemple, travaille à la fois par compression et par flexion, ou par torsion et par flexion, etc. La résistance de la pièce et la tension maximum qui s'y développe doivent alors être calculées d'une manière différente de la méthode ordinaire. On trouvera, dans le tableau ci-après, les principales formules applicables aux cas de résistance composée, qui se présentent le plus fréquemment. Dans ces formules,

$\mathfrak{S}$ désigne la tension maximum, développée dans la section dangereuse;
Z le module de section au point dangereux, lequel est indiqué en B dans les figures;
F la surface de la section;
J son moment d'inertie (§ 7);
M_f un moment de flexion;
M_t un moment de torsion;
M_i un moment idéal de flexion $(M_f)_i$ ou de torsion $(M_t)_i$.

L'examen des formules montre qu'il est souvent utile de tenir compte de la résistance composée. Ainsi, dans le cas N° I, si $R = \frac{h}{2}$, c'est-à-dire si la charge d'une tige a son point d'application au bord de la section, on a $P = \frac{\mathfrak{S}\, b\, h}{4}$, c'est-à-dire que la résistance de la pièce est seulement le quart de ce qu'elle serait si la force agissait au centre. Si la section est un cercle (d), on a $P = \frac{\mathfrak{S} \frac{\pi}{4} d^2}{1 + 8 \frac{R}{d}}$, et en faisant $R = \frac{d}{2}$, c'est-à-dire en

Nº.	Mode d'action.	Résistance de la pièce.
I.		$P = \dfrac{\mathfrak{S} F}{1 + R \dfrac{F}{Z}}$ Pour une section rectangulaire (bh) $P = \dfrac{\mathfrak{S} bh}{1 + 6 \dfrac{R}{h}}$
II.		$P = \dfrac{\mathfrak{S} F}{\cos \alpha + \dfrac{F}{Z} l \sin \alpha}$ Pour une section rectangulaire (bh) $P = \dfrac{\mathfrak{S} bh}{\cos \alpha + 6 \dfrac{l}{h} \sin \alpha}$
III.		$P = \dfrac{\mathfrak{S} F}{\cos \alpha + \dfrac{F}{Z} (l \sin \alpha + R \cos \alpha)}$ Pour une section rectangulaire (bh) $P = \dfrac{\mathfrak{S} b h}{\cos \alpha + 6 \dfrac{l}{h} (\sin \alpha + \dfrac{R}{l} \cos \alpha)}$
IV.		$P = \dfrac{\mathfrak{S} Z}{\frac{3}{8} l + \frac{5}{8} \sqrt{l^2 + R^2}}$ Pl est un moment de flexion M_f, PR un moment de torsion M_t.
V.		$1 = \dfrac{\mathfrak{S} Z}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos \alpha}}$ M_1 désignant le moment (fléchissant) de P_1, M_2 celui de P_2.

Moments idéaux.

Moment fléchissant idéal pour la tension $\mathfrak{S}$: $(M_f)_i = P\left(R + \frac{Z}{F}\right)$.

Pour une section circulaire (d):	Pour une section elliptique (bh):	Pour une section rectangulaire (bh):
$(M_f)_i = P\left(R + \frac{d}{8}\right)$	$(M_f)_i = P\left(R + \frac{h}{8}\right)$	$(M_f)_i = P\left(R + \frac{h}{6}\right)$

Moment fléchissant idéal pour la tension $\mathfrak{S}$: $(M_f)_i = P\left(l \sin\alpha + \frac{Z}{F}\cos\alpha\right)$.

Pour une section circulaire (d):	Pour une section elliptique (bh):	Pour une section rectangulaire (bh):
$(M_f)_i = P\left(l \sin\alpha + \frac{d}{8}\cos\alpha\right)$	$(M_f)_i = P\left(l \sin\alpha + \frac{h}{8}\cos\alpha\right)$	$(M_f)_i = P\left(l \sin\alpha + \frac{h}{6}\cos\alpha\right)$

Moment fléchissant idéal pour la tension $\mathfrak{S}$: $(M_f)_i = P\left(R\cos\alpha + l \sin\alpha + \frac{Z}{F}\cos\alpha\right)$.

Section circulaire (d):	Section elliptique (bh):	Section rectangulaire (bh):
$(M_f)_i = P\left(R\cos\alpha + l\sin\alpha + \frac{d}{8}\cos\alpha\right)$	$(M_f)_i = P\left(R\cos\alpha + l\sin\alpha + \frac{h}{8}\cos\alpha\right)$	$(M_f)_i = P\left(R\cos\alpha + l\sin\alpha + \frac{h}{6}\cos\alpha\right)$

Moment fléchissant idéal pour la tension $\mathfrak{S}$:

$$(M_f)_i = {}^3/_8\, M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}.$$

Moment de torsion idéal pour la tension $\mathfrak{S}$:

$$(M_t)_i = {}^3/_4\, M_f + {}^5/_4 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}.$$

Moment fléchissant idéal pour la tension $\mathfrak{S}$:

$$(M_f)_i = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos\alpha}.$$

Dans les cas IV et V, on suppose que la section de la tige est une section telle que deux axes principaux rectangulaires la divisent en quatre portions symétriques.

supposant encore la charge appliquée au bord, on trouve $P = \frac{\mathfrak{S}}{5}\frac{\pi}{4}d^2$; la résistance est donc encore plus petite que pour le cas d'un rectangle. Les cas I et II se déduisent du cas N° III en y faisant $\alpha = 0$ ou $R = 0$.

Les moments idéaux ont une utilité particulière ponr les sections elliptiques et rectangulaires, où la plus grande dimension h est, comme on le sait, snpposée dans le plan de la flexion. Si on connaît, à priori, cette dimension, ce qni arrive fréquemment lorsqu'on se donne le profil dn support à installer, le moment idéal permet de déterminer facilement la résistance composée, attendu que le terme entre parenthèses, à droite, donne le bras de levier de la force P pour ce moment idéal. Ce bras de levier étant, en général, facile à déterminer, surtout graphiquement, on se trouve ramené an cas d'nn effort de flexion simple. Si, par exemple, dans le cas N° II, pour $\alpha = 45^0$, soit $\cos\alpha = \sin\alpha = 0{,}707$, on se donne la hanteur h du rectangle, la section en B doit être calculée comme si elle était soumise à une force fléchissante P, agissant avec un bras de levier $0{,}707\, l + 0{,}707\frac{h}{6}$. Dans le cas N° I, on trouve, pour $R = 0$ et pour une section circulaire, $(M_f)_i = P\frac{d}{8}$ et l'on doit avoir $P\frac{d}{8} = \mathfrak{S}\frac{\pi}{32}d^3$, ou $P = \mathfrak{S}\frac{\pi}{4}d^2$, ainsi qu'on pouvait le prévoir, puisque, pour $R = 0$, la tige ne travaille que par traction. $\frac{d}{8}$ est donc le bras de levier que devra avoir une force fléchissante P, pour exercer sur la pièce le même effort qu'une force de même grandeur agissant dans la direction de l'axe. Ceci n'est d'ailleurs exact rigoureusement qu'à condition de négliger les efforts de glissement dans le calcul de la flexion. — Les formules IV et V présentent également un grand nombre d'applications ntiles (voir les calculs d'arbres et d'axes de machines).

§ 19.

Résistance des enveloppes.

Les tableaux suivants, qni reproduisent quelques-uns des cas les plus importants dans la pratique des machines, permettent de déterminer la résistance des enveloppes à section circu-

laire, dans lesquelles l'épaisseur des parois est relativement faible. La théorie de la résistance des enveloppes est encore loin d'être complète, et elle est surtout discutable pour les cylindres soumis à des pressions extérieures; aussi, nous ne donnons que les formules relatives aux pressions intérieures. Dans ces formules,

p désigne la pression effective (différence entre la pression intérieure et la pression en sens inverse) par unité de surface sur la paroi,

$\mathfrak{S}$ la tension maximum développée dans la matière qui constitue la paroi,

E le module d'élasticité de la matière,

r et δ le rayon intérieur et l'épaisseur de l'enveloppe.

Les formules des Nos I et II peuvent s'appliquer, mais simplement à titre d'approximation, jusqu'à la limite de rupture.

1er Exemple. Pour un réservoir cylindrique, en fer forgé, de 1000^{mm} de diamètre et dont la paroi a 10^{mm} d'épaisseur, on admet que la matière peut être soumise à une tension $\mathfrak{S} = 8$. D'après la formule I, ce vase peut supporter une pression intérieure effective de $p = 8\left(\sqrt{\frac{520}{500}} - 1\right) = 8 \times 0{,}0198$ $= 0^k{,}158$ par millimètre carré. Cette pression représente sensiblement, en atmosphères, $100 \times 0{,}158 = 15^{atm}{,}8$. Comme l'on a $K = 40$, le vase éclaterait si la tension intérieure était 5 fois plus forte, soit de 79 atmosphères.

2e Exemple. Un réservoir sphérique, ayant également 1000^{mm} de diamètre et 10^{mm} d'épaisseur, avec $\mathfrak{S} = 8$, pourra supporter, d'après le No II, une pression $p = \frac{16 \times 10}{500} = 0^k{,}32$ par millim. carré, soit 32 atmosphères.

3e Exemple. Un fond plat, en fer forgé, rivé sur le cylindre du premier exemple, devrait, pour $\mathfrak{S} = 8$ et d'après le No IV, avoir comme épaisseur le nombre considérable $\delta = 500\sqrt{2/3}\sqrt{\frac{0{,}158}{8}} = 500 \cdot 0{,}816 \cdot 0{,}14 =$ $57^{mm}{,}12$.

N°.	Mode d'action.	Résistance p.	Épaisseur des parois δ.
I. Cylindre.		$p = \mathfrak{S}\left(\sqrt{1+\frac{2\delta}{r}}-1\right)$	$\frac{\delta}{r} = \frac{p}{\mathfrak{S}}\left(1+\frac{p}{2\mathfrak{S}}\right)$
II. Sphère.		$p = 2\mathfrak{S}\frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta}{r} = \frac{p}{2\mathfrak{S}}$
III. Surf. plane circul.		$p = \mathfrak{S}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{p}{\mathfrak{S}}}$
IV. Surf. plane circul.		$p = \frac{3}{2}\mathfrak{S}\left(\frac{\delta}{r}\right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{p}{\mathfrak{S}}}$

La flèche f, que présente une plaque ronde, a pour valeur, d'après Grashof, pour le cas N° III,

$$\frac{f}{\delta} = \frac{5}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 \frac{p}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

et pour le cas N° IV,

$$\frac{f}{\delta} = \frac{1}{6}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 \frac{p}{E} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

4° Exemple. La plaque calculée au 3° exemple devrait donc, pour $E = 20000$, *présenter une flèche* $f = \frac{57}{6}\left(\frac{500}{57}\right)^4 \frac{0,158}{20000} = 0^{mm},44$.

Les formules qui précèdent ne sauraient plus s'appliquer ou conduiraient souvent à des résultats erronés pour les enveloppes dont les parois, par suite de pressions intérieures considérables, doivent avoir une très-forte épaisseur, comme dans les canons, les cylindres de presses hydrauliques, etc. Dans ces enveloppes, les tensions des fibres aux divers points d'un même rayon sont, suivant les circonstances, extrêmement différentes les unes des autres; or, les rapports de ces tensions exercent une influence marquée sur la résistance de la pièce. Suivant d'ailleurs la loi que l'on admet pour ces rapports des tensions, on arrive pour les épaisseurs à des résultats tout différents. Brix calcule les tensions aux divers points d'un rayon, en admettant que, sous l'action de la force intérieure, l'épaisseur de la paroi ne subit aucun changement. Barlow admet, au contraire, une loi de variation telle que le surface de la section annulaire (cercle) conserve une grandeur constante. Lamé ne fait aucune hypothèse préliminaire et calcule rigoureusement les variations de tension, pour les diverses molécules d'un même rayon, en fonction de la pression intérieure. Cette méthode est assurément celle qui conduit aux notions les plus vraisemblables pour les différents éléments de la pièce. En conservant les notations précédentes, on déduit des trois théories (1) les formules suivantes.

Valeurs.		Brix.	Barlow.	Lamé.
Cylindre creux	$p =$	$\mathfrak{S} \log nat\, e^{\frac{p}{\mathfrak{S}}} - 1$	$\dfrac{\mathfrak{S}}{1 + \frac{r}{\delta}}$	$\mathfrak{S} \dfrac{(r+\delta)^2 - r^2}{(r+\delta)^2 + r^2}$
	$\dfrac{\delta}{r} =$	$e^{\frac{p}{\mathfrak{S}}} - 1$	$\dfrac{p}{\mathfrak{S} - p}$	$\sqrt{\dfrac{\mathfrak{S} + p}{\mathfrak{S} - p}} - 1$
Sphère creuse	$p =$	$2\mathfrak{S} \dfrac{\delta}{r}$	$\dfrac{2\mathfrak{S}}{1 + \frac{r}{\delta}}$	$2\mathfrak{S} \dfrac{(r+\delta)^3 - r^3}{(r+\delta)^3 + 2r^3}$
	$\dfrac{\delta}{r} =$	$\dfrac{1}{2} \dfrac{p}{\mathfrak{S}}$	$\dfrac{p}{2\mathfrak{S} - p}$	$\sqrt{\dfrac{2(\mathfrak{S} + p)}{2\mathfrak{S} - p}} - 1$

(1) Voir Org. f. Eisenbahnwesen 1859. — H. Scheffler, sur l'élasticité des tuyaux; cet article intéressant traite ce sujet d'une manière complète, même dans les cas les plus compliqués, comme ceux des tuyaux avec fond ou des tuyaux renforcés.

Les trois théories s'accordent pour indiquer que la tension maximum de la matière se produit sur la paroi intérieure; c'est donc à celle-ci que s'applique la valenr de $\mathfrak{S}$. La formule de Lamé et celle de Barlow conduisent, en outre, à ce résnltat remarquable que la surépaisseur de la paroi, au delà de certaines limites, n'augmente plus la résistance de la pièce. La limite de résistance correspondant à la tension $\mathfrak{S}$ est atteinte, lorsque $p = \mathfrak{S}$. La résistance théorique est elle-même atteinte, lorsque p devient égal au coefficient de résistance de la matière. La pression intérieure commence alors par allonger, d'une manière permanente, les fibres intérienres et, si elle continue à s'élever jusqu'à la valenr du coefficient de rupture, elle les fait éclater. La limite théorique de la résistance a lieu pour $p = T$, c'est-à-dire

	fonte	fer forgé	acier fondu
ponr p	$= 7{,}5$	15	25
en atmosphères	750	1500	2500

Du reste, les défants d'homogénéité de la matière penvent amener, non seulement nn allongement, mais encore uue rnpture, ponr des pressions très-notablement inférieures à ces limites. En ontre, dans les canons de fort calibre, les tensions atteignent 2500 (et même 6000) atmosphéres. On comprend donc que des canons en acier fondu, homogènes, puissent fréquemment ne pas résister. Pour renforcer ces pièces, on a essayé de les composer de conches annulaires non homogènes, soumises à des tensions différentes: on est arrivé ainsi aux systèmes de frettes extérieures ou de garnitures intérieures. En Angleterre et en France, la première de ces méthodes est très en usage; mais c'est un problème tonjours très-délicat de réaliser, dans la pratiqne, les tensions voulues dans les différentes couches. Dans les presses hydrauliques, on tonrne ordinairement la difficulté en donnant au diamètre du cylindre une grandeur telle que la pression, exercée par l'eau, reste inférieure aux limites correspondant à la sécurité.

§ 20.

Calcul des ressorts. (1)

Les matériaux qu'on emploie pour la construction des machines sont tous plus ou moins élastiques; ils ne peuvent donc

(1) Voir l'ouvrage de l'auteur: Construction et calcul des principaux types de ressorts. Winterthur, Wurster et Cie, 1857.

résister aux forces extérieures que moyennant une déformation, qui, si les dimensions des pièces sont convenablement choisies, disparait, lorsque les forces extérieures cessent d'agir. On cherche, en général, à réduire les limites de cette déformation (allongement, raccourcissement, flexion, torsion), de façon à rendre les pièces aussi rigides que possible. Toutefois, dans les ressorts, on utilise cette élasticité de la matière, soit pour amortir les chocs (tampons, ressorts de wagons), soit pour produire un mouvement (horloges), soit enfin pour obtenir des appuis présentant une certaine douceur (chabottes). Il suit de là que les ressorts doivent se composer de systèmes susceptibles d'éprouver, entre les limites d'élasticité, des variations de forme relativement considérables et, comme ces variations sont soumises aux lois de la résistance des matériaux, il en résulte que la théorie des ressorts trouve ici sa place naturelle.

Les résistances directes à la pression ou à la traction ne peuvent être utilisées, pour les ressorts, que s'il s'agit de matières très-extensibles ou très-compressibles, comme le caoutchouc. Pour les matières moins déformables, comme le bois ou les métaux, on utilise surtout les résistances à la flexion ou à la torsion. Nous avons réuni, dans le tableau suivant, les types les plus importants de ressorts, agissant par flexion ou par torsion, en rappelant leurs propriétés essentielles.

Bien que la faculté de déformation soit, dans un ressort, la propriété essentielle, il peut être utile de tenir compte de la dépense de matière qu'il exige. Cet élément est indiqué dans l'avant-dernière colonne, en supposant que, pour tous les ressorts, la charge et le déplacement du point d'application aient la même valeur. On a pris pour unité le volume correspondant aux ressorts triangulaires.

N°.	Forme.	Désignation.	Résistance.
I.		Ressort rectangulaire. Section longitudinale limitée par une parabole cubique.	$P = \frac{\mathfrak{S}}{6}\frac{bh^2}{l}$
II.		Ressort triangulaire simple.	$P = \frac{\mathfrak{S}}{6}\frac{bh^2}{l}$
III.		Ressort triangulaire composé ou à lames superposées.	$P = \frac{\mathfrak{S}}{6}\frac{ibh^2}{l}$ i nombre des lames.
IV.		Ressort spiral à section rectangulaire.	$P = \frac{\mathfrak{S}}{6}\frac{bh^2}{R}$
V.		Ressort en hélice à section rectangulaire.	$P = \frac{\mathfrak{S}}{6}\frac{bh^2}{R}$
VI.		Ressort en hélice à section circulaire.	$P = \frac{\mathfrak{S}\pi}{32}\frac{d^3}{R}$

Dépression.	Flexibilité.	Volume.	Observations.
$f = 6 \frac{P l^3}{E b h^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{h}{l}$	$^2/_3$	Dans l'exécution, au lieu de $\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}$, on prend, comme approximation, un profil trapèzoïdal, avec $^2/_3\, h$ pour la hauteur à l'extrémité.
$f = 6 \frac{P l^3}{E b h^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	1	Corps d'égale résistance à la flexion; dans la pratique, l'extrémité libre doit être renforcée.
$f = 6 \frac{P l^3}{E i b h^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	1	Se comporte comme un ressort triangulaire simple, qui aurait comme base ib (en pointillé); peut être regardé comme obtenu, en coupant et superposant les parties d'une même pièce.
$f = R\vartheta = 12 \frac{P l R^2}{E b h^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	1	l longueur du ressort supposé développé.
$f = R\vartheta = 12 \frac{P l R^2}{E b h^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	1	Ces trois formes constituent des corps d'égale résistance à la flexion. La valeur $\frac{F}{R}$ est l'angle de torsion ϑ, déterminé par la charge P.
$f = R\vartheta = \frac{64}{\pi} \frac{P l R^2}{E} \frac{}{d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{d}$	$^4/_3$	

N°.	Forme.	Désignation.	Résistance.
VII.		Ressort de torsion simple: tige ronde.	$P=\mathfrak{S}\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{R}$
VIII.		Ressort de torsion simple: Tige plate.	$P=\frac{\mathfrak{S}}{3R}\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$ approximat. ($h>b$) $P=\frac{\mathfrak{S}}{R}\frac{b^2h^2}{3(0,4b+0,96h)}$
IX.		Ressort en hélice à fil rond.	$P=\mathfrak{S}\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{R}$
X.		Ressort en hélice à lame plate.	$P=\frac{\mathfrak{S}}{3R}\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$ approximat. ($h>b$) $P=\frac{\mathfrak{S}}{R}\frac{b^2h^2}{3(0,4b+0,96h)}$
XI.		Ressort conique, fil rond.	$P=\mathfrak{S}\frac{\pi}{16}\frac{d^3}{R}$
XII.		Ressort conique, lame plate.	$P=\frac{\mathfrak{S}}{3R}\frac{b^2h^2}{\sqrt{b^2+h^2}}$ approximat. ($h>b$) $P=\frac{\mathfrak{S}}{R}\frac{b^2h^2}{3(0,4b+0,96h)}$

Dépression.	Flexibilité.	Volume.	Observations.
$f = R\vartheta = \frac{32}{\pi}\frac{P}{G}\frac{R^2 l}{d^4}$	$\frac{f}{R} = 2\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{l}{d}$	$^5/_{12}$	Dans les cas VII à X, les ressorts sont des solides d'égale résistance à la torsion.
$f = R\vartheta = 3\frac{PR^2 l}{G}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{l\sqrt{b^2+h^2}}{bh}$	$^5/_8$	Les types VII et VIII conviennent spécialement pour former des ressorts composés ou en faisceaux.
$f = \frac{32}{\pi}\frac{PR^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = 2\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{l}{d}$	$^5/_{12}$	Dans les cas IX à XII, *l* est toujours la longueur du fil comprimé.
$f = 3\frac{PR^2 l}{G}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{l\sqrt{b^2+h^2}}{bh}$	$^5/_8$	Le plus grand côté de la section peut être indifféremment parallèle, normal ou oblique à l'axe.
Approximativement: $f = \frac{16}{\pi}\frac{PR^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = \frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{l}{d}$	$^5/_6$	Ici, comme au N° XII, on suppose le ressort prolongé jusqu'au sommet. Dans les deux cas, la section dangereuse est en *B*.
Approximativement: $f = \frac{3}{2}\frac{PR^2 l}{G}\frac{b^2+h^2}{b^3h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{l\sqrt{b^2+h^2}}{bh}$	$^5/_4$	Si l'on réduit peu à peu la hauteur *h* de la section, à partir de *B* jusqu'à l'extrémité, on obtient un solide d'égale résistance.

Dans les formules du tableau qui précède,

E désigne toujours le module d'élasticité,

G le module de torsion de la matière du ressort, c'est-à-dire $^2/_5\, E$ (voir § 11).

Les coefficients de résistance des matières qu'on emploie pour les ressorts sont donnés § 2. Mais il importe de remarquer que, pour faire travailler les ressorts par torsion avec la même sécurité que les ressorts par flexion, on ne doit prendre, pour les premiers, que les $^4/_5$mes de la tension $\mathfrak{S}$ (voir § 5). Les formules demeurent d'ailleurs applicables, quand la direction de la force P est de sens contraire à celle qu'indiquent les figures. Dans tous les cas examinés, le volume V des ressorts s'obtient par la relation,

$$V = C \cdot (P \cdot f) \frac{E}{\mathfrak{S}^2} \qquad (26)$$

C désignant une constante, qui dépend de la forme du ressort, $(P \cdot f)$ le produit de la charge par la flèche, en d'autres termes, le travail du ressort. On en conclut que, pour tous les ressorts appartenant au même type, composés de la même matière, présentant la même sécurité et donnant lieu à un même travail $(P \cdot f)$, le poids reste le même, quelle que soit la longueur l ou de quelque façon qu'on choisisse les dimensions arbitraires. Le quotient $\frac{E}{\mathfrak{S}^2}$ montre que les matières les plus avantageuses, pour les ressorts, sont celles qui ont un faible coefficient d'élasticité mais un module de résistance élevé. Or, la table du § 2 donne:

pour l'acier fondu trempé, $\frac{E}{T^2} = \frac{30000}{65^2} = 7{,}10$

pour l'acier ordinaire, non trempé, $= \frac{20000}{25^2} = 32{,}00$

pour le cuivre . . . . $= \frac{6500}{4{,}8^2} = 28{,}21$

pour le bois . . . . $= \frac{1100}{2^2} = 277{,}00$

L'acier trempé est donc théoriquement, et comme le confirme la pratique, la matière la plus avantageuse pour les ressorts.

Il convient de signaler encore cette propriété, commune à tous nos types de ressorts, que leur flexion, ou le déplacement du point d'application de la force, est proportionelle à la charge.

Il résulte de là que les oscillations d'un ressort chargé rentrent dans la classe des oscillations simples, ou pendulaires, et que leur durée peut se calculer facilement. En négligeant le poids propre des ressorts, chacun de ceux que nous avons étudiés oscille, sous l'action de la charge P, comme ferait un pendule simple de longueur f (1), de sorte que le temps t d'une oscillation simple est

$$t = \pi \sqrt{\frac{f}{g}} \qquad (27)$$

$g = 9810^{mm}$ désignant l'accélération due à la pesanteur.

Exemples d'application de la théorie des ressorts. — 1. On veut calculer un ressort triangulaire simple (type N° II) pour une charge $P = 50^k$ et une flexion $f = 20^{mm}$. Choisissons, comme matière, l'acier fondu avec $E = 30000$ et posons $\mathfrak{S} = 40^k$; si nous prenons pour longueur du ressort $l = 400^{mm}$, la colonne 6 nous donne $\frac{20}{400} = \frac{40}{30000} \times \frac{400}{h}$, d'où $h = \frac{40 \times 400 \times 400}{20 \times 30000} = 10^{mm},66$. Maintenant, d'après la colonne 4, on a $50 = \frac{40}{6} \frac{b \times 32^2}{400 \times 3^2}$ ou $b = 26^{mm},35$, soit $26^{mm},5$. Le volume correspondant $V = \frac{b\,h\,l}{2} = \frac{26{,}5 \times 32 \times 400}{3 \cdot 2} = 56533$ millim. cubes.

2e Exemple. En conservant la même matière, faisons $l = 300$; on a alors: $h = \frac{40 \times 300 \times 300}{20 \times 30000} = 6^{mm}$, $b = \frac{6 \times 300 \times 50}{40 \times 36} = 62^{mm},5$, $V = \frac{b\,h\,l}{2} = 56250$ millim. cubes, c'est-à-dire qu'en tenant compte des fractions négligées pour arrondir les nombres, on trouverait pour V la même valeur que dans le 1er exemple, conformément à la remarque faite sur la formule (26).

3e Exemple. On veut remplacer le ressort précédent par un ressort cylindrique en hélice (type N° IX), fabriqué avec la même matière. Ce nouveau ressort agissant par torsion, nous devons, pour conserver la même sécurité, remplacer $\mathfrak{S} = 40$ par les $^4/_5$es de cette valeur, soit 32. Si nous prenons, en outre, pour le diamètre du fil d'acier, $d = 6^{mm}$, la colonne 4, N° IX, donne $50 = \frac{32}{16} \pi \frac{6^3}{R}$, d'où $R = \frac{\pi \cdot 216}{25} = 27{,}14^{mm}$, soit 27^{mm}. D'après la colonne 6, on doit prendre, pour la longueur du fil, $l = \frac{6 \cdot 20 \cdot 0{,}4 \cdot 30000}{32 \cdot 2 \cdot 27} = \frac{10000}{12} = 833{,}3$, ce qui donne, pour le nombre de tours, $i = \frac{l}{2 \pi R} = \frac{833{,}3}{2 \cdot \pi \cdot 27} = 4{,}91$, soit 5. Si l'on voulait avoir un plus grand nombre de spires, il faudrait prendre d plus petit. Le volume du ressort est $V_1 = l \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = 833{,}3 \frac{\pi}{4} 36 = 23562$ millim. cubes. Ce volume, comparé au pré-

(1) Voir les traités de physique.

cédent, donne $\frac{V_1}{V} = \frac{23562}{56250} = \frac{5}{11,99}$, *soit* $^5/_{12}$, *chiffre qu'eût donné la colonne 7, N° IX, si l'on n'avait pas arrondi les chiffres.*

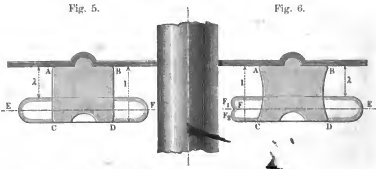
Le caoutchouc vulcanisé ou sulfuré est fréquemment utilisé comme matière de ressorts, notamment dans les tampons de wagons, les marteaux-pilons, etc., où on l'emploie généralement sous la forme de disques superposés et séparés par des plaques métalliques. Les expériences, faites en vue de déterminer la manière dont se comporte le caoutchouc en se déformant, sont encore trop incomplètes pour qu'on en puisse tirer des règles de construction. Néanmoins, pour de petits diamètres, et notamment pour les tampons de wagons, on peut partir des indications suivantes (1).

Les figures 5 et 6 donnent les sections le plus fréquemment adoptées pour les tampons. Sur l'une des faces de chaque disque est ménagé un bourrelet annulaire, sur l'autre une gorge dans laquelle s'engage la plaque intercalaire, de façon à prévenir les déplacements latéraux.

Lorsqu'on soumet un ressort de ce genre à une compression dirigée suivant l'axe, le volume du ressort reste invariable; l'épaisseur diminue, mais, par contre, le diamètre augmente. Les fibres qui fatiguent le plus sont en E, à l'extrémité extérieure, et elles travaillent par traction. Il se produit d'ailleurs des déchirements en ces points, quand on dépasse la limite d'élasticité.

On atteint à peu près cette limite d'élasticité, lorsque la charge représente $^1/_2$ k par millim. carré de la section initiale,

Fig. 5. Fig. 6.



mesurée normalement à l'axe. Le module de résistance T doit donc être pris égal à $0^k,5$, lorsqu'on calcule la pièce comme tra-

(1) On a utilisé les nombres fournis par les précieuses expériences de Werder à l'usine de Klett et Cie de Nuremberg.

vaillant simplement par compression. Ce module est d'ailleurs un peu plus élevé (jusqu'à $0^k,55$) pour les caoutchoucs de faible densité, un peu plus faible (jusqu'à $0^k,45$) pour les caoutchoucs plus denses. Le poids spécifique, qui varie du reste suivant la teneur en soufre, est compris entre 1 et 1,32.

Lorsqu'on arrive à la limite d'élasticité, la section du tore suivant EF se trouve à peu près doublée par rapport à la surface primitive, et le contour $ECDF$ est au contour primitif $ABCD$ dans le rapport de 4 à 3.

Dans les limites de l'élasticité, la compression s'opère suivant une loi variable avec la qualité du caoutchouc, mais qui peut s'exprimer approximativement par la formule empirique

$$\lambda = \frac{l}{\gamma}\sqrt{\frac{P}{q}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

dans laquelle λ représente le raccourcissement éprouvé par l'épaisseur primitive l, sous l'action de la force P; q la section initiale du tore, mesurée dans un plan normal à l'axe, γ le poids spécifique de la matière.

Exemple. Un ressort, disposé suivant le type de la fig. 5, a 142^{mm} de diamètre extérieur, 74^{mm} de diamètre intérieur, ce qui correspond à une surface de section $q = 11536^{mm\,q}$; l'épaisseur des disques est $l = 35^{mm}$ et la densité du caoutchouc $\gamma = 1$. On le soumet à une pression de 2500^k. La charge par unité de surface de la section primitive est alors $\frac{P}{q} = \frac{2500}{11536} = 0^k,217$; cette charge se trouve donc au-dessous de la limite d'élasticité. D'après la formule (28), la compression réduira la hauteur de $\lambda = 35\sqrt{0,217} = 35 \times 0,466 = 16^{mm},31$. Des essais directs sur la même pièce ont donné $\lambda = 16^{mm},75$.

Dans les tampons de chemins de fer, on emploie de 4 à 7 rondelles, dont les dimensions sont précisément celles de l'exemple précédent. La réduction de hauteur totale est alors, comme on le voit facilement, égale à celle d'un anneau isolé multipliée par le nombre des anneaux.

Dans la pratique, on observe fréquemment que les ressorts en caoutchouc perdent rapidement leur élasticité et finissent par se transformer en une masse dure et cassante. Mais les résultats obtenus dans de nouvelles installations, exécutées avec beaucoup de soin, permettent de conclure que cet inconvénient se produit seulement quand les anneaux, pendant leur déformation, sont exposés à des frottements de glissement. Pour éviter ces frottements, il faut que les plaques intercalaires dépassent le caoutchouc, tant à l'inté-

rieur qu'à l'extérieur, d'une quantité telle que la matière, après déformation, ne vienne frotter, ni contre la boite, ni contre la tige centrale. Les tampons, dans lesquels cette condition est observée, présentent une durée très-satisfaisante.

Il convient de donner aux anneaux une forme telle qu'il ne puisse pas se former de plis, sur les bords. — Ces plis, qui ont pour conséquence une usure rapide, se produisent facilement dans les sections analogues à celle de la fig. 6 et prennent alors la forme indiquée en $F_1 F_2$. Les anneaux à section rectangulaire, comme ceux de la fig. 5, sont à l'abri de cet inconvénient et doivent, par suite, être employés de préférence.

DEUXIEME PARTIE.

NOTIONS DE GRAPHOSTATIQUE.

§ 21.

Remarques préliminaires.

L'équilibre de plusieurs forces, agissant sur un système de points matériels, peut être représenté par un tracé graphique, à la condition de remplacer chacune de ces forces par une ligne droite, ayant même direction, même grandeur et même position dans l'espace. La direction d'une force est donnée par les angles que fait la droite qui la représente avec les axes de coordonnées. La longueur de cette ligne donne la grandeur absolue de la force; on indique généralement par une flèche le sens dans lequel elle tend à produire le mouvement; enfin la position de la droite, par rapport au système d'axes, définit les constantes qui s'appliquent à la force considérée. Cette représentation des forces par des grandeurs géométriques permet de transformer les questions de statique en simples problèmes de géométrie appliquée et d'arriver, par suite, à des solutions infiniment plus simples que celles de l'analyse algébrique, dans les cas notamment où certains éléments à déterminer sont des grandeurs géométriques, qui doivent, en définitive, être reportées sur des plans. En coordonnant méthodiquement les solutions graphiques de ce genre de problèmes, on est arrivé à former un corps d'enseignement

spécial, sous le nom de *statique graphique*, que nous proposons de remplacer par celui de *graphostatique* (1).

Cette méthode est extrêmement précieuse pour l'établissement des projets de machines et nous aurons de fréquentes occasions de l'employer, dans le cours de cet ouvrage, pour l'étude des pièces élémentaires. Afin de rendre plus intelligibles les applications que nous aurons à en faire dans la suite, nous croyons devoir rappeler brièvement quelques-uns des principes de cette méthode.

De la graphostatique on pourrait, à la rigueur, éliminer ces méthodes de calcul graphique qui s'appliquent aux cas où les éléments n'interviennent que par leurs mesures, comme, par exemple ceux où les forces n'entrent que par leurs grandeurs, au même titre que des unités d'ordre quelconque. Ces méthodes, qu'on désigne sous les noms divers de calcul graphique, arithmétique graphique ou arithmographie, etc. doivent, dans tous les cas, former une subdivision (2). Nous commencerons par rappeler les principes relatifs à ces problèmes de pure arithmétique graphique. Nous ne saurions d'ailleurs trop insister, auprès du lecteur, pour qu'il se pénètre bien de ces principes fondamentaux, dont nous aurons à faire un usage constant.

§ 22.

Multiplication des lignes.

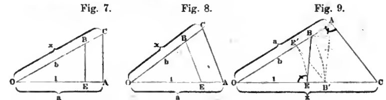
Les lignes dont on fait usage dans l'arithmétique graphique se mesurent au compas et à la règle divisée; elles peuvent exprimer par leur longueur, et suivant l'unité qu'on aura choisie, des mètres ou des millimètres, des litres, des vitesses, des monnaies, etc. Les opérations d'addition ou de soustraction s'effectuent donc graphiquement sur les lignes elles-mêmes, sans aucune

(1) Voir Culmann, Statique graphique, Zurich 1866. Cet ouvrage, d'une utilité incontestable, expose la théorie de la graphostatique et renferme un grand nombre de problèmes et d'applications tirées de l'art de l'Ingénieur. C'est à Culmann que revient l'honneur d'avoir, le premier, condensé, en corps de doctrine, l'ensemble des solutions de ce genre et introduit cet enseignement dans la pratique.

(2) Voir H. Eggers, principes d'une arithmétique graphique, Schaffouse 1865. — Schlesinger, sur les courbes des puissances, Zeitschrift des österr. Ing.-Vereins, 1866. — E. Stamm, sul calcolo grafico, comptes rendus de l'Institut Lombard, Fasc. VI.

difficulté, et l'on obtient des lignes qui représentent les sommes ou les différences d'un certain nombre d'autres. — Le problème paraît un peu plus complexe, quand il s'agit de multiplier, les unes par les autres, les lignes qui représentent des grandeurs. Mais, comme toute mesure revient à comparer une grandeur donnée avec l'unité, le problème de la multiplication graphique se réduit, en réalité, à trouver une ligne qui soit à la ligne prise comme unité dans le rapport donné par d'autres lignes, mesurées avec cette même unité; en d'autres termes, multiplier deux lignes a et b l'une par l'autre ou, plus exactement, multiplier une ligne de longueur a par une ligne de longueur b, revient à trouver une ligne x, qui contienne $a \times b$ fois l'unité avec laquelle on a mesuré les deux lignes (facteurs) données. Or, ce problème peut se résoudre simplement, et d'un grand nombre de manières, à l'aide des triangles semblables. Nous donnerons ici quelques-unes de ces solutions:

I. On porte en OE (fig. 7) la longueur prise comme unité de mesure; on élève en E une perpendiculaire, jusqu'à sa rencontre en B avec l'arc de cercle de rayon $OB = b$; sur la direction de OE on porte $OA = a$, on mène AC parallèle à EB et la longueur OC donne le produit cherché x. On a, en effet, $\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OE}$, ou $x = \frac{a \times b}{1}$. Cette solution suppose que l'un des facteurs (b) soit plus grand que l'unité.

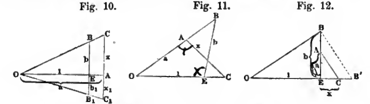


II. Fig. 8. En conservant le mode de construction précédent, on peut mener EB obliquement sur OA, ce qui permet d'exécuter le tracé dans le cas où les deux facteurs sont plus petits que l'unité.

III. On prend OE et AB (fig. 9), comme précédemment; sur OB on porte $OA = a$, on mène AC, de telle sorte que les angles OAC et OEB soient égaux; OC est alors le produit cherché x, attendu que les triangles OEB, OAC sont semblables. Pour ne pas avoir à construire l'angle en A, on prend

$OE' = OE$, $OB' = OB$ et on mène AC parallèle à $E'B'$. La construction se simplifie encore quand EB est perpendiculaire sur OE, ce qui exige que l'on ait $b > 1$.

IV. On prend OE (fig. 10) égal à l'unité; on porte, sur OE, l'un des facteurs, $OA = a$; par le point E, on mène, soit une perpendiculaire, soit une oblique, sur laquelle on prend $EB = b$ et, par le point A, on trace une parallèle à EB. Cette ligne rencontre en C le prolongement de OB et l'on a $AC = x$, en vertu de la relation $\frac{CA}{OA} = \frac{BE}{OE}$, ou $x = \frac{a \times b}{1}$, a et b pouvant d'ailleurs être plus petits ou plus grands que l'unité. — On peut prendre encore $EB_1 = b_1$, tracer OB_1, jusqu'à sa rencontre, en C_1, avec le prolongement de CA, $AC_1 = x_1$ sera alors le produit de a et de b_1, par suite CC_1 sera le produit de a par BB_1, et on aura $x + x_1 = a(b + b_1)$. Le facteur b peut donc être porté de l'un et de l'autre côté de la ligne d'unité OE sur la normale (ou l'oblique) BE, et le produit cherché, $ab = x$, se trouve alors mesuré par la longueur de la parallèle à b, comprise entre les lignes menées du point O aux extrémités de b.



V. On prend (fig. 11) $OE = 1$, $EB = b$, OB arbitraire, mais plus petit que $OE + EB$, et sur OB on porte $OA = a$; en A on fait un angle OAC égal à OEB; la longueur AC est le produit cherché x, car on a $\frac{CA}{OA} = \frac{BE}{OE}$ ou $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$, a et b étant d'ailleurs quelconques.

VI. On prend encore (fig. 12) $OE = 1$, on élève, en E, une perpendiculaire, sur laquelle on porte $EA = a$, $EB = b$, et on mène BB' perpendiculaire à OB. La ligne AC, parallèle à BB', détermine, sur le prolongement de OE, un point C tel que $EC = x$. On a, en effet, $\frac{EC}{EA} = \frac{BE}{OB'}$, ou $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$.

Il arrive souvent, dans les dessins, que les lignes à multiplier l'une par l'autre se trouvent occuper, sur le plan, une posi-

tion qui permet d'effectuer la multiplication, sans qu'il soit nécessaire de reporter les lignes dans une position plus commode. Nous allons donner quelques exemples des tracés qu'on peut adopter dans les cas de ce genre.

VII. Fig. 13. Les lignes $OA = a$, $BB' = b$ sont perpendiculaires ou obliques l'une sur l'autre, le point B' tombant entre O et A. On porte alors, sur OA, l'unité OE et on joint BE; en A on mène AC parallèle à BE et, par le point C, la ligne CC' parallèle à BB'; on a $CC' = x$, en vertu de la relation $\frac{CC'}{OA} = \frac{BB'}{OE}$ ou $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$.

VIII. Fig. 14. On donne, comme précédemment, $OA = a$ et $BB' = b$, ces deux lignes faisant un angle quelconque. A partir de O, et sur une parallèle à BB', on porte $OE = 1$, on joint EA et, par le point B, on mène BC parallèle à EA; $B'C$ est le produit cherché; car on a: $\frac{B'C}{BB'} = \frac{OA}{OE}$, ou $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$.

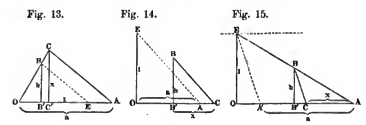


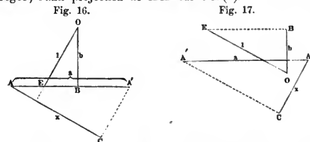
Fig. 13. Fig. 14. Fig. 15.

IX. Fig. 15. On donne $AA' = a$ et $BB' = b$, perpendiculaire sur AA'. On prolonge AB jusqu'à sa rencontre en E avec la parallèle à AA', menée à la distance $OE = 1$; en traçant EA' et sa parallèle BC, la longueur AC donne le produit x; on a effectivement $\frac{AC}{CB} = \frac{AA'}{A'E}$, d'où $\frac{AC}{BB'} = \frac{AA'}{OE}$ ou $\frac{x}{b} = \frac{a}{1}$.

X. Fig. 16. On donne $AA' = a$ et $BO = b$, perpendiculaire sur AA'; du point O comme centre, avec un rayon égal à l'unité, on décrit un arc de cercle, qui coupe AA' en E; on mène $A'C$ parallèle à OE et, du point A, on abaisse AC perpendiculaire sur $A'C$; la ligne AC est le produit cherché x. En effet, $\frac{AC}{AA'} = \frac{OB}{OE}$ ou $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$.

La ligne AA' a été ici projetée sur une perpendiculaire à OE. Une projection de cette nature s'appelle, d'une manière abrégée, l'anti-projection de AA' sur OE(1).

Fig. 16. Fig. 17.

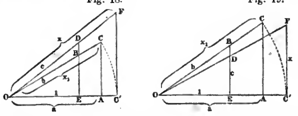


XI. Fig. 17. Lorsque les lignes données $AA' = a$ et $BO = b$ se coupent à angle droit, on mène par le point B une parallèle à AA'; du point O, avec un rayon $OE = 1$, on détermine le point E, on mène $A'C$ parallèle à EO et AC perpendiculaire à $A'C$, AC est le produit cherché x, car on a la relation $\frac{AC}{AA'} = \frac{OB}{OE}$ ou $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$.

Les méthodes de multiplication, que nous venons d'indiquer, et toutes celles que l'on pourrait imaginer, sont également applicables au cas où le nombre des facteurs est plus grand que 2; il suffit de répéter la même opération, pour chaque facteur, avec la ligne résultant du produit des facteurs précédents.

Supposons, par exemple, qu'on ait à trouver le produit $a \cdot b \cdot c$ de trois lignes. On commence par déterminer, à l'aide de la méthode (I), si l'on veut, le produit $x_1 = ab$, fig. 18;

Fig. 18. Fig. 19.



on rabat $OC = ab$ en OC' sur OA; à partir de O, on porte $OD = c$, et en C' on élève une perpendiculaire, qui rencontre cette ligne en F; OF représente le produit cherché, $x = abc$.

(1) Voir Culmann: Statique graphique.

Si l'on préfère suivre la méthode (IV), après avoir trouvé $OC' = ab$, on prend $ED = c$, fig. 19, on prolonge OD jusqu'à sa rencontre, en F, avec une perpendiculaire à OC', menée par le point C', et on a alors $C'F = x$, etc.

§ 23.

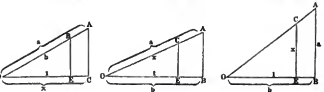
Division des lignes.

La division étant l'opération inverse de la multiplication, les méthodes qu'elle comporte se déduisent sans difficulté des précédentes. Diviser une ligne a par une ligne b revient à trouver une troisième ligne x, qui contienne $\frac{a}{b}$ fois l'unité commune de a et de b. Nous allons indiquer quelques-uns des procédés graphiques en usage pour les divisions.

I. Prenons, fig. 20, $OE = 1$; élevons, en E, une perpendiculaire ou une oblique, qui rencontre, en B, l'arc décrit avec $OB = b$ (diviseur), comme rayon, et prenons $OA = a$ (dividende). Si on mène, par le point A, une parallèle à BE, cette ligne détermine, sur OE, le quotient $OC = x$, en vertu de la relation $\frac{OC}{OE} = \frac{OA}{OB}$ ou $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$.

II. On prend $OE = 1$ (fig. 21); sur OE on porte $OB = b$, on élève en B une perpendiculaire, qu'on coupe avec un arc de cercle $OA = a$ (dividende). Si on mène une perpendiculaire à OB, par le point E, cette ligne détermine, sur OA, le quotient $OC = x$, car on a encore $\frac{OC}{OE} = \frac{OA}{OB}$ ou $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$.

Fig. 20. Fig. 21. Fig. 22.



III. On prend OB, fig. 22, égal au diviseur b et, sur cette ligne, on porte $OE = 1$. Perpendiculairement à OB, on prend AB égal au dividende a, on joint OA et, par le point E, on mène

une perpendiculaire à OE; on détermine ainsi le quotient $EC = x$, car on a $\frac{EC}{OE} = \frac{AB}{OB}$ ou $\frac{x}{1} = \frac{a}{b}$ (1).

§ 24.

Multiplication et division combinées.

Lorsqu'on a à multiplier un nombre a par une fraction $\frac{b}{c}$, l'opération comporte une multiplication $(a \times b)$, puis une division. Comme l'inconnue x, qui a pour expression $x = \frac{ab}{c}$, peut se mettre sous la forme $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$, on voit que les deux opérations peuvent se faire simultanément et se réduire à un tracé de multiplication, dans lequel, au lieu de l'unité OE, on introduit le dénominateur c. La ligne a se trouve alors multipliée par le rapport $\frac{b}{c}$, au lieu de l'être par $\frac{b}{1}$. Les exemples suivants suffiront pour indiquer la marche à suivre.

I. Pour multiplier une longueur a par la fraction $\frac{b}{c}$, on fait, fig. 23, $OA = a$ et, sur cette ligne, $OE = c$; on élève, en E, une perpendiculaire à OE, jusqu'à sa rencontre, en B, avec l'arc de cercle de rayon $OB = b$; par le point A on mène une

Fig. 23.

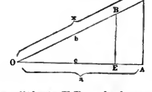
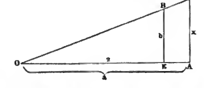


Fig. 24.



parallèle à EB et la longueur OC est le produit cherché, car on a $\frac{OC}{OB} = \frac{OA}{OE}$ ou $\frac{x}{b} = \frac{a}{c}$.

II. Si l'on veut obtenir le produit $\frac{ab}{2}$, on prend, fig. 24,

(1) Voir, pour plus de détails sur les règles de trois, la recherche des dénominateurs communs, etc., l'ouvrage déjà cité de Eggers.

$OA = a$, $OE = 2$ fois l'unité, $EB = b$ et on joint OB; la ligne AC est le produit cherché x, car $\frac{AC}{OA} = \frac{BE}{OE}$ ou $x = \frac{a \times b}{2}$.

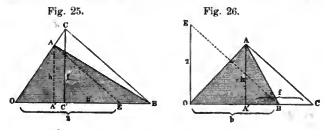
Le procédé que nous venons d'indiquer, et qui peut s'appliquer avec tous les modes de multiplication du § 22, est très commode, comme nous le verrons, pour le calcul des surfaces.

§ 25.

Surface du triangle.

La surface d'un triangle étant le demi-produit de sa base par sa hauteur, le calcul graphique de cette surface se fait aisément d'après le paragraphe précédent.

I. Fig. 25. Après avoir choisi, comme base du triangle à mesurer OAB, l'un des côtés $OB = b$, et sans d'ailleurs tracer la hauteur correspondante $AA' = h$, on porte, sur OB, la ligne

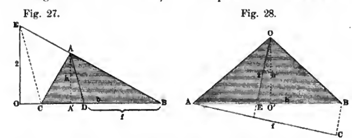


OE égale à 2 unités (centimètre, décimètre, etc.); on joint (ou on suppose joints) les points A et E et, par le point B, on mène une parallèle à EA jusqu'à sa rencontre, en C, avec la ligne OA prolongée. La perpendiculaire CC', abaissée du point C, est le produit $\frac{hb}{2}$, c'est-à-dire la surface f cherchée (voir VII § 22 et II § 24).

II. Fig. 26. A l'extrémité de la base $OB = b$, on porte, sur la perpendiculaire au point O, la longueur $OE = 2$ unités, on abaisse la hauteur $AA' = h$ et on mène, par le point A, une parallèle à EB; cette ligne détermine, sur OB, le segment $A'C$, qui représente le produit $f = \frac{bh}{2}$ (voir VIII § 22 et II § 24).

III. On prolonge la base BC et le côté BA du triangle ABC, fig. 27, jusqu'à ce que ces lignes comprennent entre elles une longueur $OE = 2$ unités, mesurée parallèlement à la hauteur

Fig. 27. Fig. 28.



$A'A = h$. On joint EC et on mène, par le point A, une parallèle à EC, qui détermine, sur la base, le segment BD; ce segment est le produit $f = \frac{bh}{2}$ (voir IX § 22 et II § 24).

IV. Du sommet O du triangle AOB, fig. 28, et avec une ouverture de compas $OE = 2$ unités, on décrit un arc de cercle qui coupe, en E, le côté AB; on fait l'anti-projection de AB sur OE, en menant BC parallèle à OE et AC perpendiculaire sur BC. La ligne AC est le produit de la base b par la moitié de la hauteur $h = OO'$, c'est-à-dire représente la surface du triangle (voir X § 22 et II § 24).

Si l'unité adoptée était le décimètre, la mesure de f en décimètres donnerait, en décimètres carrés, la surface du triangle; ainsi si $f = 72$ millim. l'unité étant le décimètre, la surface sera 0,72 decim. ou $0{,}72 \times 10000 = 7200$ millimètres carrés.

§ 26.

Surface des polygones à quatre côtés.

Dans ces polygones, la surface peut se déterminer directement (pour le parallélogramme, par exemple), ou bien par voie de décomposition en triangles, que l'on évalue séparément; on peut enfin transformer le polygone en un triangle de surface équivalente.

I. Mesure du parallélogramme $ABCO$, fig. 29. En choisissant le côté OA comme base, on prend $OE =$ l'unité, on élève la perpendiculaire $EE' = h$ et (comme au § 22, IV) on

trace OE' jusqu'à sa rencontre, en D, avec la perpendiculaire menée par le point A. La longueur AD donne la mesure de la surface, $f = bh$.

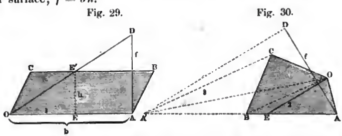


Fig. 29. Fig. 30.

II. Dans le polygone $ABCO$, fig. 30, si l'on mène la ligne CA', parallèle à la diagonale OB, jusqu'à sa rencontre avec la base AB, on obtient un triangle $A'OA$ ayant même surface que le polygone, car les deux triangles OBC et OBA' sont équivalents. Cela posé, on peut, en procédant suivant la méthode IV, § 25, prendre $OE = 2$, et la ligne AD, anti-projection de AA' sur OE, donnera la mesure de la surface cherchée f.

III. Fig. 31. La diagonale $AC = b$ partage la surface $ABCO$ en deux triangles ayant pour hauteur totale OO', c'est-à-dire l'anti-projection de OB sur AC. Or, la multiplication de OO' par $\frac{b}{2}$ peut s'effectuer immédiatement, d'après les méthodes XI, § 22 et II, § 24. On mène $O'BE$ parallèle à AC, on prend $OE = 2$, et on trace AD parallèle à OE; la ligne CD,

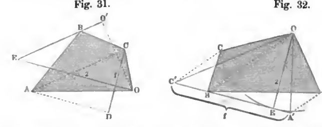


Fig. 31. Fig. 32.

normale à AD, est le produit cherché f, c'est-à-dire la surface du polygone.

IV. Fig. 32. Le polygone $ABCO$ peut se remplacer par un triangle dont la hauteur serait 2 et la base $\frac{bh}{2}$.

Si on décrit, du point O comme centre, un cercle avec le rayon $OE = 2$, si on mène à ce cercle une tangente passant par le sommet B opposé à O, si enfin, par les deux autres sommets A et C, on mène des parallèles à la diagonale OB, ces lignes déterminent, sur la tangente, un segment $A'C'$, qui n'est autre chose que la base du triangle $A'OC'$, équivalent au quadrilatère $ABCO$ et qui a pour valeur f, c'est-à-dire la surface même du polygone.

Les exemples que nous venons de citer suffisent pour indiquer comment, avec l'une ou l'autre de ces méthodes, on pourra résoudre un problème quelconque du même genre.

§ 27.

Surface des polygones quelconques.

Pour mesurer les polygones, on commence par les transformer en triangles équivalents, de la manière suivante:

Par l'un des sommets O du polygone $OABCDE$, fig. 33, on tire la diagonale OB, allant du point O au sommet le plus

Fig. 33.

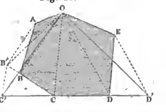
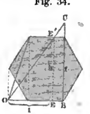


Fig. 34.



rapproché; par le sommet intermédiaire A, on mène la ligne AB', parallèle à OB, on prolonge le troisième côté CB jusqu'à sa rencontre, en B', avec la ligne AB' et on joint OB'; comme les deux triangles OBB', OBA sont équivalents, le polygone $OB'CDE$ a la même surface que le polygone primitif, mais avec un côté de moins. Si maintenant on répète les mêmes constructions pour le sommet C, en traçant OC, puis $B'C'$ parallèle à OC, et ainsi de suite, on finira par arriver à un dernier triangle, équivalent au polygone donné, et dont on sait mesurer la surface. Les lignes auxiliaires OB' etc. n'ont pas besoin d'être tracées. Cette méthode se prête spécialement à la mesure des profils pour remblais de chemins de fer ou de routes.

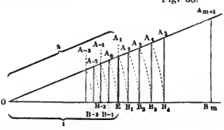
Les polygones réguliers, comme l'hexagone, fig. 34, n'ont besoin d'être transformés que pour l'une de leurs moitiés; ils se mesurent alors comme les parallélogrammes.

§ 28.

Puissances.

Elever une grandeur a à la n^e puissance, e'est chercher une grandeur x, qui contienne a^n fois l'unité de mesure de a. Si le nombre n est entier, qu'il soit d'ailleurs positif ou négatif, la méthode de calcul graphique se ramène immédiatement à la multiplication ou à la division graphique, puisqu'il s'agit de multiplier ou de diviser un certain nombre de fois par a. Du reste, le tracé peut s'exécuter d'un grand nombre de manières, suivant que l'on adopte l'un ou l'autre des différents types de tracés indiqués précédemment.

Fig. 35.

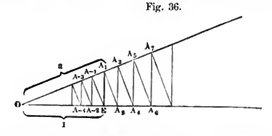


I. (Voir § 22, 1). On prend OE, fig. 35, égal à l'unité, et, sur la perpendiculaire en E, on détermine, par un arc de cercle de rayon $OA_1 = a$, le point A_1. Sur OE on porte également $OB_1 = a$, sur OB_1 on élève en B_1 une perpendiculaire, qui coupe, en A_2, la ligne OA_1 prolongée; on a (I, § 22) $OA_2 = a^2$. En rabattant cette longueur en OB_2 et en menant la perpendiculaire B_2A_3, on obtient en OA_3 la valeur a^3, de même en OA_4 la valeur a^4, en OA_5 la valeur a^5, etc. D'une manière générale, OB_m correspondant à une puissance quelconque de a, la m^e, par exemple, la perpendiculaire élevée en B_m déterminera, sur OA_1, le segment OA_{m+1}, qui sera la puissance $m+1$ de a. Inversement, étant donnée une puissance quelconque de a, en OA_{m+1}, la projection OB_m de cette ligne sur OE représentera la valeur de a à une puissance moins élevée d'une unité que celle correspondant à OA_{m+1} (voir les règles de division I, § 23).

Il résulte encore de là que la perpendiculaire abaissée de A_1 déterminera le segment $OE = a^0$, ou l'unité, ce qui d'ailleurs est évident d'après les données mêmes du tracé. Si on rabat OE en OA_0, qu'on abaisse la perpendiculaire $A_0 B_{-1}$, OB_{-1} mesurera a^{-1} ou $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire la valeur réciproque de OA_1. En continuant de même, on obtiendra en OB_{-2} la valeur de $\frac{1}{a^2}$, en OB_{-3} celle de $\frac{1}{a^3}$, etc.

II. En combinant les règles de multiplication I et III, § 22, on obtient, pour les puissances, le tracé suivant. On prend encore, fig. 36, $OE = 1$, $OA_1 = a$, on élève la perpendiculaire EA_1 et, en A_1, une seconde perpendiculaire sur OA_1. Cette ligne

Fig. 36.

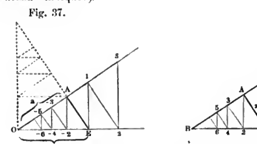


coupe OE en A_2 et l'on a $OA_2 = a^2$. En menant en A_2 la perpendiculaire $A_2 A_3$, on aura $OA_3 = a^3$. — Une nouvelle perpendiculaire sur OA_1 donnera, en OA_4, la valeur a^4, et ainsi de suite, les lignes mesurées sur OE donnant les puissances paires positives, et celles sur OA_1 les puissances impaires également positives. En marchant en arrière, à partir de E, on trouve en OA_{-1} la réciproque de a ou $\frac{1}{a}$, en OA_{-2} la valeur de $\frac{1}{a^2}$, etc., les lignes comptées sur OA_1 exprimant les puissances négatives impaires, et celles sur OE les puissances négatives paires.

Les deux méthodes qui précèdent supposent que l'on ait $a > 1$; les deux suivantes se rapportent, au contraire, au cas où l'on a $a < 1$.

III. Après avoir pris, fig. 37, $OE = 1$, on porte la longueur a en OA, de telle sorte que AE soit perpendiculaire sur OA; on trace alors les perpendiculaires successives $E1$, 12, 23, 34, etc., et l'on a: $O1 = \frac{1}{a}$, $O2 = \frac{1}{a^2}$, $O3 = \frac{1}{a^3}$.... En répétant les mêmes tracés sur la gauche de E, on obtient les valeurs

$O-2=a^2$, $O-3=a^3$, $O-4=a^4$.... Les puissances positives de a se trouvent donc mesurées sur la gauche, et les puissances négatives sur la droite (voir III, § 22 et la méthode II ci-dessus indiquée).



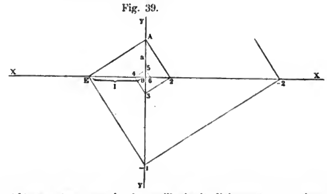
Les lignes de tracé, qui vont d'un axe à l'autre, en zigzag, croissent également suivant la même loi que les puissances et on peut les utiliser de la manière suivante.

IV. On prend, fig. 38, $OE=1$, $OA=a$ et l'angle $OAE=90^0$; on mène OB perpendiculaire sur OE et l'on prolonge EA, non seulement jusqu'à son intersection, en B, avec OB, mais encore dans l'autre sens (voir le tracé pointillé de la fig. 37). On trace ensuite, comme précédemment, dans les deux sens, la série des perpendiculaires successives, et on obtient les valeurs suivantes: $OA=a$, $A2=a^2$, $2\,3=a^3$, et ainsi de suite. D'autre part, on a: $OE=a^0$, $E-1=a^{-1}=\frac{1}{a}$, $-1-2=\frac{1}{a^2}$, $-2-3=\frac{1}{a^3}$, etc.

V. La méthode suivante peut s'appliquer à des valeurs quelconques de a, plus grandes ou plus petites que l'unité. On prend, sur l'axe XOX, fig. 39, $OE=1$, on élève en O une perpendiculaire YOY, sur laquelle on porte $OA=a$ et on trace (ou on suppose tracée) la ligne EA. Si alors on mène $A2$ normal sur EA, le segment $O2$, mesuré sur l'axe des X, donne la valeur de a^2. Si de même on trace $2\,3$ perpendiculaire sur $A2$, le segment $O3$, sur l'axe des Y, donne a^3; en continuant de même, on trouve, sur l'axe des X, la valeur de a^4 etc.; d'une manière générale, on obtient, sur l'axe des X, les puissances paires et, sur l'axe des Y, les puissances impaires de a. Si on reproduit en arrière ce même tracé, on diminue l'exposant d'une

unité, en passant d'un axe à l'autre. Ainsi, en allant de A vers E, on trouve en EO la valeur $a^0 = 1$, puis en $O-1$ la valeur $\frac{1}{a}$, de même pour $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, etc. (voir VI, § 22). Ce

Fig. 39.



procédé est très commode, lorsqu'il s'agit d'élever à une puissance quelconque certaines lignes figurées à l'avance sur un dessin.

§ 29.

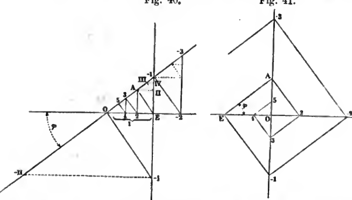
Puissances des fonctions trigonométriques.

Les méthodes que nous venons d'exposer, pour le calcul des puissances des lignes, s'appliquent, d'une façon aussi élégante que rapide, aux puissances des fonctions trigonométriques.

I. Puissances des cosinus et sinus. — On prend, fig. 40, $OE = 1$, on trace l'angle EOA égal à l'angle φ, dont les lignes trigonométriques doivent être élevées à certaines puissances et on abaisse EA perpendiculaire sur OA. Si maintenant on trace les perpendiculaires successives $A2$, 23, 34, etc., puis $E-1$, $-1-2$, etc., on a: $OA = \cos\varphi$, $O2 = \cos^2\varphi$, $O3 = \cos^3\varphi$, $O4 = \cos^4\varphi$, puis $O-1 = \frac{1}{\cos\varphi}$, $O-2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$, etc. Si, d'autre part, on trace les perpendiculaires successives AII, $II \cdot III$, $III \cdot IV \ldots$, $O-I$, $-I-II$, etc., on a: $AE = \sin\varphi$, $AII = \sin^2\varphi$, $II \cdot III = \sin^3\varphi$, $III \cdot IV = \sin^4\varphi \ldots$, $O-1 = \frac{1}{\sin\varphi}$, $-I-II = \frac{1}{\sin^2\varphi}$, etc.

II. Puissances des tangentes et cotangentes. On prend, fig. 41, $EO = 1$ et $OEA = \varphi$. Puis, à partir du point A, et dans les deux sens, on trace les perpendiculaires successives,

Fig. 40. Fig. 41.



comme dans le cas N°. V, § 28; on obtient alors les valeurs suivantes: $OA = tang\,\varphi$, $O2 = tang^2\varphi$, $O3 = tang^3\varphi \ldots$, $OE = 1 = tang^0\varphi$, $O - 1 = cotang\,\varphi$, $O - 2 = cotang^2\varphi$, etc.

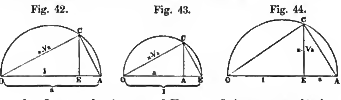
Le dessin rend d'ailleurs parfaitement sensible à l'œil la loi de convergence ou de divergence de la série, formée par les puissances successives.

§ 30.

Extraction des racines.

L'extraction d'une racine carrée s'effectue aisément par les procédés graphiques et de différentes manières, en considérant $\sqrt{a}$ comme moyenne proportionelle entre a et l'unité. Nous indiquerons ici trois des méthodes qu'on peut suivre.

Fig. 42. Fig. 43. Fig. 44.



I. On prend, fig. 42, $OE = 1$, $OA = a$; on décrit un demi-cercle sur OA et on élève en E une perpendiculaire, qui rencontre la circonférence en C; on joint OC et cette ligne donne

la valeur cherchée $x = \sqrt{a}$ (voir § 28). Cette méthode suppose que l'on ait $a > 1$, tandis que la suivante s'applique au cas où l'on a $a < 1$.

II. On prend, fig. 43, $OE = 1$, $OA = a$; on décrit un demi-cercle sur OE, on élève la perpendiculaire en A et on joint au point O son intersection avec la circonférence, ce qui donne $OC = x = \sqrt{a}$.

III. On prend, fig. 44, $OE = 1$ et, sur le prolongement de OE, $EA = a$; sur OA on décrit une demi-circonférence, qui rencontre au point C la perpendiculaire élevée par le point E; EC est la valeur cherchée $x = \sqrt{a}$.

L'extraction de la racine quatrième peut s'effectuer à l'aide de deux extractions successives de racine carrée et on peut opérer de la même manière pour toutes les racines qui ont, comme indice, une puissance de 2. — L'extraction des racines cubiques, cinquièmes, etc... est plus compliquée. Culmann, dans son ouvrage déjà cité, se sert de la spirale logarithmique; Schlesinger (voir plus haut) utilise une série de courbes, tracées d'après des principes analogues à ceux du § 28. — Les mêmes ouvrages indiquent de plus une série d'autres méthodes, plus ou moins complexes. Pour notre part, nous n'insisterons pas sur ce sujet, attendu que, dans les problèmes que nous nous proposons de résoudre, nous n'aurons à faire aucune application de ces méthodes d'extraction de racines de degré supérieur.

§ 31.

Addition et soustraction des forces.

Dans les opérations de calcul graphique que nous avons examinées jusqu'ici, nous n'avons tenu compte que de la grandeur absolue ou de la mesure des lignes, sans nous préoccuper de la direction de ces lignes, dans un plan ou dans l'espace, et des points par lesquels elles pouvaient passer; en d'autres termes, nous n'avons, tenu compte, en rien, ni de la position, ni de la direction de ces lignes; or ces derniers éléments interviennent nécessairement, lorsqu'on a à étudier l'équilibre des forces. Nous avons donc à considérer, à ce point de vue, un ordre de problèmes nouveaux, qui constitue la *graphostatique.*

Lorsque plusieurs forces sont appliquées à un point matériel, leur résultante se détermine en additionnant les projections des lignes, qui représentent ces forces, sur des axes de coordonnées rectangulaires. Géométriquement, on peut porter ces forces (qu'elles soient ou non dans un même plan) bout à bout, en conservant leurs grandeurs et leurs directions, et construire ainsi un polygone, qu'un point, en suivant les directions des flèches, pourra parcourir complètement, sans passer deux fois sur un même côté. Si les forces telles que 1, 2, 3 .... 6, fig. 45, sont en équilibre autour du point O, la somme de leurs projections est nulle et les lignes, de 1 à 6, qui représentent ces forces, donnent un polygone fermé, fig. 46, qui porte le nom de polygone des forces.

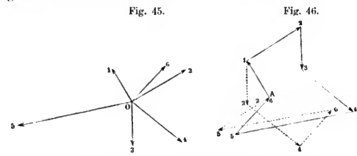


Fig. 45. Fig. 46.

L'ordre suivant lequel on porte les forces, pour tracer le polygone, est d'ailleurs indifférent. Ainsi, dans la fig. 46, par exemple, on peut suivre le tracé 1, 2, 3, 4, 5, 6, ou 1, 3, 4, 6, 5, 2, sans modifier le résultat.

La soustraction des forces est le problème inverse de l'addition. On n'a, par suite, qu'à changer la direction de la force qu'il s'agit de retrancher et à ajouter ensuite aux autres la force ainsi changée de signe. La graphostatique ne se prête commodément qu'aux cas où le polygone des forces est contenu dans un plan; mais les autres cas peuvent toujours se ramener à celui-là par des décompositions convenables des forces.

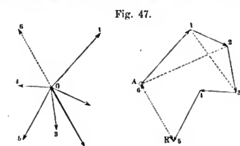
La multiplication ou la division des forces peuvent s'effectuer, par la graphostatique, à l'aide de méthodes analogues à celles que nous avons indiquées pour les opérations sur les lignes. Comme nous n'aurons pas à appliquer ces méthodes, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter plus longuement.

§ 32.

Résultante d'un système de forces.

Lorsqu'un système de forces, 1 à 5, par exemple, fig. 47, ne donne pas un polygone fermé, ces forces ne se font pas équilibre en leur point d'application commun *O*. Pour produire l'équilibre, il faut appliquer à ce point *O* une nouvelle force 6, qui se trouve déterminée, en grandeur et en direction, par

Fig. 47.



la ligne 5 6 qui ferme le polygone. Cette force, faisant équilibre aux forces données, est égale et de sens contraire à leur résultante *R*. Il suit de là que, dans un polygone de forces fermé, chacune des forces, prise en sens contraire, représente la résultante de toutes les autres. Dans un polygone de forces qui ne se ferme pas de lui même, la ligne qui ferme ce polygone, prise en sens contraire du mouvement, représente la résultante des forces. Ainsi, dans la fig. 47, *A*2 est à la fois la résultante de 1 et 2 et de 3, 4, 5 et 6. De même, 1 3 est la résultante de 2 et 3, comme de 4, 5, 6 et 1, etc. (1).

§ 33.

Forces agissant sur un système matériel dans un plan. — Polygone funiculaire.

Lorsque des forces, appliquées à un corps solide, se font équilibre et qu'elles ne se rencontrent pas toutes en un même

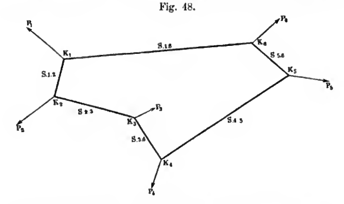
(1) Les propriétés que nous venons d'énoncer, au sujet des forces, sont également vraies pour toutes les grandeurs dans lesquelles on a à tenir compte

point (ce qui arrive fréquemment, puisque n forces peuvent avoir $\frac{n(n-1)}{2}$ points d'intersection), le mode précédent de représentation n'est plus immédiatement applicable. Toutefois, on peut toujours ramener aux problèmes simples les cas les plus compliqués. A cet effet, en supposant d'abord que toutes les forces agissent dans un même plan, imaginons le corps remplacé par un système de tiges rigides, formant un polygone, dont les sommets soient situés sur les différentes lignes qui représentent ces forces; imaginons, de plus, que ces tiges, susceptibles de résister aux efforts de traction et de compression agissant suivant leurs axes, aient des directions et des positions telles que chacune des forces partielles données soit en équilibre avec les deux forces, dirigées suivant les côtés du polygone, qui concourent au même point qu'elle.

Le polygone, qu'on obtient ainsi, fig. 48, porte le nom de *polygone funiculaire* ou *articulé;* dans les voûtes il constitue ce qu'on appelle *la courbe des pressions*, les différents éléments de cette ligne se trouvant généralement, dans ce cas, soumis à des efforts de compression.

Les sommets K d'un polygone funiculaire sont les articulations. D'après ce que nous venons de dire, un polygone de

Fig. 48.



de la direction; c'est ainsi qu'elles s'appliquent aux vitesses réelles ou virtuelles, aux trajectoires passant par des points déterminés, aux lignes qui, dans une voûte, passent par les centres de gravité des voussoirs. Tous les problèmes relatifs à ces lignes peuvent se traiter, comme pour les forces, par des polygones.

ce genre peut servir à la détermination des forces inconnues agissant sur le corps qu'il représente, puisque, en chaque articulation, il y a équilibre entre la force extérieure et les deux tensions, dirigées suivant les côtés correspondants; ainsi, par exemple, si l'on considère l'articulation K_2, les tensions $S_{1 \cdot 2}$ et $S_{2 \cdot 3}$ ont pour résultante une force, égale en grandeur et en direction à la force P_2, mais agissant en sens contraire.

Les efforts de traction ou de compression, qui s'exercent suivant les côtés du polygone articulé, constituent ce qu'on peut appeler les *forces intérieures.*

Connaissant le polygone funiculaire, on peut appliquer les procédés graphiques précédents à la détermination des grandeurs des forces. Or, pour arriver au polygone funiculaire correspondant à un cas donné, nous avons à chercher d'abord les conditions d'équilibre

1°, des forces extérieures,

2°, des forces intérieures,

en supposant, comme nous l'avons fait, que, pour chaque articulation, les forces de la première série soient en équilibre avec les forces correspondantes de la seconde.

§ 34.

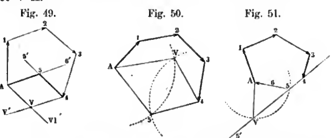
Equilibre des forces extérieures dans le polygone funiculaire.

Si l'on prend la résultante des forces P_1 et P_2, qu'on la transporte en un point convenable de sa direction pour la composer avec P_3, qu'on agisse de même avec cette nouvelle résultante et avec P_4, etc., il faut, dans le cas où l'équilibre existe, que la résultante obtenue avec l'avant-dernière force P_{n-1}, soit égale et de sens contraire à la dernière force P_n. Le procédé de composition, que nous venons d'indiquer, conduit d'ailleurs toujours au même résultat, tant que les directions et les grandeurs des forces restent invariables. On peut donc, sans troubler l'équilibre des forces extérieures, supposer nulles les distances entre les points d'insersection. Mais alors on peut effectuer leur composition et construire le polygone des forces, exactement comme dans le cas, examiné précédemment, où toutes les forces concouraient en un même point. Ce polygone peut donc

également servir à déterminer les conditions d'équilibre de forces agissant sur des points matériels distincts. Le polygone se ferme de lui-même, s'il y a équilibre; dans le cas contraire, il donne, en grandeur et en direction, la résultante totale et, par suite, la force qu'il convient d'introduire pour arriver à l'équilibre. Le tracé du polygone des forces permet donc de déterminer deux inconnues, la direction et la grandeur d'une force, ou encore les directions de deux forces, dont les grandeurs seraient connues; il est évident que le même tracé peut fournir la direction d'une force et la grandeur (absolue) d'une autre force, en supposant connues, la grandeur pour la première et la direction pour la seconde. — Dans ces différents cas, dont le dernier se présente assez rarement dans les applications, on peut arriver à la solution cherchée, à l'aide d'une des méthodes suivantes.

I. *Déterminer les grandeurs des deux forces, quand on connaît leurs directions.* Par les points 4 et A du polygone, fig. 49, on trace les deux directions données, $4\,5'$ et $A\,6'$, qui se rencontrent en 5; les longueurs $4\,5$ et $A\,5$ représentent les forces cherchées, 5 et 6. Si les directions peuvent être portées dans les deux sens, le problème est susceptible de deux solutions; la seconde est représentée, fig. 49, par les lignes $A\,VI'$ et $4\,V'$, qui donnent, pour les forces, $A\,V$ et $4\,V$.

II. *On connaît les grandeurs des deux forces, déterminer leurs directions.* Des points 4 et A, fig. 50, avec les grandeurs données des forces 5 et 6, on décrit des arcs de cercle, qui, en se coupant, déterminent les directions cherchées. Comme, en général, on aura ainsi deux points d'intersection, on voit que le problème comporte deux solutions, $4 \cdot 5$ avec $5 \cdot A$ et $4 \cdot V$ avec $V \cdot A$.



III. *On connaît la grandeur de l'une des forces et la direction de l'autre.* Par le point 4, fig. 51, on trace la direction

donnée 45′ et, du point A comme centre, avec un rayon égal à la grandeur de la force 6 qui est donnée, on décrit un arc de cercle, qui coupe généralement la première ligne en deux points 5 et V; il y a donc, dans ce cas encore, deux solutions. Si le cercle ne donnait aucun point d'intersection, on devrait en conclure que les données sont incompatibles.

Les exemples suivants feront comprendre comment, dans la pratique, peuvent s'appliquer ces principes.

1er Exemple. Une grue ABC est chargée en A d'un poids L; la partie B est cylindrique et engagée dans un support à galets; la partie C repose dans une crapaudine. Le corps de la grue a un poids G et son centre de gravité est en S. On propose de déterminer les forces P_1 et P_2 en B et en C. — On connaît les directions des forces L et G; elles sont verticales; la direction de P_1 est horizontale, à la condition de négliger les frottements qui s'exercent en B. Si maintenant on imagine que, par un procédé convenable (voir par ex. § 39), on ait déterminé la position TQ de la résultante $Q = G + L$ des forces G et L (1), le point d'intersection O de cette ligne avec l'horizontale P_1 doit appartenir à la direction de P_2. Cette force doit d'ailleurs passer également par le centre du pivot, en C, en admettant, comme nous l'avons fait ici, que la crapaudine enveloppe le pivot. La direction de la force P_2 est donc CO et nous pourrons, par suite, à l'aide du polygone des forces, fig. 53, déterminer les grandeurs de P_1 et de P_2. A cet effet, il

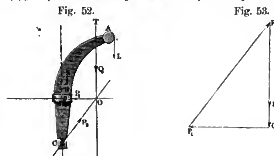


Fig. 52. Fig. 53.

suffit de porter, sur une verticale, en GP_2, la force $Q = G + L$, de mener GP_1 parallèle à OP_1 et P_2P_1 parallèle à CO, pour obtenir les forces P_1 et P_2. La décomposition de P_2 donne ensuite les deux forces, horizontale et verticale, auxquelles se trouve soumis le pivot C.

2e Exemple. Une grue, chargée comme précédemment, fig. 54, s'appuie en B sur un pivot cylindrique et est soutenue en C par un galet conique, roulant sur un tronc de cône. Les deux cônes ont leur sommet commun au milieu du tourillon B. On connaît, comme précédemment, la résultante

(1) *Dans les grues ordinaires de quais, G, qui varie d'ailleurs surtout avec la longueur de la portée BA, est compris entre $1/_5$ et $1/_4$ de la charge limite de la grue.*

$Q = L + G$, ainsi que la direction de la pression P_1, qui s'exerce en C, normalement à la surface du cône; on connaît, par suite, le point d'intersection O des forces P_1 et Q et ce point O doit appartenir à la direction de la réaction P_2 du tourillon. On peut donc construire immédiatement le polygone des forces, fig. 55, en menant une verticale égale à Q et des parallèles aux deux forces P_1 et P_2. La composante verticale de P_2 est ici plus petite

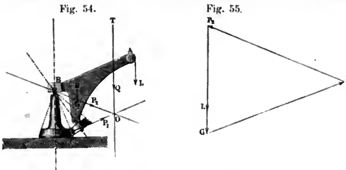


Fig. 54. Fig. 55.

que la charge Q, tandisque, dans le premier exemple, elle lui était égale. Cette différence tient à ce qu'ici le cône supporte une partie de la charge.

3° Exemple. Dans une grue du même genre, fig. 56, le sommet commun des deux cônes est en D, au-dessous du centre du tourillon B. On détermine encore le point O, en élevant CO perpendiculaire sur DC et on construit le polygone des forces, fig. 57. Par suite de l'hypothèse faite sur

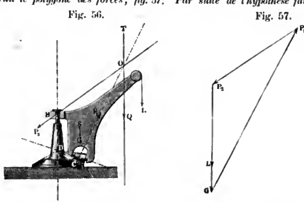


Fig. 56. Fig. 57.

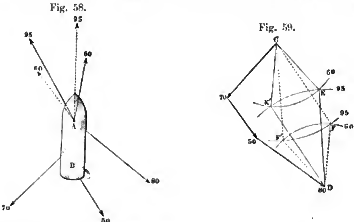
la position du point D, la force P_2, qui agit sur le tourillon, s'exerce obliquement et vers le bas, tandis qu'elle s'exerçait vers le haut dans le cas précédent. Le tourillon doit donc être muni en B, au-dessus de la portée, d'une bague ou saillie suffisamment résistante (1).

(1) Cette précaution est négligée dans un grand nombre de modèles de grues. L'auteur a eu occasion d'observer un cas où une grue de 30 tonnes se renversa sous une charge de

Si l'on veut, dans l'étude d'une grue, procéder avec plus de rigueur, on doit, comme l'indique Culmann, admettre que la direction de la résistance sur le support du galet (C dans la fig. 54, B dans la fig. 52) est variable dans les limites de l'angle de frottement et prendre la solution qui conduit à la charge la plus forte sur le tourillon.

4e Exemple. Trois forces de 70, 50 et 80k agissent dans un plan, et sous les angles qu'indique la fig. 58, sur un corps AB, de telle sorte que leur résultante passe par le point A. En ce point A agissent deux autres forces, l'une de 95, l'autre de 60k, qui doivent faire équilibre aux précédentes; quels angles doivent-elles faire avec les premières forces?

Après avoir reporté de C à D, fig. 59, les forces 70, 50 et 80k, on décrit, des points C et D, deux arcs de cercle avec les rayons 60 et 95; on



obtient ainsi les points d'intersection E et E' ou F et F', ce qui donne, pour les directions des forces, DE et EC (correspondant à F'C et DF') ou DF et FC (correspondant à E'C et DE'). Les deux solutions sont indiquées sur la fig. 58.

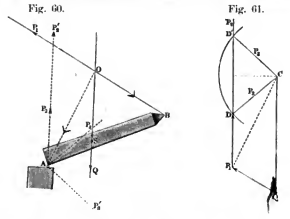
5e Exemple. Un obélisque doit être dressé sur son socle, par rotation autour d'une des arêtes A de sa base, fig. 60, la force motrice P_1 étant appliquée à l'extrémité supérieure dans une direction donnée. Suivant quelle direction doit-on faire agir, en A, une force d'intensité déterminée, pour que le socle ne soit soumis qu'à une pression verticale?

On prolonge la ligne, qui passe par le centre de gravité S de l'obélisque et qui figure le poids Q à élever, jusqu'à son intersection, en O, avec la force P_1; il faut d'abord, pour l'équilibre, que OA soit la direction de la résultante des forces Q et P_1. On décompose ensuite cette résultante en deux forces, l'une P_2, dirigée verticalement, l'autre P_3, de grandeur donnée. Après avoir porté Q et P_1, fig. 61, dans le tracé CQP_1, on mène, par le point P_1, une verticale P_1P_2, et du point C, avec une ouverture de compas égale

20000 kilogr., par ce que le coussinet finit par sortir du tourillon qui n'avait été disposé que pour faire office de support.

à P_3, on décrit un cercle qui, si le rayon est suffisant, coupe $P_1 P_2$ en deux points D et D'. Le problème comporte donc deux solutions, suivant qu'on

Fig. 60. Fig. 61.



prend pour P_2 la grandeur $P_1 D$ et pour P_3 la direction DC, ou qu'on fait $P_2 = P_1 D'$, P_3 recevant alors la direction $D'C$. Il faut d'ailleurs, pour que le problème soit possible, que P_3 soit au moins égal à la perpendiculaire abaissée de C sur $P_1 P_2$. On a reporté, sur la fig. 60, les deux solutions trouvées, en AP_3 et AP'_3. — Les problèmes analogues à celui de ce dernier exemple se rencontrent d'ailleurs assez rarement dans la pratique, comme nous l'avons déjà fait remarquer.

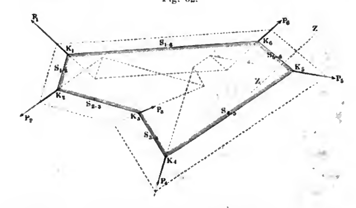
§ 35.

Equilibre des forces intérieures dans le polygone funiculaire.

Sous ce nom de forces intérieures nous désignons, comme nous l'avons dit précédemment, les forces qui agissent, par traction ou par compression, suivant les directions mêmes des différents côtés du polygone funiculaire et qui sont représentées, dans la fig. 62, par $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}$, etc. Les grandeurs de ces forces doivent d'ailleurs satisfaire à cette condition que, pour chacune des articulations K_1, K_2, K_3, etc., il y ait équilibre entre les deux forces intérieures qui y aboutissent et la force extérieure correspondante. Par conséquent, deux de ces forces $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}$, par exemple, peuvent être déterminées au moyen de leur résultante P_2, si l'on connaît leurs directions, ou leurs intensités, ou encore la direction de l'une et l'intensité de l'autre. A cet effet,

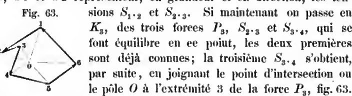
dans le polygone des forces P_1, P_2, P_3 .... qui, d'après ce qui précède, doit être une figure fermée, portons, à partir des

Fig. 62.



extrémités 1 et 2 de P_2, fig. 63, les directions des forces $S_{1\cdot2}$, $S_{2\cdot3}$, relevées sur la fig. 62. Ces deux lignes se coupant en O, $O1$ et $O2$ représentent, en grandeur et en direction, les tensions $S_{1\cdot2}$ et $S_{2\cdot3}$. Si maintenant on passe en K_3, des trois forces P_3, $S_{2\cdot3}$ et $S_{3\cdot4}$, qui se font équilibre en ce point, les deux premières sont déjà connues; la troisième $S_{3\cdot4}$ s'obtient, par suite, en joignant le point d'intersection ou le pôle O à l'extrémité 3 de la force P_3, fig. 63.

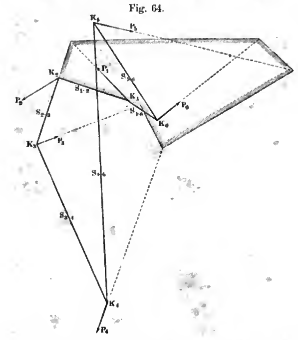
Fig. 63.



En continuant ainsi, les lignes, menées du pôle aux sommets du polygone des forces, donneront successivement, en grandeur et en direction, les forces intérieures du polygone funiculaire. On voit par là que, pour des forces extérieures données, la connaissance des directions de deux forces intérieures, aboutissant à un même sommet, suffit pour déterminer toutes les autres. Connaissant ainsi les forces intérieures, on pourra tracer immédiatement le polygone funiculaire ou articulé. Pour cela, en partant d'un sommet quelconque, on tracera les côtés du polygone funiculaire, parallèlement aux différents rayons polaires du polygone des forces. Quant à la longueur des côtés, elle se trouvera déterminée par les positions que doivent occuper, dans le plan, les lignes qui représentent, en grandeur et en direction, les forces extérieures. Dans ce cas, le polygone funiculaire fournit également la position de chacune des forces intérieures.

Le polygone funiculaire affecte des formes différentes suivant la position du point, choisi comme origine, sur la direction d'une des forces extérieures. Ainsi la figure 62 donne, en pointillé, deux autres formes de polygones funiculaires, équivalents

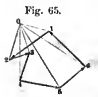
Fig. 64.



à celui qui est en traits pleins. Les côtés de ces nouveaux polygones sont respectivement parallèles à ceux du premier. Du reste, le problème, que nous nous sommes posé (relier les forces extérieures par un polygone articulé), comporte une seconde solution, en vertu de la remarque faite au § 34, problème I.

Si l'on porte, fig. 65, les directions $S_{1\cdot 2}$ et $S_{2\cdot 3}$, en sens inverse, à partir des extrémités de P_2, on obtient un nouveau polygone funiculaire, fig. 64, dont la forme diffère essentiellement de la précédente, comme l'indique d'ailleurs la figure, où l'on a reproduit le premier polygone à côté du second. A l'exception de celles des deux premiers côtés, qui restent les mêmes dans les deux polygones, les directions de tous les autres sont essentiel-

Fig. 65.



lement différentes. On voit par là que, pour des forces données, il est possible de construire le polygone articulé d'une infinité de manières.

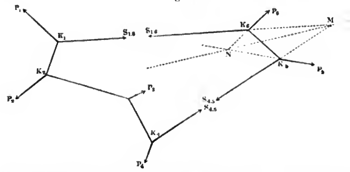
Le polygone funiculaire, combiné avec le polygone des forces, constitue ce que l'on a nommé le plan graphique des forces. Dans certains cas, du reste, une seule des deux figures suffit pour donner la solution du problème que l'on a en vue (voir § 48).

§ 36.

Résultante d'un système de forces, disposées d'une façon quelconque dans un plan.

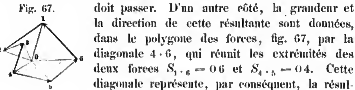
Si, dans un polygone funiculaire, fig. 66, on imagine deux des côtés coupés, $K_1 K_6$ et $K_4 K_5$, par exemple, et si l'on suppose appliquées aux points de section, et dans les deux sens, des forces de même grandeur que celles qui agissaient suivant ces côtés, l'équilibre ne se trouve pas détruit. Mais on voit

Fig. 66.



alors immédiatement que la résultante des forces $S_{1 \cdot 6}$ et $S_{4 \cdot 5}$, devenues maintenant forces extérieures, fait équilibre aux forces qui agissent sur le polygone, soit à droite, soit à gauche. La position de cette résultante s'obtient, en prolongeant les côtés jusqu'à leur intersection M, qui fournit un point par lequel elle doit passer. D'un autre côté, la grandeur et la direction de cette résultante sont données, dans le polygone des forces, fig. 67, par la diagonale 4 · 6, qui réunit les extrémités des deux forces $S_{1 \cdot 6} = 0\,6$ et $S_{4 \cdot 5} = 0\,4$. Cette diagonale représente, par conséquent, la résul-

Fig. 67.



tante des deux groupes de forces, qui comprennent, le premier P_5 et P_6, le second P_1, P_2, P_3 et P_4. D'une manière générale, le point d'intersection, obtenu en prolongeant deux des côtés du polygone, appartient à la résultante de toutes les forces extérieures appliquées entre ces côtés; la grandeur et la direction de cette résultante sont données par le polygone des forces. Ce théorème est d'une application fréquente, comme nous le verrons plus loin. Si on renverse son énoncé, on en déduit le moyen de décomposer les forces, connaissant le polygone des forces et le polygone funiculaire. Ainsi, pour décomposer, par exemple, la force $4 \cdot 6$ en deux autres, P_5 et P_6, de directions données, on trace ces dernières dans le polygone des forces; dans le polygone funiculaire, on mène une parallèle à l'une d'elles, P_6 par exemple; cette ligne coupe la résultante $4 \cdot 6$ en un point N, par lequel il suffit de mener P_5, parallèlement au côté $4 \cdot 5$ du polygone des forces. La position $K_6 N$ choisie ici n'a rien d'absolu; on peut la faire glisser, parallèlement à elle même, sur MN, soit en avant, soit en arrière, sans modifier les conditions de l'équilibre.

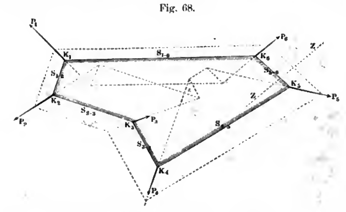
§ 37.

Conditions d'équilibre de forces, disposées d'une façon quelconque dans un plan.

Dans les considérations précédentes, nous avons admis que les forces, dont nous voulions étudier l'équilibre, étaient disposées de telle sorte que cet équilibre existât réellement; on pourrait donc déjà, d'après la règle du paragraphe précédent, les ramener à deux forces égales et directement opposées; mais, pour qu'il en soit ainsi, il ne suffit pas toujours que le polygone des forces soit une figure fermée; il faut, en même temps, que le polygone funiculaire ou articulé soit lui-même fermé; en d'autres termes, la position des forces doit satisfaire à certaines conditions. Si la disposition des forces n'est pas convenable, le polygone funiculaire indique celle qu'on doit adopter, pour que l'équilibre puisse se produire et que le corps ne reste pas soumis, en dernière analyse, à l'action d'un couple (voir § 38). Il faut, pour assurer ce résultat, que la position d'une des forces reste arbitraire.

I. Soit P_6, fig. 68, cette force, dont on connaît la grandeur et qui doit être parallèle à la direction ZZ. Après avoir tracé

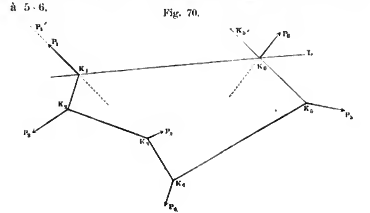
Fig. 68.



le polygone des forces, fig. 69, choisi un pôle O et tracé les rayons, allant de ce pôle aux divers sommets, de 1 à 6, on commence la construction du polygone funiculaire, en menant $K_1 K_2$, $K_2 K_3$, $K_3 K_4$ .... respectivement parallèles à $1O$, $2O$, $3O$ .... jusqu'à ce qu'on soit arrivé à $K_5 K_6$. La ligne, fermant le polygone funiculaire, doit être parallèle à $6O$, en même temps qu'elle doit passer par K_1. Sa position est donc déterminée et son intersection K_6 avec $K_5 K_6$ est un point de la force P_6, qui est d'ailleurs parallèle à $5 \cdot 6$.

Fig. 69.

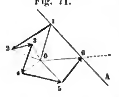
Fig. 70.



Si la dernière force P_6 n'est déterminée, ni en direction, ni en grandeur et si, de plus, pour une des autres forces, on ne connaît que la direction et la position, on peut déterminer les éléments inconnus de la manière suivante.

II. Soit P_6, fig. 70, la force complètement inconnue et soit P_1 la force dont on connaît seulement la direction $K_1 P'_1$ et un point K_1. — Nous pouvons tracer le polygone des forces, fig. 71, entre les points 1 et 5, en nous bornant à figurer la direction $A\,1$ de la force 1. On peut également tracer le polygone funiculaire, à partir de K_1, au moyen des points K_2, K_3, K_4, K_5 et K'_5. Si maintenant on choisit une direction telle que $K_1\,L$, par exemple, pour la ligne de fermeture, l'intersection de cette ligne avec $K_5\,K'_5$ devra appartenir à la force cherchée P_6. Pour déterminer la grandeur et la direction de cette force, traçons, fig. 71, $O\,6$ parallèle à $K_1\,L$, et joignons les points 5 et 6, la ligne $5 \cdot 6$ donne la grandeur, le sens et la direction de la force P_6, tandis que $6 \cdot 1$ fournit la grandeur, jusque-là indéterminée, de la force P_1.

Fig. 71.



§ 38.

Couples.

Si une figure plane est uniquement soumise à l'action de couples dirigés dans son plan, c'est-à-dire à l'action d'un système de forces, égales et parallèles deux à deux, mais de sens contraire, le polygone des forces se fermera toujours, sans qu'il en résulte nécessairement que l'équilibre existe. Pour ce cas des couples, les conditions de l'équilibre peuvent s'établir de la manière suivante:

Les forces $P_1\,P_3$ et $P_2\,P_4$, fig. 72, forment un polygone fermé 1, 2, 3, 4, fig. 73, mais elles ne se font pas équilibre; elles tendent à faire tourner la figure, autour d'un de ses points, avec un moment statique égal à la somme des moments des couples $(P_1 - P_3)$ et $(P_2 - P_4)$. Pour rétablir l'équilibre, il faut introduire un couple, de sens opposé, $(P_5 - P_6)$, dont le moment

soit égal à la somme des deux autres et dont les composantes soient dirigées suivant les lignes parallèles $V\,V$ et $VI\,VI$.

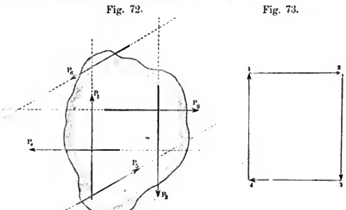
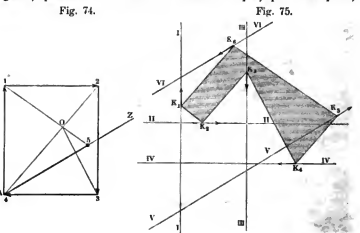


Fig. 72. Fig. 73.

Traçons maintenant, à partir du point A, fig. 74, le polygone des forces $A\,1$, 2, 3, 4 avec les couples donnés; ce polygone doit être complété par l'adjonction des forces 5 et 6; si l'on fait partir l'une de ces forces du point A, l'autre doit revenir passer par le même point et, de plus, recouvrir exactement la première. Il suit de là d'abord, comme nous l'avons, du reste, admis précédemment, que ces deux forces doivent être égales, parallèles et de sens contraires et que, par conséquent,

Fig. 74. Fig. 75.



il n'y a qu'un couple qui soit capable d'équilibrer les couples donnés, du moment où, pour produire l'équilibre, on ne veut introduire dans le système que deux forces nouvelles. La grandeur des composantes du couple additionnel n'est pas connue, mais il n'en est pas de même de leur direction, que nous pouvons porter suivant AZ. Si nous choisissons, de plus, un pôle arbitraire O, nous pourrons mener les rayons OA, $O1$, $O2$, $O3$, $O4$ $(= OA)$ et procéder, par suite, au tracé du polygone funiculaire, fig. 75.

A cet effet, remarquons que la fig. 72 nous donne les directions II, $II\,II$, etc., jusqu'à $VI\,VI$. Par un point quelconque K_1, pris sur II, menons des parallèles aux rayons OA et $O1$, (qui ont pour résultante la force P_1), jusqu'à leur intersection, en K_6, avec $VI\,VI$ et, en K_2, avec $II\,II$. Traçons ensuite $K_2\,K_3$ parallèle à $2\,O$, $K_3\,K_4$ parallèle à $O3$, enfin $K_4\,K_5$ parallèle à $O4$, qui coupent les lignes $III\,III$, $IV\,IV$ et $V\,V$, respectivement en K_3, K_4 et K_5. — Il ne reste plus alors à tracer que la ligne de fermeture du polygone funiculaire et il suffit, pour cela, de joindre le point K_5 au point K_6, obtenu précédemment. Le tracé de cette ligne permet de mener le rayon polaire $O5$, qui doit lui être parallèle (v. § 37, II), et de fermer, par suite, le polygone des forces. La force P_5 se trouve alors représentée, en grandeur et en direction, par la ligne $4 \cdot 5$ $(= A5)$ et la force P_6 par la ligne $5\,A$. Quant au polygone lui même, il est donné par le tracé $A\,1$, 2, 3, 4, $5\,A$, dans lequel les deux côtés 4, 5 et $5\,A$ doivent être considérés comme formant un angle infiniment petit au sommet 5.

Les problèmes traités jusqu'ici, sur le polygone des forces et le polygone funiculaire, montrent comment, pour les forces agissant dans un plan, l'addition et la soustraction géométriques permettent de déterminer les conditions d'équilibre de forces divergentes quelconques. Si les forces agissent dans des plans différents, qui se coupent ou qui sont parallèles, les règles données permettent d'établir séparément l'équilibre, pour chaque plan, et les résultats qu'on obtient ainsi peuvent souvent se simplifier, comme on en verra des exemples plus loin. — Pour le moment, nous cesserons de nous occuper des principes généraux, pour aborder de suite l'application du calcul graphique aux forces parallèles.

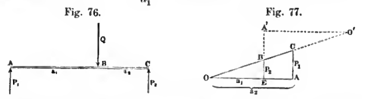
§ 39.

Équilibre de trois forces parallèles.

Pour déterminer l'équilibre des forces parallèles, on peut faire usage, soit de la méthode purement arithmographique, soit des procédés d'addition et de soustraction géométriques (polygone des forces et polygone funiculaire); il est évident qu'on doit choisir, dans chaque cas, le procédé le plus commode. Nous examinerons d'abord le cas très-simple, où une force Q, agissant sur un corps, doit être tenue en équilibre par deux forces P_1 et P_2, qui lui sont parallèles.

Si nous traçons d'abord une droite ABC, normale aux forces, fig. 76, l'équilibre exige qu'on ait: $P_1 \times AB = P_2 \times BC$ ou $P_1 a_1 = P_2 a_2$ et, en outre, $P_1 + P_2 = Q$. Pour représenter graphiquement $P_1 = P_2 \frac{a_2}{a_1}$, nous pouvons nous servir du pro-

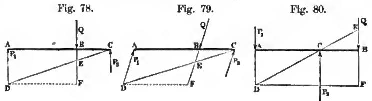
Fig. 76. Fig. 77.



cédé du § 24 (fig. 24), en prenant, fig. 77, $OE = a_1$, $OA = a_2$, $EB = P_2$ (supposé connu); la ligne AC, parallèle à EB, donne la force P_1; mais le triangle CAO peut aussi se placer dans la position pointillée $O'BA'$ et on a alors évidemment: $A'E = P_1 + P_2 = Q$. Sous cette dernière forme, la tracé de la fig. 77 peut se reporter, sans difficulté, sur la fig. 76 et on se trouve ainsi conduit au tracé suivant.

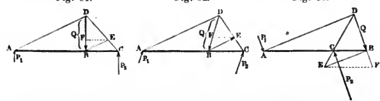
I. A l'un des points d'application des forces P_1 et P_2, A par exemple, on porte la force Q suivant AD, on joint le point D au troisième point d'application C et on prolonge la force Q jusqu'à son intersection, en F, avec DF, parallèle à AC. On a

Fig. 78. Fig. 79. Fig. 80.



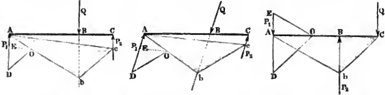
alors, d'après ce qui précède, $BE = P_1$, $EF = P_2$. La fig. 79 représente le même tracé pour le cas où la ligne ABC est inclinée par rapport à la direction de la force Q. — Dans la fig. 80, le point d'application B de cette force Q est supposé en dehors de AC.

II. On peut décomposer la force Q en deux composantes passant par les points d'application A et C, fig. 81 à 83; on



obtient ainsi deux forces obliques, dont les composantes, parallèles à Q, sont les forces d'équilibre cherchées, tandis que les composantes parallèles à ABC se détruisent. — Dans les trois figures, on a $BF = P_1$, $FD = P_2$.

III. Si on construit le polygone des forces avec $AD = Q$ et un pôle quelconque O, fig. 84 à 86, et si on trace les côtés du polygone funiculaire, Ab et bc, respectivement parallèles à AO et DO, en menant la ligne de fermeture cA et sa parallèle OE, dans le polygone des forces, on obtient $EA = P_1$, $DE = P_2$. Le polygone funiculaire se réduit ici à un triangle. Si on veut que la ligne de fermeture coïncide avec ABC ou lui soit parallèle, on commence par tracer le polygone funiculaire AbC; CA est alors la ligne de fermeture, Ab le premier rayon de ce polygone, pour la force $AD = Q$, et Cb le second; le pôle O



doit donc se trouver au point d'intersection de AB avec la ligne DO, parallèle à Cb; en menant ensuite OE parallèle à bA, on obtient $EA = P_1$ et $DE = P_2$.

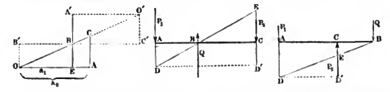
Dans les différents cas que nous venons de traiter, la force Q est égale et de sens contraire à la résultante des forces P_1

et P_2. Si donc on connaissait les forces P_1 et P_2, et qu'on voulût avoir la force Q, il suffirait de recourir à des méthodes analogues aux précédentes.

En construisant d'abord la figure auxiliaire $OEACB$, fig. 87, que nous avons déjà utilisée (I), et en reportant encore le triangle CAO en $BA'O'$, si on mène $B'C'$ parallèle à OA, $O'C'$ et OB' parallèles à $A'B$, on a $B'B = a_1$, $BC' = a_2$, $B'O = P_2$, $O'C' = P_1$; ce qui conduit au procédé suivant:

IV. Sur des perpendiculaires à AC, fig. 88, on prend des longueurs $AD = P_2$ et $EC = P_1$; on joint DE, qui détermine,

Fig. 87. Fig. 88. Fig. 89.

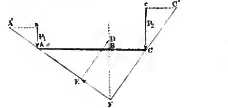


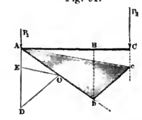
en B, le point d'application de la force Q, dont la grandeur est $ED' = P_1 + P_2$, DD' étant parallèle à AC.

Dans la fig. 89, les forces P_1 et P_2 ont été supposées dirigées en sens contraires; leur somme algébrique $D'E$ est donc la différence des grandeurs absolues de P_1 et de P_2. La force Q tombe, dans ce cas, en dehors de AC.

V. Du tracé (II) on peut déduire le procédé suivant: par l'extrémité a de la longueur $Aa = P_1$, fig. 90, on mène à AC une parallèle, sur laquelle on prend une longueur arbitraire aA', qu'on porte, en sens inverse, en cC', sur une seconde parallèle à AC, menée par l'extrémité c de la ligne $Cc = P_2$. Les lignes $A'A$ et $C'C$ se coupent en un point F, qui appartient à la direction FB de la force résultante Q. Cette dernière, qui a pour valeur $P_1 + P_2$, peut-être considérée, en même temps, comme la résultante de $DE = C'C$ et de $EF = A'A$.


Fig. 90. Fig. 91.





VI. La fig. 91 fournit une méthode qui résulte du tracé (III). On porte, en EA, la valeur de P_1, en ED, celle de P_2, on prend un pôle arbitraire O, et on mène la ligne de fermeture OE du polygone des forces. En traçant Ac, cb et Ab, respectivement parallèles à EO, OD et AO, le point d'intersection b appartient à la direction de la force résultante $Q = DA$.

§ 40.

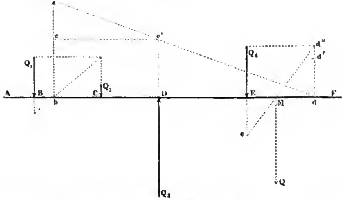
Résultante d'un nombre quelconque de forces parallèles.

Si plusieurs forces parallèles Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 .... agissent, dans un même plan, sur un corps, on peut, pour déterminer leur résultante, faire usage des méthodes précédentes, en composant les forces deux à deux successivement, jusqu'à ce qu'on arrive à la dernière.

Le procédé (IV) du paragraphe précédent est ordinairement, dans ce cas, le plus commode à employer.

I. Après avoir mené une ligne AF, fig. 92, perpendiculaire à la direction commune des forces Q_1, Q_2 ... Q_4, on compose Q_1 et Q_2, puis leur résultante $Q_1 + Q_2 = bc$ avec Q_3; on obtient ainsi $dd' = Q_1 + Q_2 + Q_3$. Cette dernière composée avec Q_4 fournit en M la résultante générale, $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$. Ce procédé est d'une application commode pour un grand nombre de calculs de

Fig. 92.



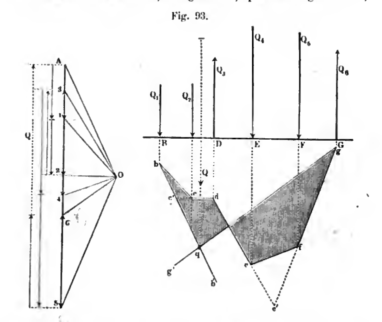
construction, notamment lorsque les forces Q_1, Q_2 .... doivent être déterminées successivement, comme, par exemple, dans la

recherche de la répartition de la charge d'une locomotive sur ses différents axes.

L'emploi du polygone funiculaire et du polygone des forces conduit également très-simplement au résultat.

II. Avec les forces données, Q_1, Q_2 .... Q_6 (fig. 93), on forme un polygone des forces, en portant, à partir du point A, les forces en $A\,1$, 2, 3, 4, 5, 6. La résultante Q se trouve immédiatement déterminée, en grandeur, par la longueur CA,

Fig. 93.



mais il reste à fixer sa position. A cet effet, on prend comme pôle, en dehors de $A\,5$, un point quelconque O, on joint OA, $O\,1$, $O\,2$, $O\,3$ .... $O\,6$, puis on mène bb', bc, cd .... gg', respectivement parallèles à $A\,O$, $1\,O$, $2\,O$ .... $O\,6$. La ligne gg' (voir § 35) coupe bb' en un point q, qui appartient à la direction de la résultante Q.

En se reportant aux développements du § 36, on voit que la figure, ainsi obtenue, permet d'obtenir très facilement la résultante de deux ou de plusieurs forces successives. Ainsi le point d'intersection c' de dc et de bq donne le point d'application de la résultante de Q_1 et Q_2, qui est représentée par $A\,2$ dans le

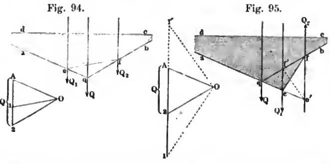
polygone des forces. De même e' est le point d'application de la résultante de Q_4 et de Q_5.

§ 41.

Décomposition de forces en deux ou plusieurs forces parallèles.

La décomposition de forces en forces parallèles, à l'aide du polygone funiculaire, constitue le problème inverse du précédent. Si, dans ce polygone $aqbcd$, fig. 94, on connait le côté correspondant à une force Q, et si on veut décomposer cette force en deux autres Q_1 et Q_2, on réunit les points d'intersection e et f des directions de Q_1 et Q_2 avec les côtés aq et bq; $aefb$, fig. 94, est alors la partie du polygone funiculaire, qui correspond aux nouvelles forces, dont la grandeur se détermine, en menant $O1$ parallèle à ef, dans le polygone des forces. Si les forces cherchées Q_1 et Q_2 sont situées d'un même côté de Q, fig. 95, le procédé reste le même. Il suffit de prolonger aq jusqu'à sa rencontre, en e, avec Q_1 et de mener ef. On peut également utiliser l'intersection de Q_1 avec qb et de Q_2 avec qa. Le polygone prend alors la forme $ae'f'b$. Le polygone des forces donne, dans le premier cas, $Q_1 = A1$, $Q_2 = 1 \cdot 2$, dans le second, $A1' = Q_2$ et $1'2 = Q_1$.

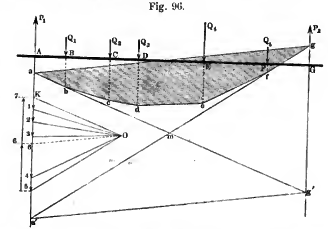
Si la pièce AG, soumise à l'action de charges parallèles Q_1, Q_2 .... Q_5, doit être maintenue par deux forces P_1 et P_2,



appliquées en A et G, fig. 96, on pourrait, pour déterminer ces forces, chercher d'abord la résultante Q des diverses charges, comme au § 40, et, au moyen de la méthode précédente, décomposer cette force Q en deux autres P_1 et P_2. Mais on peut

se dispenser de déterminer Q, attendu qu'on connait les directions de P_1 et P_2, ainsi que celle de leur résultante (voir § 37).

Fig. 96.

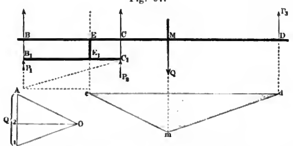


On forme le polygone des forces $K1, 2 \ldots 5O$, on trace tous les rayons polaires et leurs parallèles, dans le polygone funiculaire, et on joint les points d'intersection a et g des côtés de ce dernier polygone, parallèles à KO et $O5$, avec les directions des forces P_1 et P_2; la ligne ag ferme le polygone funiculaire et la parallèle $O6$, dans le polygone des forces, donne $P_2 = 5 \cdot 6$ et $P_1 = 6 \cdot 7$. Si, au lieu de prendre les points d'intersection a et g, on s'était servi, comme on pouvait le faire, des deux autres points a' et g', la solution eut été la même, car les deux lignes $a'g'$ et ag sont parallèles. Le polygone funiculaire eût alors présenté la forme $a'g'mbcdefma'$, le point m appartenant à la direction de la résultante des forces Q_1, Q_2 .... Q_5, qui est également celle de la résultante de P_1 et de P_2.

Lorsqu'une pièce chargée doit reposer sur un nombre d'appuis égal ou supérieur à trois, ces appuis doivent, en tenant compte de la question de résistance de la pièce, être disposés à des hauteurs rigoureusement déterminées, pour qu'on puisse trouver la valeur de la réaction exercée par chacun d'eux. Sans cela, le problème reste indéterminé. Toutefois, l'indétermination peut être levée par l'introduction de supports intermédiaires. Supposons, par exemple, qu'une pièce $ABCD$, fig. 97, soumise à une charge Q, en M, doive être équilibrée par 3 forces verticales P_1, P_2, P_3, appliquées aux points B, C et D; on peut

d'abord faire une hypothèse sur le rapport de deux de ces forces, P_1 et P_2, par exemple. Ces forces peuvent être considérées

Fig. 97.

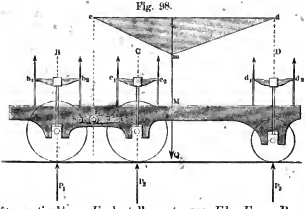


comme appliquées à un support intermédiaire $B_1\,C_1$, sur lequel reposerait la première pièce, en $E E_1$. Le rapport $E_1\,C_1 : E_1\,B_1$ doit être alors égal au rapport admis $P_1 : P_2$. On peut, dans ce cas, répartir Q entre les appuis E et D, à l'aide du polygone des forces $e\,m\,d$ et du polygone funiculaire $A\,O\,1\,.\,2$. On a alors: $A.\,1 = Q$, $1\,.\,2 = P_3$, $2\,A = P_1 + P_2$ et cette dernière somme peut se répartir elle-même entre B_1 et C_1, à l'aide de l'une quelconque des méthodes connues. Chaque hypothèse spéciale sur le rapport $\frac{P_1}{P_2}$ donnera lieu à une valeur différente de P_3. Si l'on s'impose la condition que $P_1 = P_2$, E tombe au milieu de $B\,C$ et le support intermédiaire a alors ses deux bras égaux. Les ressorts à lames, dans les wagons et les autres voitures, sont des supports intermédiaires à bras égaux. Dans certaines voitures de luxe, on trouve également des supports à bras inégaux. Ce sont aussi ceux dont on fait généralement usage dans la plupart des balances-bascules.

Si une charge doit être répartie sur plus de trois ou quatre points, le problème peut se résoudre par une combinaison convenable de supports intermédiaires. Telle est, par exemple, la solution adoptée pour les locomotives. Étant donnée la charge totale Q d'un chassis de locomotive, supposons qu'on veuille la répartir sur les trois axes B, C, D, de telle sorte que les charges en B et C soient dans le rapport de 3 à 2; d'après la position assignée aux roues et les longueurs adoptées pour les ressorts $b_1\,b_2$, $c_1\,c_2$, $d_1\,d_2$, on connait, en définitive, les longueurs des trois supports intermédiaires; si, on admet, en outre, que la pièce, chargée de répartir la charge entre les axes B et C, doive être exactement

comprise entre les verticales menées par les points b_2 et c_1, on connaît, par cela même, la longueur bc du quatrième support, qui

Fig. 98.



doit être articulé en E, de telle sorte que $Eb : Ec = P_2 : P_1 = 2 : 3$. On trace alors le polygone funiculaire cmd, en même temps que le polygone des forces, ce qui permet de déterminer chacune des charges partielles. Si, plus tard, le répartition de la charge totale, admise à l'origine, a besoin d'être modifiée, on peut y arriver, dans une certaine mesure, en changeant les longueurs de b_1 b_2 et c_1 c_2; mais la condition essentielle, qu'on doit chercher à réaliser, avant tout, c'est que la résultante Q de toutes les charges se trouve convenablement placée. Les ressorts, qui agissent comme supports intermédiaires, doivent être calculés d'après les charges qu'ils sont appelés à supporter et ils doivent être ensuite réglés, au moyen des boulons de suspension, de telle sorte que la répartition des charges arrive à être exactement la même que pour des supports fixes.

§ 42.

Forces parallèles uniformément réparties.

Si une pièce est soumise à une charge uniformément répartie, on ne peut plus recourir aux méthodes précédentes pour tracer le polygone funiculaire et celui des forces. Dans ce cas, en effet, le polygone funiculaire devient une courbe, pour la détermination de laquelle il est nécessaire de recourir à un autre procédé; on peut y arriver de la manière suivante. Imaginons d'abord

la charge donnée remplacée par une série de forces égales, agissant en des points également espacés, 1, 2 ... 9, fig. 99, et traçons le polygone funiculaire; il est évident que le point d'intersection des côtés aM et bc de ce polygone devra se trouver à égale distance des lignes $1a$ et $2b$ et tombera, par conséquent, au milieu de ab', puisque les forces 1 et 2 sont égales. De même les côtés cd et aM se couperont en un point également éloigné

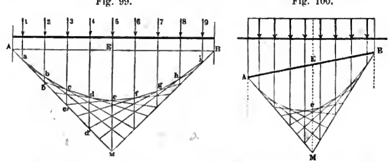


Fig. 99. Fig. 100.

de $3c$ et de $1a$, c'est-à-dire en b' sur la ligne $2b$, etc. En définitive, les différents points d'intersection des côtés du polygone avec aM et iM se trouvent également espacés sur ces deux lignes. Il suit de là, d'après un théorème connu, que les côtés du polygone ont pour enveloppe une parabole, dont le sommet se trouve ici sur la ligne médiane EM, à une distance $Ec = \frac{EM}{2}$. Si l'on repasse maintenant au cas d'une charge uniformément répartie, le polygone funiculaire vient se confondre avec cette parabole. En considérant le triangle AMB comme le polygone correspondant au cas où la charge totale serait appliquée en E, on voit immédiatement que ce triangle fournit le moyen de tracer facilement la courbe. Si les forces étaient inclinées sur la ligne AEB, comme dans la figure 100, les intervalles sur AM seraient encore égaux entre eux; il en serait de même pour les intervalles sur MB; seulement, dans ce cas, la valeur d'une division sur AM ne serait pas la même que sur MB. Le point e est encore, comme précédemment, le milieu de EM, mais il n'est plus le sommet de la parabole.

Le polygone funiculaire se transforme également en courbe, lorsqu'il s'agit de charges roulant sur une pièce. La courbe est encore, dans ce cas, l'enveloppe des polygones successifs corres-

pondant à chaque position de la charge. Le calcul des ponts des chemins de fer offre de nombreux exemples de ce genre. Le calcul des glissières, pour les tiges de pistons, dans les machines vapeur, conduit également à des tracés analogues, quoique beaucoup plus simples.

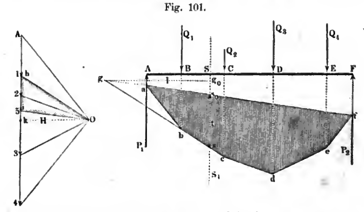
§ 43.

Moments statiques des forces parallèles.

Lorsque des forces parallèles telles, par exemple, que Q_1, $Q_2 \ldots Q_4$, P_1 et P_2, fig. 101, agissent normalement sur une pièce, il est nécessaire, pour évaluer la résistance de cette pièce, de déterminer les moments statiques des forces extérieures. Le polygone funiculaire et celui des forces permettent d'obtenir facilement ce résultat.

Ces deux polygones, $abcdef$ et $AO4$, étant tracés, supposons qu'on veuille obtenir le moment statique M pour le point

Fig. 101.



S de la pièce. Ce moment est le produit de la résultante de toutes les forces, qui se trouvent d'un même côté (à droite ou à gauche) de la ligne SS_1, parallèle à la direction générale des forces, et de la distance l de cette résultante à SS_1. La grandeur de cette résultante est donnée par la ligne $hi = 1 \cdot 5$ du polygone des forces, qui se trouve comprise entre les rayons $O1$ et $O5$, parallèles à bc et fa. Quant à sa position, elle s'obtient en prolongeant les deux côtés précédents du polygone jusqu'à leur intersection g. Si on mène maintenant la ligne gg_0, normale

à SS_1, cette ligne sera le bras de levier l de la force résultante $P = hi$, qui tend à fléchir la pièce en S. On a donc $M = P \,.\, l$.

Cette multiplication peut aussi s'effectuer graphiquement. Si on mène, en effet, la perpendiculaire Ok, dans le polygone des forces, cette ligne est la hauteur du triangle Ohi, semblable au triangle gss_0, de hauteur l. On a donc $hi : Ok = ss_0 : gg_0$ ou, en désignant Ok par H, ss_0 par t:

$$P : H = t : l$$

et, par suite:

$$M = Pl = Ht.$$

les moments statiques, aux différents points de la pièce, sont donc entre eux comme les ordonnées du polygone funiculaire, puisque H est constant. Si on prend H pour unité, le procédé qui vient d'être indiqué revient à la méthode de multiplication du § 22 (I), et le moment M se trouve alors avoir pour mesure l'ordonnée t. Le polygone funiculaire étant une fois tracé, il n'est plus nécessaire, comme on le voit, de chercher la position (g) de la force résultante et, de plus, s'il s'agit simplement d'établir des rapports entre les différents moments statiques, il est indifférent que H ait été pris, ou non, à l'avance comme unité de mesure. Nous aurons plus tard à appliquer fréquemment cette importante propriété du polygone funiculaire pour les forces parallèles. Dans le calcul des arbres et dans beaucoup d'autres cas, elle est d'autant plus précieuse qu'elle n'exige aucune modification ou addition aux tracés et qu'en réalité les moments des forces se trouvent donnés directement par les opérations qui servent à déterminer ces forces elles-mêmes.

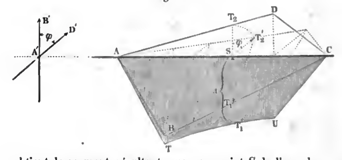
§ 44.

Composition et décomposition des moments statiques.

D'après ce qui précède, les moments statiques des forces parallèles peuvent se représenter par des lignes de grandeur, de position et de direction déterminées, exactement comme de simples forces. Si donc une pièce, en un de ses points, se trouve soumise à l'action de deux moments statiques, agissant dans la même direction ou dans des directions différentes, ces moments peuvent être additionnés graphiquement, comme on l'a vu pour les forces, § 31. Si ABC et ADC, fig. 102, sont les polygones funiculaires de deux séries de forces parallèles, qui agissent sur

un corps tournant AC, normalement à son axe de rotation, dans les directions $A'B'$ et $A'D'$, inclinées l'une sur l'autre de l'angle φ,

Fig. 102.



on obtient le moment résultant, pour un point S de l'axe du corps, en construisant le triangle $T_1 S T_2'$, de telle sorte que l'angle en S soit le supplément de l'angle φ, et $T_1 T_2' = S T_1' = t$ est le moment cherché. La composition complète des polygones funiculaires ABC et ADC, lesquels, d'après ce qui a été dit précédemment, peuvent aussi s'appeler surfaces des moments, fournit la surface des moments résultante $ATUC$. Les côtés AT et CU sont ici des lignes droites, tandis que TU est une courbe et, dans le cas actuel, une hyperbole. Dans la pratique, cette courbe peut souvent être remplacée par sa corde TU; sa construction n'offre, du reste, aucune difficulté.

En renversant le problème, on est conduit à décomposer un moment statique t, d'une direction donnée, en deux autres t_1 et t_2, dont on connaît également les directions.

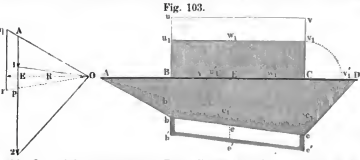
§ 45.

Composition graphique des moments de torsion et de flexion.

En dehors des efforts de flexion, certaines pièces de machines ont à supporter des efforts de torsion; le plus souvent même elles se trouvent soumises simultanément aux deux genres d'efforts. Les moments de torsion, comme il est facile de le comprendre, peuvent se représenter par des surfaces analogues à celles que nous venons d'indiquer pour les moments de flexion. Ainsi, $ABCD$, fig. 103, étant l'axe d'un corps de rotation, supporté en A et D et soumis, en B et C, à des forces qui tendent

à produire une flexion, nous pouvons construire, comme précédemment, le polygone des forces $A\,O\,2$ et la surface des moments

Fig. 103.



$A\,b\,c\,D$. Si le corps, entre B et C, est soumis, en outre, à un effort de torsion P, dont le bras de levier soit R, nous aurons à déterminer la surface de moment correspondante. D'après le § 43 et la règle de multiplication du § 22, I, pour obtenir la ligne représentative de $P\,R$, nous devons porter d'abord P, de A en p, dans le polygone des forces, et joindre $O\,p$; en menant, parallèlement à $A\,p$, une ligne qui soit à une distance R du point O, les deux rayons polaires $O\,A$ et $O\,p$ prolongés déterminent, sur cette ligne, une longueur $q\,r$, qui donne le moment $P\,R$, exprimé avec l'unité $O\,E$, qui a déjà servi pour le polygone $A\,b\,c\,D$. La surface des moments pour la torsion, entre B et C, se trouve dès-lors représentée par le rectangle $B\,C\,u\,v$, dans lequel $B\,u = C\,v = q\,r$. Ordinairement, dans les problèmes pratiques, ce rectangle de torsion doit être comparé et rapporté aux moments des forces de flexion, qui agissent simultanément, et il convient, dès lors, de le remplacer par un moment de flexion équivalent, c'est-à-dire correspondant à la même sécurité pour la pièce. Or, d'après le § 18, ce moment de flexion doit être égal à $^5/_8$ du moment de torsion. Si donc on prend $B\,u_1 = C\,v_1 = {}^5/_8\,B\,u$, le rectangle $B\,u_1\,v_1\,C$ qu'on obtient représente, à la même échelle que le polygone $A\,b\,c\,D$, la surface des moments fléchissants, susceptibles de remplacer les moments de torsion entre B et C.

Si les moments fléchissants, ainsi obtenus, doivent être combinés avec les autres moments fléchissants, il suffit d'effectuer une addition graphique des deux surfaces, pour arriver au résultat précédemment fourni par les formules du § 18. — D'après ces formules, le moment idéal de flexion M_i, qui, en chaque

point, peut être substitué au moment de torsion M_t et au moment de flexion M_f, a pour expression:

$$M_i = {}^3/_8\, M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f^2 + M_t^2}$$

Pour représenter cette valeur, prenons $Bb_1 = {}^5/_8\, Bb$, $Cc_1 = {}^5/_8\, Cc$, $Ec_1 = {}^5/_8\, Ee$ etc., rabattons Bu_1, Cv_1, Ew_1 sur AD et additionnons les hypothénuses $b_1 u'_1$, $c_1' v_1$ et $e_1 w'_1$ respectivement avec les lignes bb_1, cc_1 et ee_1. Les sommes, ainsi obtenues, représentent les grandeurs des ordonnées, aux points B, C et E du polygone funiculaire idéal $B\,b\,b'c'\,e'\,e\,D$, correspondant à l'ensemble de toutes les actions auxquelles le corps se trouve soumis.

§ 46.

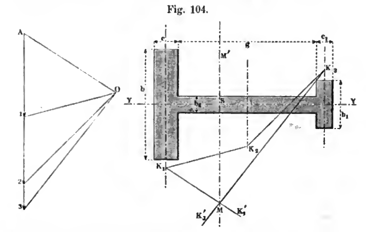
Détermination du centre de gravité au moyen du plan des forces.

La détermination du centre de gravité d'une surface plane peut s'effectuer, souvent d'une manière très simple, à l'aide du plan des forces. A cet effet, on commence par diviser la figure en tranches minces d'égale largeur, de telle sorte que la surface de chaque tranche puisse être considérée comme proportionnelle à sa longueur moyenne. Si, avec ces différentes longueurs, on construit un polygone des forces et un polygone funiculaire, la direction de la résultante fournira une ligne passant par le centre de gravité. Si la figure n'a pas d'axe de symétrie, le tracé précédent devra être répété, en adoptant une autre direction pour les tranches; on obtiendra ainsi une seconde ligne qui, par son intersection avec la première, déterminera la position du centre de gravité. Dans certains cas, au lieu de tranches minces, on peut faire usage de surfaces d'une certaine dimension, déterminer leurs mesures, d'une manière quelconque, et utiliser ces dernières dans le tracé graphique.

Supposons, par exemple, qu'on ait à déterminer le centre de gravité d'une section dont la forme soit celle de la fig. 104. La figure étant symétrique par rapport à l'axe YY, le centre de gravité doit déjà se trouver sur cette ligne. Décomposons maintenant cette figure en trois rectangles, dont les surfaces, représentées respectivement par $b \times c$, $b_1 \times c_1$ et $b_2 \times g$, ont leurs centres de gravité en leurs points milieux. Si on suppose qu'on ait $c = 1,5\,b_2$, $c_1 = b_2$, les forces, correspondant aux surfaces

précédentes, peuvent être exprimées par $1{,}5 \times \frac{b}{2}, \frac{g}{2}$ et $\frac{b_1}{2}$ et portées, à la suite les unes des autres, en $A\,1\,2\,3$. Si nous choisissons un pôle O et si nous menons les lignes $K_1'K_1$, K_1K_2,

Fig. 104.



K_2K_3, K_3K_3' respectivement parallèles à OA, $O1$, $O2$ et $O3$, le point d'intersection M des côtés K_1K_1' et K_3K_3' est un point de l'axe vertical MM', passant par le centre de gravité cherché. Ce point S se trouve donc déterminé par la rencontre de cette ligne avec l'axe de symétrie YY.

§ 47.

Résultante des actions de l'eau dans une roue hydraulique.

Dans l'étude d'une roue hydraulique, il est souvent essentiel de connaître la position de la résultante des actions exercées par l'eau; elle peut se déterminer facilement à l'aide des principes que nous venons d'exposer et que nous allons appliquer, comme exemple, à une roue à augets.

Si nous représentons en coupe, fig. 105, la moitié d'une roue de cette espèce, le troisième auget, à partir du haut, reçoit l'eau motrice et se remplit d'une certaine fraction de son volume, fraction qui varie avec certaines circonstances de l'installation, telles que la forme de l'auget, la vitesse de rotation, etc. Si nous admettons que, dans le mouvement de descente, le niveau

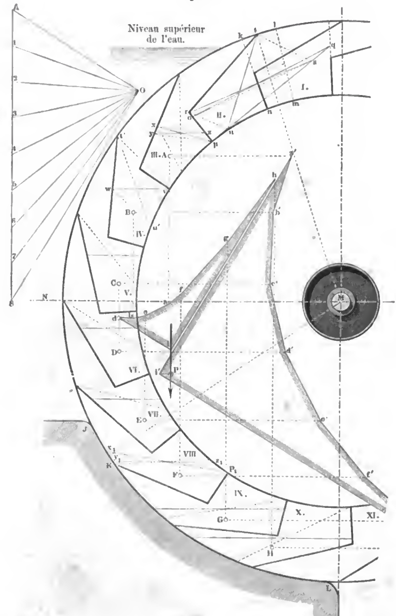
de l'eau dans chaque auget reste horizontal (ce qui n'est pas rigoureusement vrai), il est facile de déterminer la position de l'auget, pour laquelle l'eau commencerait à en sortir, si le coursier KL ne venait pas s'y opposer. Si, de plus, nous négligeons les pertes d'eau, dues au jeu qui existe entre ce coursier et la roue, tous les augets, depuis le troisième jusqu'au dixième inclusivement (le nombre des augets pour la moitié de la roue étant supposé égal à dix), contiendront la même quantité d'eau et, dans chacun d'eux, le poids de cette eau sera naturellement appliqué au centre de gravité du prisme liquide correspondant. Nous admettrons d'ailleurs que, dans la position de la figure, l'auget XI soit déjà vidé.

I. **Détermination de la longueur de l'arc du coursier** KL. La capacité d'un auget est évidemment équivalente à celle de la partie de la couronne, comprise entre les deux plans menés par l'axe de la roue et par les lignes de division des fonds de deux augets voisins. Supposons maintenant que le coefficient de remplissage soit 0,4, c'est-à-dire que chaque auget reçoive une quantité d'eau égale aux deux-cinquièmes du volume que nous venons de définir. Si, dans l'auget I, nous prenons l'arc kl égal à 0,4 de la division et si nous menons le rayon lm, la section $klmn$ sera équivalente au profil que présentera l'eau dans l'auget. Pour l'auget II, cette section se trouve remplacée par le quadrilatère équivalent $rput$, dont un sommet t coïncide avec l'extrémité de la palette rt. L'angle ktu représente la valeur cherchée de l'angle KML du coursier et utM le complément KMN de cet angle.

La transformation du profil $klmn$ en quadrilatère s'effectue de la manière suivante: on construit d'abord le triangle rectangle opq, en prenant le côté op égal à la largeur moyenne de $klmn$ et le second côté $pq = 2 \cdot lm$; de ce triangle on passe ensuite au triangle équivalent rps, en menant os parallèle à rq et en joignant les points r et s (v. § 25). Si maintenant on mène la ligne st et sa parallèle ru, il suffit de joindre les points u et t, pour obtenir le quadrilatère cherché $rput$ (l'arc pu, vu sa faible courbure, pouvant être considéré comme une droite). On prend ensuite l'angle KMN égal à utM et on prolonge le coursier d'une certaine longueur KJ, pour tenir compte des remous de l'eau.

II. **Détermination du niveau de l'eau dans les différents augets.** Nous allons d'abord effectuer le tracé

Fig. 105.



pour l'auget IV. A cet effet, on commence par reporter sur cet auget le quadrilatère $rput$, puis, par l'extrémité t', on trace une ligne arbitraire $t'v$, à laquelle on mène une parallèle $u'w$ par le point u'; en faisant varier la direction de $t'v$, on finit, après quelques tâtonnements, par obtenir une ligne vw horizontale, qui donne, dans ce cas, le niveau cherché. C'est ainsi qu'on a déterminé la ligne indiquée sur la figure, de même que les lignes analogues pour les augets V, VI et VII.

Dans l'auget III, la figure $rput$ a d'abord été transformée en un second quadrilatère, ayant pour côté supérieur px, puis ce quadrilatère a été remplacé lui-même par un pentagone, dont le côté supérieur horizontal est yz.

Pour l'auget VIII, on a employé une troisième méthode: le quadrilatère primitif $rput$ transformé a donné d'abord la figure terminée par la ligne $p_1 x_1$, puis celle qui est limitée par le côté horizontal $y_1 z_1$. On a procédé de la même manière pour les augets IX et X.

III. **Plan des forces pour les volumes d'eau des augets.** On commence par déterminer les centres de gravité A, B .... H des huit augets pleins, en faisant usage des règles données dans la IVe section de cet ouvrage. Les huit forces égales, qu'on obtient ainsi, permettent de tracer d'abord le polygone des forces $AO8$, puis le polygone funiculaire $dbeafghi$. Le point i appartient à la direction de la résultante de toutes les forces partielles. On peut remarquer, sur le dessin, que les centres de gravité C et D se trouvant sur des verticales très rapprochées, on peut composer les deux forces qui y sont appliquées et mener id et db, respectivement parallèles à OA et $O2$, sans avoir besoin de tracer une parallèle à $O1$.

Il est facile maintenant de trouver le centre de gravité réel de tous les prismes liquides. Après avoir mené des horizontales par les points A, B, C .... supposons qu'on fasse tourner de 90° le polygone des forces $AO8$ et formons, avec les parallèles aux nouveaux rayons polaires, un second polygone funiculaire on, ce qui conduit au même résultat d'une manière plus simple, menons les côtés de ce polygone normaux aux rayons polaires de $AO8$; nous obtiendrons ainsi le second polygone funiculaire $a'b'c'd'e'f'\dots i'$. Le centre de gravité cherché doit se trouver sur l'horizontale menée par le point i'; il sera donc, en définitive, déterminé par l'intersection de cette ligne avec la verticale menée par le point i

La position de la ligne iP doit évidemment varier un peu avec la position des angets; mais, dans une roue bien construite, cette variation est extrêmement faible. Le procédé que nous venons d'indiquer a donc le grand avantage de fournir, d'une manière simple et rapide, une solution, qui sans être rigoureusement exacte, comporte cependant une très grande approximation.

§ 48.

Plans des forces dans les charpentes.

Dans les différents genres de constructions on fait usage de pièces assemblées, composées de parties droites, dont la réunion constitue des systèmes invariables; tels sont, par exemple, les poutres, les fermes de ponts et de toitures, les balanciers, etc. Les efforts de tension ou de compression, qui s'exercent dans ces pièces, peuvent être représentés très-simplement au moyen du plan des forces, que forment le polygone des forces et le polygone funiculaire. Nous allons donner ici quelques exemples d'application de la méthode. Dans les différents cas que nous allons examiner, chaque joint sera considéré comme une articulation parfaite, ou, du moins, on ne tiendra pas compte de sa résistance à la flexion.

Pour construire le plan des forces, dans un système de pièces assemblées, dont la disposition est indiquée sur un dessin, on doit d'abord commencer par déterminer, d'après les conditions du problème, la distribution des forces, puis partir d'une de ces forces pour la décomposer suivant les directions des pièces droites, qui constituent l'assemblage correspondant; les forces partielles, ainsi obtenues, transportées aux points d'assemblage voisins, doivent être composées respectivement avec les forces extérieures, appliquées en chacun de ces points; chaque résultante doit elle-même à son tour être décomposée suivant les directions des pièces de l'assemblage correspondant, etc. Les triangles ou quadrilatères consécutifs, que l'on détermine ainsi, constituent le plan des forces.

Pour lever toute incertitude sur la direction des composantes, par lesquelles on doit remplacer une force donnée, ou préalablement déterminée, il suffit de se reporter aux propriétés du polygone des forces (§ 32). Nous rappellerons notamment ici

les deux suivantes: pour décomposer une force en deux ou plusieurs autres, on doit renverser la flèche qui indique sa direction et la prendre alors pour ligne de fermeture S' (fig. 106) du polygone des forces composantes.

Si on veut remplacer deux ou plusieurs forces données par deux ou plusieurs autres, le polygone des premières forces et celui des nouvelles ont la même ligne de fermeture S, fig. 107.



Cette dernière règle contient d'ailleurs la première, comme cas particulier, attendu qu'une force unique doit être considérée, dans un tracé, comme un polygone de forces non fermé, dont la ligne terminale s'obtient précisément, en revenant au point d'origine, c'est-à-dire en marchant dans un sens opposé à celui de la force.

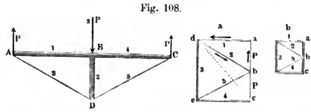
Pour déterminer avec sécurité, dans un projet de charpente, la manière dont travaille chaque pièce, il suffit, en cas de doute, d'imaginer que cette pièce soit coupée et qu'aux deux extrémités on applique des forces extérieures, dont l'action soit la même que celle des forces intérieures; la direction de ces forces extérieures fait immédiatement connaître la manière dont travaille la pièce considérée.

§ 49.

Plans des forces pour les poutres armées.

I. *Poutre à une seule contrefiche, fig. 108.* La poutre ABC qui, en son milieu B, normalement à AC, porte une charge

Fig. 108.



$2P$, repose, en A et C, sur deux appuis simples, dont chacun développe une réaction égale à P, puisque l'on a $AB = BC$.

Proposons nous de déterminer les efforts que supportent les différentes pièces du système 1, 2 .... 5.

Dans la petite figure, désignée par a, ab représente la force P, qui agit en, A de bas en haut. Cette force doit être décomposée, suivant AB et AD, en deux autres, qui représentent des forces intérieures de l'ensemble du système. Pour plus de simplicité, nous désignerons ces forces intérieures par les n^os des pièces correspondantes et nous menerons 1 et 2, respectivement parallèles à AB et à AD. Pour que la ligne de fermeture du triangle des forces, ainsi obtenu, ait la direction de P (c.-à-d. pour que la résultante des forces 1 et 2 soit dirigée en sens contraire de la force P, V. § 48), les forces doivent être dirigées, comme l'indiquent les flèches de la fig. 108 *a*. La pièce AB travaille donc par compression, tandis que la pièce AD est soumise à une traction. Pour plus de clarté, dans cet exemple et dans ceux que nous donnerons après, nous adopterons la convention suivante: dans les pièces travaillant par compression, les forces seront représentées par un double trait, tandis que dans les pièces soumises à des efforts de traction, elles seront figurées par un trait simple.

Pour le même motif, dans le tracé de la poutre, nous donnerons une largeur appréciable aux pièces qui agissent comme contrefiches, tandis que les tirants seront représentés par de simples lignes.

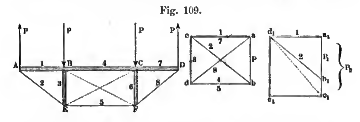
Cette convention faite, nous avons à composer $2P = abc$ avec 1 et, pour cela, à construire le triangle dac, en remarquant que, dans la pièce 1, la compression s'exerce de A vers B; si nous décomposons la ligne de fermeture du triangle (représentée en pointillé) horizontalement et verticalement, nous obtiendrons les deux forces 3 et 4, qui sont toutes les deux des compressions; la composition de 2 et 3 fournit la force 5, qui est une traction. Le plan des forces se trouve ici composé de deux parties symétriques, comme on pouvait le prévoir à priori, en raison de la symétrie de la poutre par rapport à son milieu; nous aurions pu, par suite, nous borner à l'étude des forces de l'une des moitiés.

Si l'on suppose que la charge $2P$, au lieu d'être appliquée en un seul point B, soit uniformément répartie sur toute la longueur ABC, chacune des portées, AB et BC, donne lieu à un effort

$\frac{P}{2}$ en chacun des points d'assemblage A, B et C, de telle sorte qu'en définitive la pièce peut être considérée comme soumise à deux forces $\frac{P}{2}$, en A et C, et à une force P en B. On obtient alors le plan des forces b, lequel est géométriquement semblable au précédent, mais avec des dimensions linéaires moitié moindres.

II. *Poutre à deux contrefiches.* (Cette disposition est fréquemment employée dans les ponts à bascule, les wagons etc.), fig. 109. En B et C agissent deux forces verticales P, en A et D deux autres forces, égales aux premières, mais dirigées en

Fig. 109.



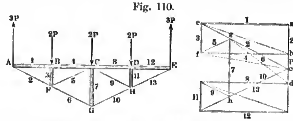
sens contraire. Dans le plan des forces a, on prend $ab = P$, on mène les lignes 1 et 2, parallèles respectivement à AB et à AE, et on obtient ainsi les forces 1 et 2, qui représentent, comme précédemment, la première une compression, la seconde une traction. Cette dernière force, décomposée suivant deux directions parallèles à BE et à EF fournit deux nouvelles forces, une traction 5 et une compression 3. Les forces 3, 1 et P, composées en B, fournissent, d'après le plan, la force de compression 4. La seconde moitié de la poutre étant symétrique de la première, nous n'avons pas à nous en occuper.

Si les forces verticales en A et B n'ont pas la même intensité, ce qui se présente fréquemment dans la pratique, l'articulation en B n'est plus admissible, à moins d'ajouter des pièces de renforcement EC et BF. Le plan b correspond à cette disposition. Si $P_1 = a_1 b_1$ agit en A, $P_2 = a_1 c_1$ en B_1, la décomposition de 2, parallèlement à EB et à EF, donne une force verticale 3, différente de celle qu'on obtient, en décomposant la résultante de P_2 et de 1 suivant les mêmes directions EB et EF. Si donc on supprimait les tirants en croix, l'assemblage tendrait à se déformer et les pièces finiraient par prendre, les unes par rapport aux autres, des inclinaisons telles que les deux

modes de décomposition précédents fournissent la même valeur pour la compression 3.

III. *Poutre à trois contrefiches.* Fig. 110. Le plan qui représente la poutre indique le mode de répartition des forces. On commence par décomposer la force $3P = abc$ en deux forces 2 et 1, ou ce et ea; on compose ensuite 1 avec $ab = 2P$, et on décompose la résultante be suivant ef et fb, ce qui donne 3 et 4; la résultante fc de 2 et 3 fournit, par sa décomposition, en fg et gc, les forces 5 et 6. Comme les deux tractions 6 et 10

Fig. 110.

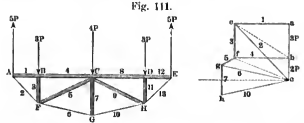


doivent être égales, en menant ch parallèle à GH et égal à cg, on obtient $gh = 7$. En vertu de la symétrie de la pièce et des charges, l'autre partie du plan des forces n'est que la reproduction de celle que nous venons d'indiquer.

IV. *Autre disposition de poutre à trois contrefiches.* Fig. 111. La travée BC a une longueur double de celle de la travée AB et la charge $12P$ est supposée uniformément répartie, ce qui donne, pour les divers points d'assemblages, les forces indiquées par la fig. 111.

Dans le plan des forces, on prend $abc = 5P$ et on décompose cette force suivant ae et ec, ce qui donne 1 et 2; les

Fig. 111.



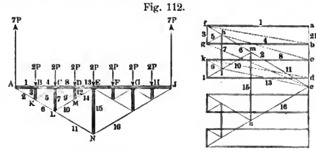
forces 1 et $3P$ (assemblage B) donnent une résultante qui, décomposée suivant ef et fb, fournit 3 et 4; on obtient de même les forces 5 et 6, parallèles à FC et FG, au moyen de la résultante cf des deux forces 2 et 3; ici, la force 5 est une com-

pression, tandis que, dans l'exemple précédent, elle représentait une traction. La composition des deux forces égales 6 et 10 donne la pression $gh = 7$, pour la contrefiche du milieu. La disposition symétrique de la figure, par rapport à cette ligne, permet de réduire le plan des forces à la partie que nous venons de tracer.

V. *Poutres armées à plusieurs contrefiches.* Fig. 112. Supposons la poutre AJ partagée en huit travées égales, uniformément chargées. Dans ce cas, les charges se trouvent réparties, aux différents points d'assemblages, comme l'indique la fig. 112.

Dans le plan des forces, $ae = 7P$ se décompose en 1 et 2 (af et fe); de même la résultante bf de 1 et de $ab = 2P$ donne 3 et 4 (fg et gb). La résultante ge de 2 et 3, décomposée

Fig. 112.



parallèlement à KC et KL, fournit 5 et 6 (gh et he). Pour les points L et C se présente une difficulté, qui n'existait pas dans les cas précédents; on a, en effet, à décomposer, suivant trois directions données, soit la force 6, soit la résultante des forces $2P$, 4 et 5, ce qui constitue un problème indéterminé. Pour faire disparaître l'indétermination, on est donc obligé de déterminer d'abord la grandeur d'une des forces, celle de 7, par exemple. La contrefiche CL se trouve comprimée, suivant sa direction, par les composantes verticales de 5 et 9 et par la charge directe $2P$; les deux forces 5 et 9 sont égales, puisqu'elles sont symétriques par rapport à CL et qu'elles supportent des pièces également chargées BK et DM. Dans le plan des forces, la ligne hi, qui doit représenter la force 7, doit donc avoir une longueur égale à $2P$, plus deux fois la projection de 5 sur la verticale; la résultante ie de hi et de $he = 6$, décomposée suivant im et me, donne les deux forces 10 et 11. En revenant au point C,

on peut décomposer la résultante de 4, 5 et $2P$, parallèlement à CL, CM et CD, ce qui, par le tracé $hikc$, fournit les deux forces 8 et 9. En continuant de la même manière, on détermine les autres forces, de 12 à 15, et on complète ainsi la moitié du plan des forces. Il importe de remarquer que, dans la disposition de la figure, la poutre AJ se trouve également comprimée en tous ses points.

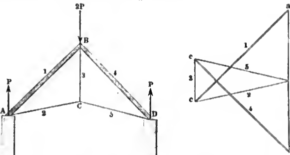
§ 50.

Plan des forces pour les fermes.

Les fermes fournissent de nombreux exemples de pièces armées. Dans les différentes dispositions que nous allons examiner, nous supposerons les arbalétriers soumis à une charge verticale uniformément répartie, de telle sorte que chaque travée supporte une charge proportionnelle à sa longueur.

1. *Ferme simple avec arbalétriers sans contrefiche.* Fig. 113. Chaque arbalétrier porte une charge uniformément répartie $2P$; les forces extérieures agissant sur la ferme, aux points A, B et C, sont alors respectivement P, $2P$ et P.

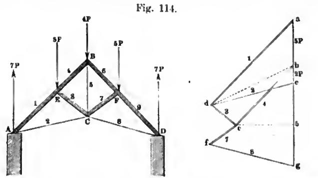
Fig. 113.



Si, dans le plan des forces, on prend $ab = P$ et si on mène ac et bc, parallèles à AB et à AC, ces deux lignes fournissent les forces 1 et 2; la première est une compression, la seconde une traction; la force bc, décomposée suivant les deux lignes ce et be, l'une verticale, l'autre parallèle à CD, donne les forces de traction 3 et 5. Pour achever le tracé, il suffit de composer les forces 1, $2P$ et 3; la ligne de, qui ferme le polygone $ecad$, représente la force 4.

II. *Ferme avec arbalétriers munis d'une contrefiche.* Fig. 114. La disposition de cette ferme peut se déduire de la précédente, par l'addition des deux contrefiches CE et CF. Les deux travées AE et EB étant supposées dans le rapport de 3 à 2, les charges qui leur correspondent sont $6P$ et $4P$ et il en résulte

Fig. 114.



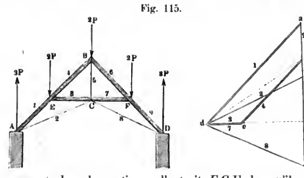
alors, pour les forces extérieures, aux différents points d'assemblage, la répartition indiquée par la figure.

Dans le plan des forces, décomposons $ac = 7P$ en 1 et 2, suivant les lignes ad et dc, parallèles à AE et AC. Prenons ensuite la résultante des forces 1 et $5P$ et décomposons la, parallèlement à EB et EC; nous obtenons ainsi les forces 3 et 4, qui sont toutes les deux des compressions. La composition des forces 2, 3 et de leurs symétriques 8, 7, au moyen du polygone $cdefg$, donne $cg = 5$. Cette dernière force pourrait également s'obtenir, en décomposant, suivant BC et BF, la résultante des forces 4 et $4P$.

III. *Autre disposition de ferme avec arbalétriers contrebutés en un seul point.* Fig. 115. Cette disposition se déduit de la précédente, en supposant les contrefiches EC et CF placées horizontalement. On a supposé ici les deux travées AE et EB égales; la charge est donc la même pour chacune d'elles et les forces extérieures, en A et D, ont pour valeur $3P$. Cette dernière valeur, portée de a en c, dans le plan des forces, permet d'obtenir, en da et cd, les forces 1 et 2. La résultante db de 1 et $2P$ donne, par sa décomposition suivant de et eb, les compressions 3 et 4. On a d'ailleurs évidemment $7 = 3$ et $8 = 2$. On obtient, par conséquent, la force 5, en prenant la ligne de fermeture cf du polygone $cdedf$ ou de cdf. On pourrait égale-

ment déterminer la valeur de 5, en composant les forces 4, 6 et $2P$. Si le tirant BC se trouve supprimé, ce qui a lieu assez

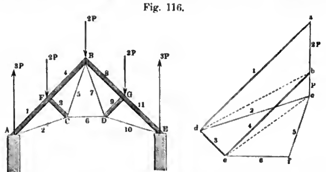
Fig. 115.



fréquemment dans la pratique, l'entrait ECF, lorsqu'il n'existe aucune articulation en C, peut n'être pas soutenu, à la condition que ses dimensions soient suffissantes pour empêcher la flexion; seulement, dans ce cas, les arbalétriers tendent à s'ouvrir en B, si l'assemblage en ce point n'est pas disposé de manière à les relier solidement l'un à l'autre.

IV. *Troisième disposition de ferme avec une contrefiche unique sur chaque arbalétrier.* Fig. 116. Dans cette ferme, le tirant du milieu des figures précédentes se trouve remplacé par

Fig. 116.



le triangle BCD. Comme les travées AF et FB sont supposées, ici encore, de même longueur, la répartition des forces, aux divers points d'assemblage, est identique à celle de la fig. 115.

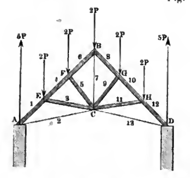
Dans le plan des forces, la décomposition de $abc = 3P$ fournit, comme précédemment, les forces 1 et 2. On obtient de même, en de et be, les forces 3 et 4, au moyen de la résul-

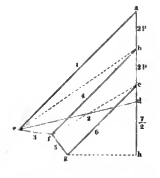
tante de 1 et de $2P$; la résultante ec des forces 2 et 3 donne, en ef et ef, les forces de traction 5 et 6. La seconde moitié de la figure est symétrique de la première.

V. *Ferme à deux contrefiches pour chaque arbalétrier.* Fig. 117. Cette disposition de ferme se déduit de celle de la fig. 114, en dédoublant la contrefiche, de manière à soutenir l'arbalétrier en deux points. Dans la figure les travées, qui sont supposées égales, supportent chacune une force uniformément répartie $2P$; les forces extérieures, en A et en D, ont alors pour valeur $5P$.

Dans le plan des forces, on prend $ad = 5P$, qu'on décompose suivant de et ea, parallèles à AE et AC, et on obtient ainsi les forces 1 et 2; la résultante eb de 1 et de $ab = 2P$,

Fig. 117.



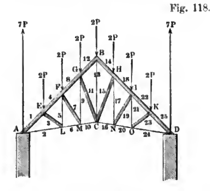


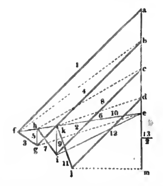
par sa décomposition suivant ef et fb, fournit 3 et 4. De même, la résultante fc des forces 4 et $2P$ donne, suivant fg et gc, les deux forces 5 et 6; pour achever le tracé de la moitié du plan, il suffit de déterminer encore la force 7, qui peut s'obtenir par la composition de $2P$ et des deux forces symétriques 6 et 8; la moitié de cette force, ou $\frac{7}{2}$, est, par suite, égale à la projection verticale de 6, diminuée de P, et elle est représentée, sur le plan, par la ligne dh.

VI. *Ferme à plusieurs contrefiches.* Fig. 118. Dans la disposition, représentée sur la figure, les contrefiches sont inclinées et les tirants verticaux. La charge étant supposée également répartie et égale à $2P$, pour chaque travée, les forces extérieures, en A et en D, ont pour valeur $7P$.

Dans le plan des forces, on prend $ae = ab + bc + cd + de = 7P$, et on décompose cette force, parallèlement à AE et AL, ce qui donne, en fa et ef, les forces 1 et 2; la décompo-

Fig. 118.



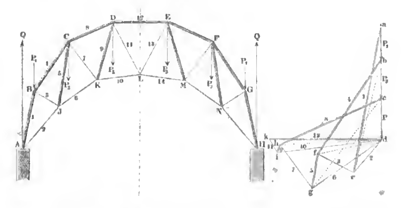


sition de la résultante fb de 1 et de $ab = 2P$ fournit, en fg et gb, les forces 3 et 4; de même on obtient 5 et 6 (gh et he), en décomposant, parallèlement à LF et LM, la résultante gc de 2 et 3. En continuant de la même manière, on obtient successivement les différentes forces jusqu'à la force 12 ou ld, dont la projection verticale dm, diminué de $de = P$, fournit, en mc, la moitié de la force 13, c'est-à-dire la moitié de la tension du tirant du milieu BC. La seconde moitié de la figure est d'ailleurs identique à la première.

VII. *Ferme courbe*. Fig. 119. Les fermes, du genre de celle que représente la figure $ABC \ldots H$, sont fréquemment employées pour couvrir des salles, présentant des dimensions transversales considérables et une grande hauteur; on peut les considérer comme une modification du type précédent, obtenue en remplaçant, par un polygone, les pièces droites qui forment les arbalétriers. Dans cette ferme, la partie de la charge, qui se rapporte à la toiture proprement dite, est déterminée et doit être supposée proportionnelle à la longueur des côtés, mais il n'en est évidemment plus de même pour les charges accidentelles; ainsi la neige se répartit très inégalement et la charge qui lui correspond est évidemment beaucoup plus faible, sur les extrémités AB et GH, que sur les côtés CD et DE. Nous devrons donc laisser indéterminées les forces P_1, P_2, P_3, qui sont appliquées aux sommets B, C, D, E, F, G et auxquelles doivent faire

équilibre les réactions Q des appuis A et B, de telle sorte qu'on a
$$Q = P_1 + P_2 + P_3.$$

Fig. 119.



Dans le plan des forces, $ab = P_1$, $bc = P_2$, $cd = P_3$ et, par suite, $ad = Q$; la décomposition de ad, parallèlement à AB et AJ, donne, en ea et de, les forces 1 et 2; de même, la résultante de 1 et de P_1 fournit, suivant ef et fb, les forces 3 et 4; de la connaissance de 2 et 3 on déduit facilement 5 et 6 (gf et dg). La résultante ge des trois forces 4, 5 et P_2, par sa décomposition suivant deux directions parallèles à CK et CD, donne 7 et 8. On continue ainsi jusqu'à ce qu'on arrive, en kd, à la force 12, qui complète la première moitié du plan des forces. Les pièces KL, DL, EL et ML travaillent toutes par traction.

§ 51.

Plan des forces d'une ferme, en tenant compte de la pression du vent.

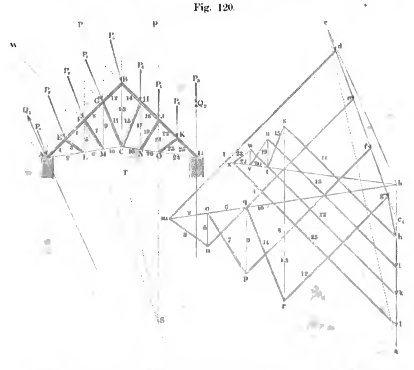
Lorsqu'on veut établir, avec une certaine précision, des fermes d'une grande portée, il convient de tenir compte, non seulement des charges, résultant du poids de la toiture elle-même et de celui de la neige, mais encore de l'action du vent, laquelle, dans certains cas, est loin d'être négligeable.

Pour montrer, par un exemple, comment on peut appliquer la graphostatique à la solution de ce problème, reprenons la

ferme de la fig. 118 et supposons cette ferme soumise, en dehors des forces verticales, à la pression W du vent (fig. 120).

Nous avons à déterminer d'abord les forces Q_1 et Q_2, aux points A et D, en supposant que la pression du vent ne s'exerce

Fig. 120.



que sur l'une des faces de la toiture, AB. Soit W la résultante des actions du vent, dirigée normalement à AB, et P la charge verticale totale sur cette même face; la composition des deux forces P et W donne une résultante, dirigée suivant FS et dont la grandeur est représentée, sur le plan des forces, par CC_1. L'autre arbalétrier BD est soumis uniquement à la force verticale P, appliquée à son point milieu J.

Si on prolonge la direction de cette force verticale jusqu'à sa rencontre avec la résultante précédente, le point d'intersection S appartient à la résultante de toutes les forces qui agissent sur la toiture. Si, dans le plan des forces, on prend $c_1 a = P$, la ligne ac représente cette résultante; la ligne ST, menée par le

point S, parallèlement à $a c$, donne donc sa direction sur le tracé de la ferme. Pour déterminer maintenant les forces Q_1 et Q_2, reportons-nous aux considérations du § 34; nous avons vu que, dans le cas où on a, comme inconnues, deux forces, qui doivent satisfaire à la condition de fermer le polygone, il est nécessaire d'avoir pour ces deux forces au moins deux données. Or, ici nous possédons des éléments suffisants pour déterminer les directions de Q_1 et Q_2.

La pression du vent donne lieu à une poussée horizontale, qui doit être détruite par la résistance des appuis (murs ou poteaux). On aura à examiner, dans chaque cas particulier, si ces deux appuis sont susceptibles de se déplacer horizontalement de la même quantité ou si, au contraire, leurs déplacements doivent être différents; dans ce dernier cas, la poussée devra être répartie proportionnellement à ces déplacements. Cela fait, au point d'intersection de $S T$ et de $A D$, on décompose $a c$, suivant la verticale et l'horizontale, puis on détermine (d'après le § 39) les composantes de la première force pour les deux appuis; on compose ensuite ces forces avec celles qui proviennent des actions horizontales.

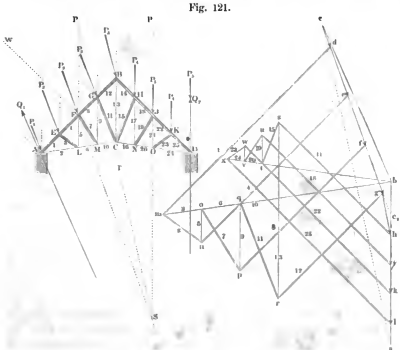
Il arrive fréquemment que l'un des appuis ne soit pas susceptible d'éprouver un déplacement horizontal; c'est ce qui se présente notamment, lorsque l'extrémité d'une ferme repose sur une colonne ou un pilier isolé; dans ce cas, tout le déplacement horizontal doit se reporter sur l'autre appui, qu'il convient de renforcer en conséquence. C'est ainsi, par exemple, que sont établies la plupart des halles de chemins de fer, dans lesquelles on suppose que l'appui D ne peut offrir de résistance que dans la direction de la verticale. Cette hypothèse permet de déterminer la direction de l'autre force.

Si, en effet, on prolonge la verticale de D, jusqu'à sa rencontre avec $S T$, et qu'on joigne le point d'intersection au point A, on obtiendra la direction de la force appliquée à ce point A. Cette force et celle du point D ne représentent pas toutes les forces extérieures qui agissent aux points d'appui; il faut leur joindre les composantes qui proviennent de la charge de la toiture. Pour déterminer ces inconnues, décomposons la résultante de P et de W sur les divers points d'assemblage de $A B$ et la force P sur ceux de $B D$. Nous obtiendrons ainsi la force P_1, pour le point A, et P_2, pour les autres points E, F et G.

Au point B agit la force P_3, aux points H, J et K la force $P_4 = \frac{P}{4}$ et enfin, au point D, la force verticale $P_5 = \frac{P}{8}$.

Dans le plan des forces, nous devrons donc faire $cd = P_1$, $de = ef = fg = P_2$, $gh = P_3$, $hi = ik = kl = P_4$, $la = P_5$ et nous obtiendrons finalement les lignes bl et bd, qui représentent, la première la réaction Q_2, en D, et la seconde la réaction Q_1, en A. La détermination des forces partielles, agissant aux différents points d'assemblage, est maintenant facile. La décomposition de $bd = Q_1$, parallèlement à AE et AL, donne, en bm et md, les forces 2 et 1; de la même manière on déterminera

Fig. 121.



successivement toutes les autres forces, jusqu'à la tension du tirant BC, pour laquelle on obtient $rs = 13$, le point s étant l'intersection de la verticale rs avec la ligne hs, menée par le point h, parallèlement à BD. On trouvera ensuite sans peine les forces 15, 16 .... 25 de la seconde moitié de la ferme. Il est d'ailleurs facile de reconnaître, sur le plan des forces, que

les pièces symétriquement placées ne sont pas soumises aux mêmes efforts.

La détermination des forces partielles peut également s'effectuer, en commençant par la force 25, qui serait donnée par le triangle xbl, et, comme on doit évidemment retomber ainsi, pour les forces, sur les valeurs précédemment trouvées, cette seconde opération constitue une vérification de la première. Le point x étant déterminé par l'intersection des lignes bx et lx, qu'on peut tracer dès le début, on se trouve avoir une vérification immédiate de l'exactitude du premier tracé en ce que la dernière ligne de la construction wx, menée parallèlement à KO, doit passer par ce point x. Pratiquement, pour obtenir cette vérification, c'est-à-dire pour que le dernier triangle se ferme, il faut que le tracé ait été effectué avec le plus grand soin.

Si l'on compare les forces données par le tracé de la fig. 121 avec celles de la fig. 118 (établie à la même échelle), on voit que l'influence de la pression du vent est loin d'être négligeable. Du reste, pour achever complétement l'étude de la charpente précédente, il y aurait lieu d'effectuer un second tracé, en supposant l'action du vent s'exerçant sur la face BD.

§ 52.

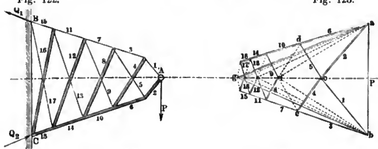
Plan des forces pour une pièce en treillis, libre à une de ses extrémités.

Les pièces en treillis, en fer ou en fonte, trouvent un assez grand nombre d'applications dans la construction des machines; on en fait usage pour les balanciers, les bras de grues, etc. Nous allons indiquer, sur quelques exemples, le mode de calcul de ce genre de pièces.

I. *Support en treillis formé de pièces droites.* Fig. 122. Considérons une pièce, fixée à l'une de ses extrémités, en B et C, et supportant à l'autre, en A, une force P, perpendiculaire à un axe, par rapport auquel nous supposerons la pièce symétrique. Le diagramme des forces peut s'établir de la manière suivante: on prend $ab = P$ et on décompose cette ligne suivant les directions des pièces 1 et 2; ac et bc représentent alors les forces 1 et 2. Chacune de ces forces se décompose à son tour en deux autres, 1 en 3 et 4, 2 en 5 et 6, à l'aide des triangles

bec et *adc*. Pour obtenir la résultante des forces 3 et 5, il suffit de reporter $5 = dc$ suivant fe; la ligne fb est la résul-

Fig. 122. Fig. 123.

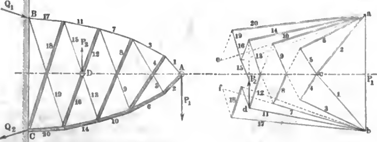


tante cherchée qui, par sa décomposition, donne les forces 7 et 8. En continuant à opérer de la même manière, le tracé obtenu est symétrique par rapport à l'axe gc; on peut donc, à la rigueur, se contenter d'une seule moitié. Les lignes *ga* et *gb*, qu'on obtient, en dernier lieu, comme résultantes de 15 et 17, puis de 18 et 19, peuvent être considérées comme représentant les forces extérieures qui, appliquées en B et C, suffiraient pour assurer la fixation de la pièce en ces points, dans l'hypothèse où on se trouverait avoir toute liberté pour le choix des directions de ces forces extérieures.

II. *Support chargé en deux points.* Fig. 124. La pièce, qui est fixée aux points B et C, est soumise, en A et en D, à deux forces verticales, P_1 et P_2, dirigées en sens inverse, comme l'indiquent les flèches; elle est limitée par deux lignes polygonales AB et AC. Pour toutes les forces, depuis 1 jusqu'à 13, le tracé s'effectue comme pour le cas précédent. En D, les deux pièces, qui se croisent, sont supposées reliées d'une manière inva-

Fig. 124.

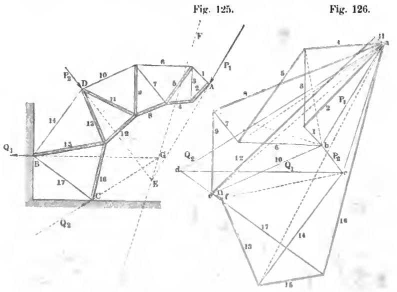




riable, de telle sorte que la force P_2 puisse agir sur 15 et 16; en même temps que la force P_2, agissent, au point d'assemblage D, les forces 12 et 13. Si donc, au tracé 13 — 12, on ajoute, en d, la force P_2, la distance comprise entre l'extrémité de cette force et l'origine de 13 représentera la résultante des trois forces 13, 12 et P_2, résultante qu'on peut remplacer par les deux composantes 15 et 16. En continuant de la même manière, on obtient successivement les autres forces jusqu'à 20, puis enfin, en bf et ea, les forces extérieures Q_1 et Q_2, qui font équilibre à P_1 et P_2.

III. *Pièce en treillis pour bras de grue.* Fig. 125. On fait souvent usage de pièces courbes de ce genre pour les grues d'une grande puissance. En A et D agissent les forces P_1 et P_2; en B doit être appliquée une force extérieure Q_1, dirigée horizontalement, et en C une autre force extérieure Q_2, dont la direction est à déterminer. A l'aide du plan des forces, il est facile de trouver les valeurs des actions tant intérieures qu'extérieures. Pour ces dernières, on doit d'abord commencer par

Fig. 125. Fig. 126.



déterminer la direction encore inconnue de Q_2. A cet effet, on prolonge P_1 et P_2 jusqu'à leur rencontre, en E; dans le plan des forces, le triangle abc donne ac pour résultante de P_1 et

de P_2 et la ligne EF, menée par le point E parallèlement à ac, est la direction de cette résultante; si maintenant on prend le point d'intersection G de cette ligne et de la force Q_1 prolongée, et qu'on le joigne au point C, la ligne CG représentera la direction de la force Q_2. En construisant, à l'aide de cette direction et de celle de Q_1, le triangle adc, on obtient immédiatement $cd = Q_1$ et $da = Q_2$. — Cela posé, la décomposition de $P = ab$ nous donne les forces 1 et 2; remplaçons cette dernière par ses composantes 3 et 4, prenons la résultante de 3 et 1 et décomposons la en 5 et 6. En continuant, on arrive à déterminer les forces 8 et 9, dont la résultante fournit, par sa décomposition, les forces 11 et 12. On ajoute ensuite la force P_2 aux forces 10 et 11 et on remplace leur résultante par 13 et 14. Dans notre figure, la force 11 aurait dû également être appliquée en e, mais le tracé aurait manqué de netteté, par suite du trop grand rapprochement des lignes 12 et 2; c'est pour ce motif que nous avions appliqué primitivement la force 11 en a_1; nous pouvons maintenant, sans inconvénient, la reporter, dans sa position véritable, en ef, et construire le polygone 11 — 10 — P_2, dont la ligne de fermeture, cf, peut se décomposer pour donner 13 et 14. Les forces 15 et 16 se déduisent de la résultante de 13 et 12, et enfin la force 17 s'obtient, en joignant le point d au point d'intersection de 15 et de 16, attendu que 16 et 17 doivent avoir pour résultante $Q_2 = ad$. Si le tracé a été fait avec soin, la ligne 17, dans le plan des forces, doit se trouver parallèle à BC; on a donc ainsi un moyen précieux de contrôler l'exactitude du tracé.

§ 53.

Observations et conclusions.

Après la série d'applications du calcul graphique et de la graphostatique, que nous venons de donner, et qui ont une grande importance pour le but que nous nous sommes proposé dans cet ouvrage, il nous reste à insister particulièrement sur le soin et l'exactitude qu'il convient d'apporter dans les tracés. Le débutant devra bien se garder de surcharger ses dessins de lettres et de nombres ou, pour mieux dire, il devra en inscrire le moins possible; dans tous les cas, les inscriptions indispensables pour la

clarté du tracé devront se faire avec un crayon fin. Des crayons bien taillés, de duretés différentes, une bonne planchette, des équerres et des règles d'une grande précision, un bon compas et une règle bien divisée, une feuille de papier bien collée, sont autant d'éléments accessoires de succès, qu'il importe de ne négliger dans aucun cas. La solution rapide et sûre des problèmes exige une certaine habitude, qu'il est d'ailleurs facile d'acquérir, en ayant soin, dans les tracés qu'on exécute, de ne pas perdre de vue, un seul instant, le but à atteindre et de chercher constamment à bien se rendre compte des diverses constructions auxiliaires. En suivant cette voie, on arrive rapidement à des résultats qui, à l'avantage de l'exactitude, joignent celui d'être présentés sous la forme la plus satisfaisante, celle de tracés qui parlent aux yeux et qui, au moyen de quelques lignes, remplacent toute une série de calculs longs et pénibles.

TROISIÈME PARTIE.

CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DE MACHINES.

§ 54.

Remarques préliminaires.

On comprend, sous le nom d'éléments de machines, les pièces isolées ou les groupes de pièces simples, qui se rencontrent et se répètent, dans toutes les machines, en nombre plus ou moins considérable. La série de ces pièces n'est pas très-étendue, bien qu'à la rigueur on ne puisse guère la limiter d'une manière absolue; suivant toute vraisemblance, elle devra s'accroître progressivement, à mesure qu'on appliquera les connaissances théoriques à l'étude d'un plus grand nombre de machines. Il est probable qu'on arrivera ainsi à trouver, dans la composition de ces machines, des pièces élémentaires nouvelles, pour l'établissement desquelles la théorie devra fournir des indications. Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à l'étude des pièces de machines qu'on considère généralement partout comme pièces élémentaires.

Dans les deux premières parties de cet ouvrage, nos formules ont été établies d'une manière tout-à-fait générale, tandisqu'ici nous devons adopter des unités de mesures. Les dimensions linéaires et les poids seront rapportés au millimètre et au kilogramme, sauf quelques cas particuliers, où nous aurons soin de désigner les nouvelles unités. Des tables, placées à la fin

du volume, permettront d'ailleurs d'opérer facilement la transformation en mesures étrangères. Les vitesses seront exprimées en mètres, avec la seconde comme unité de temps. Les nombres de tours seront évalués par minute. Comme mesure du travail, nous adopterons pour unité le kilogrammètre, en nous réservant de recourir, pour l'évaluation des travaux considérables, au cheval de 75 kilogrammètres.

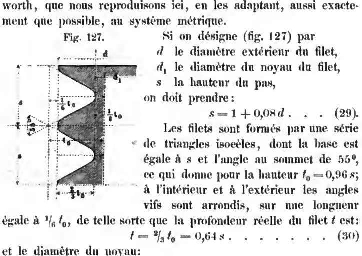
Boulons et assemblages à boulons.

§ 55.

Règles de Whitworth.

Les assemblages par boulons sont principalement employés pour relier entre elles les différentes parties des machines. Les boulons de fixation ont généralement un filet triangulaire et ce n'est guère que pour les grandes dimensions qu'on a recours au filet carré. Pour les premiers, et quand il s'agit de boulons d'une force moyenne, l'inclinaison, la profondeur et la forme du filet se déterminent presque toujours d'après les règles de Whitworth, que nous reproduisons ici, en les adaptant, aussi exactement que possible, au système métrique.

Fig. 127.



Si on désigne (fig. 127) par

d le diamètre extérieur du filet,

d_1 le diamètre du noyau du filet,

s la hauteur du pas,

on doit prendre:

$$s = 1 + 0{,}08\,d \quad . \quad . \quad . \quad (29).$$

Les filets sont formés par une série de triangles isocèles, dont la base est égale à s et l'angle au sommet de 55^0, ce qui donne pour la hauteur $t_0 = 0{,}96\,s$; à l'intérieur et à l'extérieur les angles vifs sont arrondis, sur une longueur égale à $^1/_6\,t_0$, de telle sorte que la profondeur réelle du filet t est:

$$t = {}^2/_3\,t_0 = 0{,}64\,s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

et le diamètre du noyau:

$$d_1 = 0{,}9\,d - 1{,}3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31).$$

§ 56.

Diamètres des boulons, écrous, têtes de boulons.

Le diamètre des boulons se détermine très-souvent au sentiment. Pour une force P, agissant dans la direction de l'axe du filet, on doit prendre (Morin):

$$\left.\begin{aligned} P &= 2.2\,d_1{}^2 \\ d_1 &= 0{,}67\sqrt{P} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Les écrons présentent généralement la forme hexagonale; ceux à quatre pans se rencontrent plns rarement et ce n'est qu'exceptionellement qu'on en emploie de cylindriqnes. Nous nons bornerons ici à donner les régles relatives à l'établissement des écrons à six pans.

Leur hanteur est ordinairement égale au diamètre d du filet, afin que la pression, par unité de surface, sur le filet, reste comprise entre $0^k,5$ et 1^k. Pour le diamétre du cercle circonscrit à l'hexagone, on au carré, qui délimite les faces de l'écrou, on prend généralement,

pour les écrous travaillés:

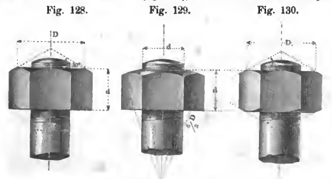
$$D = 5 + 1{,}4d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

pour les écrous qui doivent rester bruts:

$$D_1 = 7 + 1\cdot 45\,d \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Dans les écrous travaillés, la snrface snpérieure est ordinairement arrondie suivant un cône, dont le diamétre à la base est D et l'angle, à la même base, 30° (fig. 128), ou encore suivant une sphère

Fig. 128. Fig. 129. Fig. 130.



dont le rayon est égal à $^5/_8$ D (fig. 129). Dans les écrons qui doivent rester bruts, on se borne à abattre les angles vifs, en haut

et en bas, suivant la surface conique définie précédemment (fig. 130). Sur la face inférieure des écrous travaillés, les angles ne sont abattus que d'une manière insensible. La disposition sphérique, très facile à réaliser, surtout pour les écrous à six pans, doit être adoptée, de préférence à l'autre.

La rondelle de serrage doit avoir, pour diamètre, $U = {}^4/_3\, D$ ou ${}^4/_3\, D_1$ et, pour épaisseur, $u = \frac{D}{10}$. Le bord supérieur est abattu ou creusé en quart de rond.

Les têtes de boulons sont habituellement terminées par une surface plane et sont à quatre ou à six pans; travaillées ou brutes, elles ont, pour diamètre circonscrit, $D = 5 + 1{,}4\, d$ et, pour hauteur, $h = 0{,}7\, d$. C'est d'après ces données qu'ont été calculées les valeurs du tableau suivant.

§ 57.

Tableau des dimensions des boulons à filets triangulaire.

Fig. 131.

Dans ce tableau on a représenté par

- d le diamètre extérieur du filet,
- d_1 le diamètre du noyau du filet,
- n le nombre de pas sur une longueur de 10^{mm},
- D le diamètre du cercle circonscrit à l'hexagone ou au carré, pour un écrou travaillé,
- D_1 la même dimension, pour un écrou laissé brut,
- U et U_1 les diamètres de la rondelle de serrage finie et brute,
- u l'épaisseur de cette rondelle,
- h la hauteur de la tête du boulon,
- P la charge, agissant dans la direction de l'axe du filet,
- d_w le diamètre, en pouces anglais, du boulon qui, dans l'échelle de Whitworth, se rapproche le plus de d,
- n_w le nombre de pas correspondant, par pouce anglais.

Exemple. Pour un boulon, destiné à supporter une traction de 1200^k, on doit, d'après la table, prendre le n° 9; on a alors, pour le diamètre, $d =$

27^{mm} et, pour le pas, $p = {}^{10}/_3$; l'écrou, en supposant qu'il doive rester brut, doit avoir, comme diamètre, 47^{mm} et, comme hauteur, 27^{mm}; les dimensions analogues sont, pour la tête, 47^{mm} et 19^{mm}, pour la rondelle de serrage, 63^{mm} et 5^{mm}.

Boulon d	Noyau d_1	Filet	Ecrou		Rondelle			Tête	Charge	Whitworth	
		n	D poli	D_1 brut	U polie	U_1 brute	u	h	P	d_w	n_w
6	4,1	7	13	17	17	21	2	4	37	$^1/_4$	20
8	5,9	6	16	19	21	25	2,5	6	77	$^5/_{16}$	18
10	7,7	$5^1/_2$	19	22	25	29	3	7	130	$^3/_8$	16
12	9,5	5	22	25	29	33	3	8	199	$^1/_2$	12
15	12,2	$4^1/_2$	26	30	34	40	4	10	327	$^5/_8$	11
18	14,9	4	30	34	40	45	4	13	488	$^3/_4$	10
21	17,6	$3^3/_4$	34	38	45	51	4	15	681	$^7/_8$	9
24	20,3	3	39	43	52	57	4	17	907	1	8
27	23,0	3	43	47	57	63	5	19	1164	$1^1/_8$	7
30	25,7	$2^1/_2$	47	52	63	69	5	21	1453	$1^1/_4$	7
34	29,3	$2^1/_2$	53	57	70	76	5	24	1889	$1^3/_8$	6
38	32,9	$2^1/_2$	58	64	77	85	6	27	2881	$1^1/_2$	6
42	36,5	$2^1/_8$	64	69	85	92	6	29	2931	$1^5/_8$	5
46	40,1	$2^1/_8$	69	75	92	100	7	32	3528	$1^3/_4$	5
50	43,1	$1^7/_8$	75	81	100	108	7	35	4087	$1^7/_8$	$4^1/_2$
55	48,2	$1^7/_8$	82	88	105	114	8	38	5111	2	$4^1/_2$
60	52,7	$1^5/_8$	89	95	116	124	9	42	6110	$2^1/_4$	4
65	57,2	$1^5/_8$	96	102	125	133	10	45	7198	$2^1/_2$	4
70	61,7	$1^3/_8$	103	109	134	142	10	49	8375	$2^3/_4$	$3^1/_2$
75	66,2	$1^3/_8$	110	117	143	152	11	52	9641	3	$3^1/_2$

Remarque. Il est évident qu'on pourrait adopter, pour l'exécution des écrous et des têtes, des proportions différentes de celles que nous avons admises; mais le choix d'un système unique de dimensions, une fois arrêté pour une usine, il est essentiel de ne plus s'en écarter et de l'appliquer rigoureusement pour toutes les pièces. On trouvera au § 59 un procédé pratique qui se rapporte à ce sujet.

§ 58.

Règles de Sellers pour les vis.

L'américain Sellers a fait connaître, il y a quelques années, un système de nombres proportionnels pour l'établissement des

boulons de fixation (1). Ce système, dont l'usage s'est répandu rapidement en Amérique, présente sur celui de Whitworth quelques avantages et mérite, par cela même, d'attirer l'attention des constructeurs. La méthode de Sellers, comme celle de Whitworth, détermine l'inclinaison, la profondeur et la forme du filet; elle donne, en outre, l'épaisseur des écrous à six ou à quatre pans. D'après Sellers, en conservant les notations du § 56 et en rapportant toutes les mesures au pouce anglais, on doit prendre (fig. 132):

$$s = 0{,}24 \sqrt{d + 0{,}625} - 0{,}175 \quad . \quad . \quad . \quad (35).$$

Fig. 132.

La section de chaque filet est un triangle équilatéral; l'angle au sommet est donc de 60° et la hauteur $t_0 = 0{,}866\,s$. A l'intérieur et à l'extérieur des filets, les angles vifs sont remplacés par des parties planes, menées à une distance égale à $^1/_8\, t_0$, de telle sorte que la profondeur des filets t est, en réalité:

$$t = {^3/_4}\, t_0 = 0{,}65\, s \quad . \quad . \quad (36).$$

Le diamètre du noyau est alors:

$$d_1 = d - 0{,}312 \sqrt{d + 0{,}625} + 0{,}227 \quad (37).$$

Pour le diamètre minimum de l'écrou (à six ou à quatre pans), Sellers prend:

$$D = 0{,}125 + 1{,}5\, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

La machine à tailler les vis, établie par Sellers, permet d'obtenir, au moyen d'organes auxiliaires convenables, toutes les vis de son échelle et avec une telle précision qu'elles peuvent être employées, comme tarauds, pour la fabrication de leurs écrous. Il est plus difficile d'arriver à des dispositifs analogues, offrant la même précision, pour les filets de Whitworth, en raison notamment de la forme arrondie de ces filets. C'est pour ce motif que les vis de Whitworth, provenant de fabriques différentes, ne sont pas toujours identiques.

En rapportant les dimensions au millimètre, les formules précédentes deviennent:

(1) Franklin, Institute, Avril 1864. Les formules que nous donnons ici ont été légèrement modifiées, pour faciliter leur comparaison avec celles que nous avons indiquées précédemment.

$$\left.\begin{aligned} s &= 1{,}208\sqrt{d+16} - 4{,}43 \\ d_1 &= d - 1{,}57\sqrt{d+16} + 5{,}75 \\ D &= 3{,}17 + 1{,}5\,d \end{aligned}\right\} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (39).$$

Lorsqu'on fait usage de l'échelle métrique, les nombres donnés par ces formules peuvent être légèrement arrondis sans inconvénients.

Pour	$d = 20$	84
la formule (29) donne	$s = 2{,}6$	7,72
et la formule (39)	$s = 2{,}8$	7,65

ce qui montre que les inclinaisons de l'échelle de Whitworth diffèrent très-peu de celles de Sellers.

§ 59.

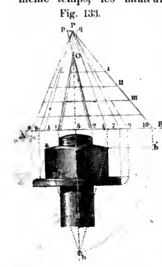
Échelle de proportion pour les écrous.

Dans les usines de construction, où l'on a à exécuter des écrous d'une manière régulière et en grand nombre, il convient, pour prévenir les variations dans les dimensions et éviter des répétitions inutiles, de dessiner, une fois pour toutes, la série des écrous de toutes les grandeurs usuelles. Si, comme on a l'habitude de le faire dans un grand nombre d'usines, un exemplaire de ces tracés-types reste à l'atelier et un autre au bureau de dessins, on arrive sans peine à obtenir une grande régularité et une grande exactitude dans cette fabrication, qui, malgré son peu d'étendue, joue un rôle si important dans la construction des machines. Ces tracés, qui reproduisent, sous une forme sensible, les dimensions des tableaux précédents, doivent, surtout pour le bureau de dessins, être tous réunis en une figure unique. La fig. 133 représente un tracé de ce genre, qui constitue ce qu'on peut appeler une échelle de proportion. Dans cette figure, qui se rapporte au cas des écrous travaillés, chacune des lignes transversales I, II, III ... fournit les dimensions des différentes parties de l'écrou, correspondant au boulon, dont le diamètre est compris, sur cette transversale, entre les lignes 0 — 1 et 0 — 2.

Pour obtenir un tracé de ce genre, on commence par dessiner l'écrou correspondant au plus grand diamètre de boulon *d*, dont on puisse avoir à faire usage; on se sert d'ailleurs, à cet effet, des nombres proportionnels, indiqués dans les paragraphes précédents. Cela fait, on reporte toutes les dimensions sur une ligne

AB, perpendiculaire à l'axe du boulon, et on joint les points 1 et 2, qui correspondent au diamètre d du boulon, à un point quelconque O, pris sur le prolongement de la ligne d'axe. On mène ensuite, parallèlement à AB, les lignes I, II, III ..., à des distances telles que les longueurs de ces lignes, comprises entre les rayons $O\,1$ et $O\,2$, représentent les divers diamètres de boulons, pour lesquels on veut établir la série des écrous, et, en même temps, les hauteurs de ces écrous. Toutes les autres dimensions sont exprimées en fonction de l'unité $D = 5 + 1.4\,d$ et lui sont directement proportionnelles; elles sont donc toutes nulles, quand D est lui-même nul, c'est-à-dire quand on a $5 + 1.4\,d = 0$, d'où on tire $d = -\frac{5}{1.4} = -3^{mm},6$. Si donc on prolonge, au delà du point O, les rayons $1\,O$ et $2\,O$, jusqu'aux points p et q, de telle sorte que la longueur pq, parallèle à AB, soit précisément égale à $3^{mm},6$, le point de rencontre P de cette ligne pq avec l'axe donne le point qui, dans le système de coordonnées adopté, correspond à $D = 0$.

Fig. 133.



Si maintenant on mène les rayons $P\cdot 3$, $P\cdot 4$, $P\cdot 5$ ..., ces lignes déterminent, sur chacune des lignes transversales I, II, III ..., les dimensions de l'écrou pour le boulon dont le diamètre extérieur est représenté sur cette même transversale. On peut ainsi relever, sur ce tracé, toutes les dimensions d'un écrou, même les moins importantes, comme, par exemple, l'épaisseur de la rondelle $7 - 9$, son chanfrein extérieur etc. — La distance $5 - 6$ représente la longueur du côté de l'hexagone, et $3 - 10$ la longueur $ab' = ab$ du rayon de courbure de la surface sphérique, qui termine l'écrou à sa partie supérieure.

Les échelles de proportion de cette espèce sont, comme on le voit, faciles à établir. On peut en construire d'analogues pour les écrous qui doivent rester bruts, et même pour d'autres pièces qui se rattachent aux boulons, comme par exemple, les plaques d'ancrage (fig. 147). Les tracés de ce genre présentent

une utilité incontestable, toutes les fois que les dimensions doivent être déterminées par des nombres proportionnels. Aussi, dans le cours de cet ouvrage, indiquerons-nous souvent, au moins comme exemples, des tracés d'échelles pour certains organes de machines. Parmi les pièces élémentaires, auxquelles se prêtent très-bien les échelles de proportion, nous pouvons citer particulièrement les paliers. Dans les usines où on les a adoptées, les modeleurs arrivent rapidement à exécuter, à l'aide de ces échelles, tous les numéros d'une série. En résumé, l'échelle graphique est un des moyens accessoires dont le constructeur peut se servir avec avantage, pour réduire le temps qu'absorbent ordinairement les détails et réserver, par suite, son activité pour les pièces, de forme nouvelle, dont l'exécution présente des difficultés.

§ 60.

Poids des écrous, des rondelles et des têtes de boulons,
calculés d'après les dimensions du tableau du § 55.

Boulon d	Ecrou		Rondelle		Tête	Boulon d	Ecrou		Rondelle		Tête
	poli	brut	polie	brute	□		poli	brut	polie	brute	□
6	0,006	0,010	0,003	0,005	0,006	34	0,402	0,503	0,098	0,120	0,526
8	0,011	0,016	0,005	0,008	0,011	38	0,528	0,709	0,142	0,181	0,710
10	0,018	0,026	0,009	0,012	0,020	42	0,701	0,888	0,170	0,206	0,945
12	0,027	0,040	0,012	0,015	0,031	46	0,874	1,141	0,232	0,287	1.202
15	0,048	0,070	0,020	0,028	0,056	50	1,122	1,436	0.270	0,309	1,544
18	0,073	0,104	0,027	0,038	0,089	55	1.469	1,898	0,369	0,442	2,035
21	0,107	0,147	0,036	0,046	0,134	60	1,868	2,310	0,477	0,581	2,609
24	0,161	0,222	0,045	0,057	0,201	65	2,844	2,902	0,559	0,668	3,357
27	0,221	0,278	0,066	0,083	0,282	70	2,925	3,541	0,713	0,860	4,073
30	0,281	0,381	0,079	0,101	0,365	75	3,572	4,384	0,897	1,032	4,982

Dans l'évaluation des poids de ce tableau, pour les écrous, on a négligé les vides des filets et les arrondissements des angles; ces poids sont donc légèrement forcés. Les poids des boulons eux-mêmes sont donnés par la table du paragraphe suivant; la longueur du boulon doit s'évaluer, en prenant la distance comprise entre la tête et l'extrémité des filets.

Exemple. 100 boulons de 21^{mm} de diamètre et de 200^{mm} de longueur, avec leurs écrous et leurs rondelles bruts, ont, d'après les tables (§§ 60 et 61), un poids de

$$100 \cdot 2{,}00 \cdot 0{,}269 + 100\,(0{,}147 + 0{,}046 + 0{,}134) = 53{,}8 + 32{,}7 = 86^k{,}5,$$

ce qui donne, pour chaque boulon complet, $0^k{,}865$. En supposant l'écrou poli, ainsi que la rondelle, ce dernier poids devrait être diminué de $0{,}147 + 0{,}046 - 0{,}107 - 0{,}036 = 0^k{,}05$.

§ 61.

Poids des barres de fer rond.

Les poids, consignés dans la table suivante, ont été calculés par la formule $G = 100 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 . 0{,}00000779 = 0{,}000611825 d^2$, dans laquelle on a admis 7,79 pour le poids spécifique du fer forgé. La table a d'ailleurs été étendue assez loin, pour qu'elle puisse servir au calcul des poids des grosses pièces cylindriques, des arbres de transmissions, etc. Le poids d'une pièce cylindrique en fonte peut se déduire de celui de la pièce en fer, de mêmes dimensions, en multipliant ce dernier par 0,93; pour le bronze, le coefficient à adopter est 1,092. Si on a à évaluer des pièces de diamètres supérieurs à ceux de la table, il sera toujours possible, par un simple déplacement de virgule, d'obtenir, au moins approximativement, le poids de ces pièces.

Exemple. Un arbre en fer forgé, de 3^m de longueur et de 485^{mm} de diamètre, pèse approximativement (colonne 4, page 153, lignes 23 et 24)

$$30 \cdot \frac{141 + 146{,}9}{2} = 30 \cdot 143{,}95, \text{ soit } 4319^k.$$

Le même arbre, exécuté en fonte, pèserait $0{,}93 \cdot 4319 = 4017^k$. Un cylindre en bronze, de 500^{mm} de longueur et 50^{mm} de diamètre, a (col. 4, ligne 25) un poids de $1{,}092 \cdot 5 \cdot 1{,}53 = 8^k{,}35$. Un fil de fer, de 1^{mm} de diamètre, a, pour une longueur de 100^m (colonne 2, ligne 1), un poids de $1000 \cdot 0{,}0006 = 0^k{,}6$.

Table des poids des barres de fer rond de 100^{mm} de longueur.

d	*G*	*d*	*G*	*d*	*G*	*d*	*G*	*d*	*G*
1	0,0006	26	0,414	51	1,591	76	3,534	101	6,241
2	0,0024	27	0,446	52	1,654	77	3,628	102	6,365
3	0,0055	28	0,480	53	1,719	78	3,722	103	6,491
4	0,0098	29	0,515	54	1,784	79	3,818	104	6,617
5	0,0153	30	0,551	55	1,851	80	3,916	105	6,745
6	0,022	31	0,588	56	1,919	81	4,014	106	6,874
7	0,030	32	0,627	57	1,988	82	4,113	107	7,005
8	0,039	33	0,666	58	2,058	83	4.215	108	7,136
9	0,050	34	0,707	59	2,129	84	4,317	109	7,275
10	0,061	35	0,749	60	2,203	85	4,420	110	7,403
11	0,074	36	0,793	61	2,277	86	4,525	111	7,538
12	0,088	37	0,838	62	2,352	87	4,631	112	7,675
13	0,103	38	0,883	63	2,428	88	4,738	113	7,812
14	0,120	39	0,931	64	2,506	89	4,846	114	7,951
15	0,138	40	0,979	65	2,585	90	4,956	115	8,091
16	0,157	41	1,028	66	2,665	91	5,067	116	8,233
17	0,177	42	1,079	67	2,746	92	5,178	117	8,375
18	0,198	43	1,131	68	2,829	93	5,292	118	8,519
19	0,221	44	1.184	69	2,913	94	5,406	119	8,664
20	0,245	45	1,239	70	2,998	95	5,522	120	8,810
21	0,270	46	1,295	71	3,084	96	5,639	121	8,958
22	0,296	47	1,352	72	3,172	97	5,757	122	9,106
23	0,324	48	1,410	73	3,260	98	5,876	123	9,256
24	0,352	49	1,469	74	3,350	99	5,996	124	9,407
25	0,382	50	1,530	75	3,442	100	6,118	125	9,560

Table des poids des barres de fer rond de 100mm de longueur.

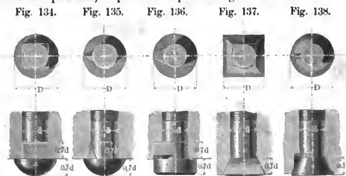
d	*G*	*d*	*G*	*d*	*G*	*d*	*G*	*d*	*G*
126	9,713	151	13,950	176	18,952	201	24,718	226	30,249
127	9,868	152	14,136	177	19,168	202	24,965	227	30,527
128	10,024	153	14,322	178	19,385	203	25,213	228	30,805
129	10,181	154	14,510	179	19,603	204	25,462	229	31,085
130	10,340	155	14,699	180	19,823	205	25,712	230	32,366
131	10,500	156	14,889	181	20,044	206	25,963	231	32,648
132	10,660	157	15,081	182	20,266	207	26,216	232	32,931
133	10,823	158	15,274	183	20,489	208	26,470	233	33,215
134	10,986	159	15,468	184	20,714	209	26,725	234	33,401
135	11,151	160	15,663	185	20,940	210	26,975	235	33,788
136	11,316	161	15,859	186	21,167	211	27,239	236	34,076
137	11,483	162	16,057	187	21,395	212	27,498	237	34,366
138	11,652	163	16,256	188	21,624	213	27,758	238	34,656
139	11,821	164	16,456	189	21,855	214	28,019	239	34,948
140	11,992	165	16,657	190	22,087	215	28,282	240	35,241
141	12,164	166	16,859	191	22,320	216	28,545	241	35,535
142	12,337	167	17,063	192	22,554	217	28,810	242	35,831
143	12,511	168	17,268	193	22,790	218	29,076	243	36,128
144	12,686	169	17,474	194	23,027	219	29,344	244	36,426
145	12,864	170	17,682	195	23,265	220	29,612	245	36,725
146	13,042	171	17,890	196	23,504	221	29,882	246	37,025
147	13,221	172	18,100	197	23,744	222	30,153	247	37,327
148	13,301	173	18,311	198	23,986	223	30,425	248	37,630
149	13,583	174	18,524	199	24,229	224	30,699	249	37,934
150	13,766	175	18,737	200	24,473	225	30,974	250	38,239

§ 62.

Types divers de boulons de fixation.

Pour les têtes de boulons, au lieu des formes à quatre ou à six pans, on a recours, dans certaines circonstances, aux dispositions spéciales, représentées par les fig. 134 à 138.

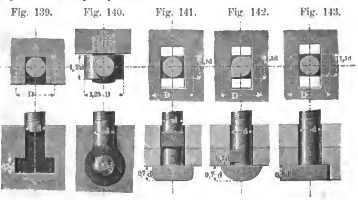
Fig. 134. Fig. 135. Fig. 136. Fig. 137. Fig. 138.



Dans les deux dernières, les têtes sont fraisées; dans toutes, le boulon est muni d'une partie saillante (ergot), destinée à l'empêcher de tourner, quand on agit sur l'écrou.

Les figures suivantes représentent une série de modifications, plus radicales encore, dans la forme des têtes de boulons. Dans la fig. 139, la tête a la forme d'une ancre et s'introduit latéralement dans une des pièces à relier; souvent aussi on donne à cette tête une forme ronde (pointillée sur la figure), de manière à pouvoir la noyer plus facilement.

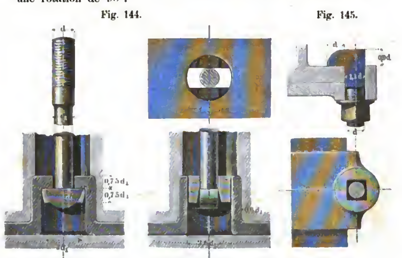
Fig. 139. Fig. 140. Fig. 141. Fig. 142. Fig. 143.



La fig. 140 représente un boulon à oreilles, qu'on trouve fréquemment employé pour les boites à étoupes. Dans les fig. 141 à 143, la tête, qui a la forme d'une ancre, s'introduit à travers une ouverture allongée, ménagée dans les pièces à relier; on la fait ensuite porter sur les parties pleines de la pièce inférieure, en la faisant tourner de 90°. Ces trois types, comme les précédents, sont munis de saillies d'arrêt, qui ont pour but de permettre le serrage de l'écrou; dans la fig. 143, la tête elle-même est disposée de manière à remplir cette fonction. Les deux derniers modes de fixation sont d'une grande utilité dans la pratique et on les trouve fréquemment employés, surtout pour la fixation des plaques de paliers (voir plus loin).

La fig. 144 représente une disposition de boulon de fondation, avec une tête à ancre, qui vient se serrer contre une plaque en fonte. Ici encore le boulon s'engage par la partie supérieure, pour venir prendre ensuite sa position définitive, par une rotation de 90°.

Fig. 144. Fig. 145.



Dans le cas d'une fondation en maçonnerie, on commence par percer un trou dans la pierre, pour le passage du boulon, et on place, à la partie inférieure, une pièce en fonte, convenablement disposée pour recevoir la tête. Cette disposition offre, dans certains cas, des avantages très-réels; elle permet, en effet, de retirer le boulon à un moment quelconque et dispense de ménager,

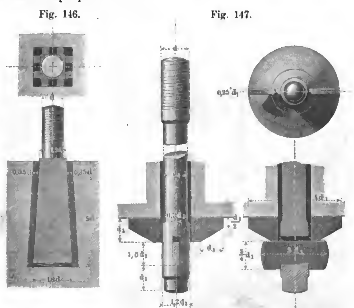
dans le massif, les caniveaux qui sont indispensables dans le cas des boulons de fixation à clavettes (fig. 147).

La fig. 145 représente un boulon à crochet; la partie carrée, qui se trouve au dessous du crochet, empêche la tête de tourner, lorsqu'on serre l'écrou. Ce type de boulon convient très-bien pour la fixation des paliers et celle des pièces de fermes en fer dans les bâtiments.

Dans certains cas, il est difficile, ou même impossible, d'employer des boulons avec une tête; on peut alors recourir à l'une des dispositions suivantes. La fig. 146 représente un boulon de scellement, terminé par une partie à faces inclinées et à section carrée, qui s'engage dans un massif en pierre et qu'on fixe ensuite, en coulant du plomb, dans le vide existant entre le fer et la pierre.

La fig. 147 représente un boulon de fondation à clavette, avec contreplaque en fonte.

Fig. 146. Fig. 147.



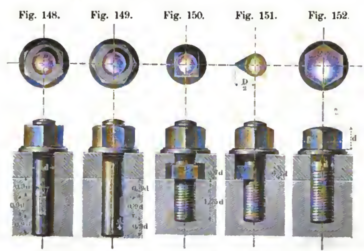
Dans les fig. 148 et 149 la tête est remplacée par des clavettes, l'une qui traverse le boulon, l'autre qui le serre latéralement. Ces deux figures indiquent, en même temps, deux

modes de représentation, à petite échelle, des écrous de boulons; le premier, qui est le plus simple (fig. 148), convient spécialement pour les petits dessins. Ces deux tracés supposent, d'ailleurs, les écrous établis d'après les types des fig. 129 à 131.

Les fig. 150 et 151 représentent des boulons filetés, s'engageant directement dans le métal d'une des pièces à relier; le serrage de la seconde pièce s'effectue au moyen d'un écrou.

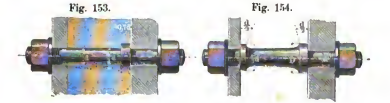
Dans la fig. 152, les pièces sont reliées, l'une à l'autre, par une simple vis à tête; dans les vis de ce genre, de faibles dimensions, la tête, qui est cylindrique ou en forme de champignon, porte une rainure dans laquelle s'engage un tournevis; on les désigne alors sous le nom de vis à tête fendue.

Fig. 148. Fig. 149. Fig. 150. Fig. 151. Fig. 152.



La fig. 153 donne le mode d'assemblage de trois pièces, au moyen d'un boulon, terminé par deux parties filetées et muni, en un point intermédiaire, d'une partie saillante, logée dans la pièce comprise entre les deux autres; la partie saillante a souvent

Fig. 153. Fig. 154.



une section carrée, mais on emploie, de préférence, la forme circulaire pour les pièces d'une exécution soignée.

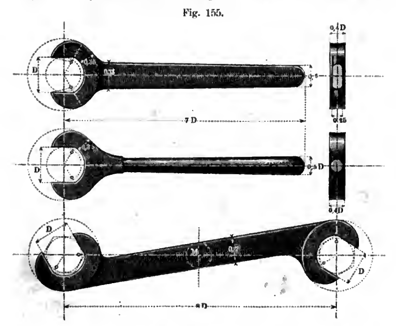
La fig. 154 est une entretoise, destinée à relier deux pièces, dont l'écartement doit être maintenu invariable.

§ 63.

Clefs à écrous.

Pour saisir et faire tourner les écrous ou les têtes de boulons, on fait usage de leviers d'une forme spéciale, qu'on désigne sous le nom de clefs. Les clefs simples, que représente la fig. 155 et qui sont destinées à agir sur des écrous ou des têtes

Fig. 155.



à quatre ou à six pans, se composent d'une partie creuse, en forme de fourche, terminée par une tige à faces planes ou à section circulaire; cette dernière forme est employée de préférence pour les clefs qui doivent être fréquemment maniées. La figure indique les dimensions qu'il convient de donner aux différentes parties, en les rapportant au diamètre $D = 5 + 1,4\ d$ de l'écrou. Les

clefs doubles portent une mâchoire à chaque extrémité. Lorsqu'on dispose d'un espace restreint pour le mouvement de la tige, on fait usage d'une clef, dont les mâchoires sont inclinées, sur la ligne qui joint leurs centres, d'un angle égal à la moitié de l'angle au centre du polygone, qui constitue le profil de l'écrou; cette inclinaison est, par suite, de 30°, pour les écrous à six pans, et de 45°, pour ceux à quatre pans. Les clefs de ce genre, qu'on désigne aussi sous le nom de clefs en *S*, présentent cet avantage qu'en faisant alternativement usage des deux mâchoires, de manière à faire tourner chaque fois l'écrou de la moitié de l'angle du polygone, soit de 30°, comme dans notre figure, la tige de la clef, au commencement de chaque douzième de tour, se retrouve exactement dans la même position. Il en résulte que les deux mâchoires doivent être symétriquement placées par rapport à cette tige. A cet effet, du point milieu *M* de la longueur de la clef, avec un rayon égal à la moitié de la largeur de la tige, on décrit un cercle, auquel on mène des tangentes parallèles, qui déterminent les faces de cette tige. Pour la construction des clefs, comme pour celle des écrous, nous ne saurions trop recommander l'emploi d'échelles de proportions, établies d'après les indications de la fig. 155.

§ 64.

Boulons de sureté.

Les boulons de fixation, établis d'après les règles que nous avons indiquées précédemment ou d'autres analogues, présentent une inclinaison de filet assez faible ($4^\circ \frac{1}{2}$ pour $d = 6^{mm}$, $1^\circ \frac{2}{3}$ pour $d = 75^{mm}$) pour que la pression, qui s'exerce suivant l'axe, ne soit pas capable de vaincre la résistance du frottement et d'amener, par suite, le desserrage de l'écrou. Toutefois, dans certains cas exceptionnels, il peut arriver que, sous l'action d'ébranlements et de chocs continuels, l'écrou finisse par prendre un certain jeu et que, par suite, la sécurité de l'assemblage se trouve fortement compromise. Cet effet est encore bien plus à redouter, lorsque le boulon n'a pas été serré complètement à fond, mais simplement d'une manière modérée, comme cela a lieu dans le cas où le boulon a surtout pour but d'assurer une position déterminée à l'une des pièces à relier, dans les fixations de paliers, par exemple.

Cette insécurité, que présente le mode ordinaire de boulonnage et qui est déjà sensible pour les machines à vapeur fixes, offre encore de plus graves inconvénients dans les locomotives et les machines de vaisseaux, principalement dans les navires de guerre, par suite du recul des canons. Dans tous les cas de ce genre, on munit les boulons de dispositifs de sureté, dont nous allons donner quelques exemples.

Le contre-écrou (fig. 156) constitue un des modes les plus anciens et les plus employés. Les deux écrous se terminent par des surfaces planes parfaitement dressées, de manière à s'appliquer exactement l'une contre l'autre. Quelques constructeurs croient devoir, pour motif de résistance, placer le contre-écrou au dessous de l'écrou principal; mais cette disposition n'a, en réalité, aucune utilité, car, au point de vue de la résistance des filets, il suffirait de donner à cet écrou une hauteur égale à $\frac{d}{3}$, c'est-à-dire le tiers de celle qu'on lui donne ordinairement. La fig. 157 représente une goupille fendue, traversant le boulon, qu'on trouve souvent employée, concurremment avec le contre-écrou.

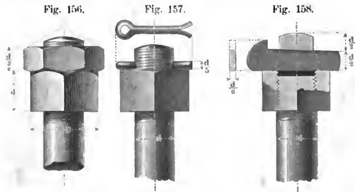


Fig. 156. Fig. 157. Fig. 158.

Dans la fig. 158, la sécurité de l'assemblage est obtenue au moyen d'une clavette, et cela d'une manière très-satisfaisante, puisque, dans le cas où on se trouve obligé de resserrer l'écrou, cette clavette peut être chassée davantage, de manière à toujours s'appuyer sur lui. Souvent aussi la goupille fendue et la clavette traversent directement l'écrou ou s'engagent dans une entaille, ménagée sur la face supérieure de cet écrou. Ces trois dispositions assurent l'invariabilité de position de l'écrou et du filet

de la vis. On obtient une sécurité du même genre à l'aide des trois dispositifs suivants, dans lesquels la tête et, par suite, la vis sont invariablement reliées à la pièce qui porte le filetage de l'écrou. La disposition de la fig. 159 se rapporte à la suspension des ressorts dans les locomotives (Borsig), celle de la fig. 160 à la fermeture des boites de graissage des têtes de bielles et enfin la fig. 161 représente une vis de fixation.

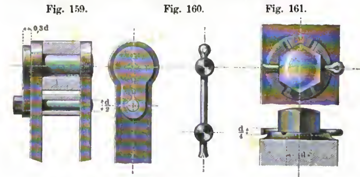


Fig. 159. Fig. 160. Fig. 161.

Dans les figures suivantes, les dispositions adoptées ont simplement pour résultat d'empêcher l'écrou de tourner par rapport à une des pièces à relier; elles ne sont donc efficaces qu'à la condition que la vis elle-même ne puisse prendre aucun mouvement de rotation. Celle de la fig. 162 s'emploie pour les boulons de chapeaux des paliers; la goupille s'appuie en son milieu contre une saillie, qui l'empêche de se courber. Celle de la fig. 163 se rencontre souvent dans les pistons de machines à vapeur, pour les boulons qui relient le couvercle au corps même du piston. La fig. 164 est une véritable clef de position, employée pour les boulons de chapeaux de paliers; en vertu de la double

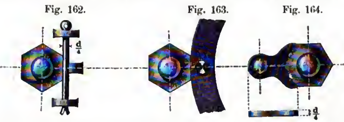


Fig. 162. Fig. 163. Fig. 164.

entaille dont elle est munie, cette clef permet de donner à l'écrou une rotation d'un douzième de tour seulement, tandis qu'avec

les autres dispositions, cet écrou doit faire un sixième de tour pour revenir à une position de fixation.

Dans le dispositif de Pregel (fig. 165), l'écrou peut tourner d'un huitième de tour entre deux positions de fixation. L'arrêt se produit sur une rondelle, faisant corps avec l'écrou, au moyen d'une clef, qui glisse dans une rainure et qui peut y être fixée, lorsque c'est nécessaire.

La fig. 166 représente une disposition qu'on emploie assez fréquemment pour les boulons de presse-étoupes, principalement dans les locomotives. La petite roue dentée, qui sert à empêcher le desserrage, fait corps avec l'écrou, comme dans la figure précédente.

Fig. 165. Fig. 166.

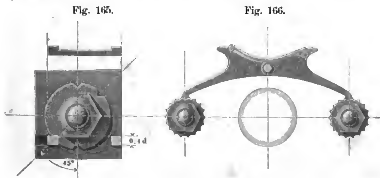
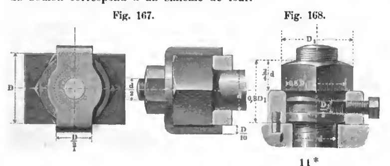


Fig. 167. Boulons de suspension des ressorts de locomotives (Borsig). La tension se produit par la rotation du boulon, sur la tête duquel se trouve fixée une chape de sureté, dont les faces viennent saisir le cadre, qui transmet la charge à l'extrémité du ressort: la différence entre deux positions successives du boulon correspond à un sixième de tour.

Fig. 167. Fig. 168.



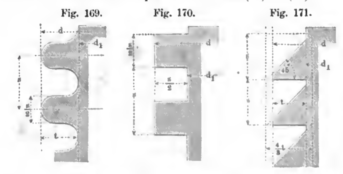
La fig. 168 représente un écrou avec vis de serrage; cette disposition (due à Penn), qui permet une rotation aussi faible qu'on le désire, présente de grands avantages pour les paliers, les suspensions de ressorts, etc. Il convient de donner à l'écrou des dimensions un peu supérieures à celles qu'on admet dans les cas ordinaires, afin que la partie inférieure, correspondant à la rainure, ne se trouve pas trop mince. On prend donc, en général, pour le diamètre, la valeur D_1 fournie par la formule (34). En raison de ses faibles dimensions, la vis de serrage doit être en acier. Cette disposition d'écrou de sureté est très-employée dans les machines de navires à vapeur.

§ 65.

Formes de filets particulières.

Au lieu du filet à section triangulaire (de Whitworth), on emploie souvent, dans les vis en bronze, le filet arrondi que représente la fig. 169; la hauteur du pas s et la profondeur t du filet se déterminent d'après les formules (29) et (30).

Fig. 169. Fig. 170. Fig. 171.



Pour les vis en fer, soumises à des pressions considérables et qui doivent être fréquemment manœuvrées, on adopte très-souvent le filet carré (fig. 170); depuis quelques années, pour les vis, dans lesquelles la pression s'exerce toujours dans le même sens, on est même revenu au filet à section trapézoïdale (fig. 171) des anciennes vis en bois.

Dans ces deux dernières espèces de vis, la profondeur du filet est donnée par la formule:

$$t = \frac{1}{2}(2 + 0{,}009\, d) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40).$$

Le diamètre du noyau a, par suite, pour valeur:

$$d_1 = 0{,}91\, d - 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41).$$

Dans les vis à filet carré, la hauteur du pas est:

$$s = 2\, t = 2 + 0{,}09\, d$$

et dans les autres (section trapézoïdale): . . . . . . (42).

$$s = {}^4/_3\, t = {}^4/_3 + 0{,}06\, d$$

P et d_1 se calculent par la formule (32); pour que l'écrou présente un nombre de filets suffisant, on lui donne pour hauteur, dans les vis à filet carré, 1,5 d, et dans les vis à filet trapézoïdal, d. Toutes les données précédentes se rapportent d'ailleurs spécialement aux boulons employés comme boulons de fixation.

§ 66.

Vis renforcées. Vis de pression.

Les dimensions que nous avons indiquées précédemment se rapportent aux vis qu'on peut considérer comme normales; dans quelques cas particuliers, il convient d'augmenter les dimensions que donnent nos formules pour une charge déterminée; c'est ce qu'on doit faire, par exemple, pour les boulons de boites à étoupes, ceux des brides d'assemblage de tuyaux, etc. Les vis qu'on emploie alors constituent, par comparaison avec les vis normales, ce qu'on peut appeler les vis renforcées. On peut admettre comme règle, pour la détermination des dimensions des filets, que, dans les vis renforcées, la section du filet et la hauteur de l'écrou doivent être les mêmes que dans les vis normales, soumises aux mêmes charges (ou équivalentes).

Les vis de freins, de presses, de coussinets et, d'une manière générale, toutes les vis, qui sont destinées à exercer des pressions, doivent être déterminées par des règles différentes de celles des boulons de fixation. En premier lieu, elles doivent être suffisamment résistantes, c'est-à-dire que la pression, par unité de surface du filet, doit être suffisamment petite, pour que l'usure ne soit pas trop rapide.

Dans les cas ordinaires, après avoir évalué, aussi exactement que possible, la charge P, on calcule le diamètre d_1 du noyau, à l'aide de la formule (32). Lorsqu'on se trouve obligé de prendre pour une vis le plus faible diamètre possible, il est essentiel de veiller, avec le plus grand soin, à ce que la

pression de l'écrou s'exerce constamment sur toute la circonférence et jamais d'un seul côté; dans ce cas, on peut, à la rigueur, aller sans danger, pour d_1, jusqu'à la valeur limite donnée par la formule:

$$P = 4{,}71\, d_1^{\,2}, \quad \text{ou} \quad d_1 = 0{,}46\sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43).$$

Pour le filet, on peut adopter la section carrée de la fig. 170 ou la section trapézoïdale de la fig. 171. Avec ces deux formes on peut prendre, en exécution, pour la profondeur t du filet:

$$t = \frac{d}{10} = \frac{d_1}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

d'où on déduit: pour la vis à filet carré: $s = \frac{d}{5} = \frac{d_1}{4}$

et, pour la vis à filet trapézoïdal: $s = \frac{2}{15}\, d = \frac{d_1}{6}$ (45).

La formule (43) peut être employée pour les boulons à section triangulaire des ressorts de suspension des locomotives, puisque, dans ces pièces, la position de l'écrou, par rapport au filet, est parfaitement assurée.

Dans quelques cas, du reste assez rares, la vis doit avoir une longueur assez grande, pour qu'on ait à redouter la tendance à la flexion par compression. Lorsqu'il en est ainsi, on calcule le diamètre du noyau de la vis d'après la formule du cas n° II (§ 16), en prenant le coefficient de sécurité égal à 4; on calcule également ce diamètre par les formules précédentes et on adopte définitivement la plus grande des valeurs obtenues par ces deux procédés différents.

Pour que le frottement de l'écrou et, par suite, son usure ne soient pas trop considérables, la pression entre les filets doit, autant que possible, ne pas dépasser $^1/_2$ k par millimètre carré. Cette condition se trouve satisfaite, quand le nombre de pas i, contenus dans un écrou de fer ou de bronze, n'est pas inférieur à la valeur donnée par la formule:

$$i = 0{,}636\, \frac{P}{d^2}\, \frac{1}{\frac{t}{d}\left(1 - \frac{t}{d}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

Pour les vis normales, dans lesquelles $t = 0{,}1\, d$, cette formule devient:

$$i = 7\, \frac{P}{d^2} = 4{,}48\, \frac{P}{d_1^{\,2}} \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Exemple. *Pour une vis devant exercer une pression de* 25000^k, *le diamètre du noyau* d_1 *se détermine par la formule (43), en admettant qu'on prenne pour l'écrou les mesures de précaution indiquées précédemment; on a alors* $d_1 = 0{,}46\sqrt{25000} = 0{,}46 \cdot 158 = 72^{mm}$; *en considérant cette vis comme une vis normale, on tire de là, pour les autres éléments,* $t = {}^{72}/_8 = 9^{mm}$ *et* $d = {}^5/_4 \cdot 72 = 90^{mm}$. *La formule (47) donne, pour le nombre minimum de pas que doit contenir l'écrou,* $i = 7 \cdot \frac{25000}{90^2} = \frac{7 \cdot 250}{81}$, *soit 21; si on emploie un filet à section trapézoïdale, la hauteur de l'écrou, pour ce nombre de pas, est* $h = i \cdot s = \frac{21 \cdot 2 \cdot 90}{15} = 252^{mm}$. — *Dans le cas où on renforcerait la vis, en portant son diamètre extérieur à* 120^{mm}, *tout en conservant pour t la valeur de* 9^{mm}, *la formule (46) donnerait* $i = 18$.

§ 67.

Assemblages par boulons.

Dans les assemblages, il importe d'éviter que les boulons ne soient soumis à des pressions latérales et il convient, dès lors,

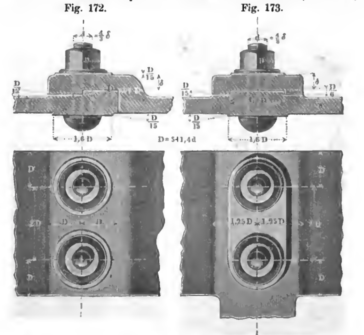


Fig. 172. Fig. 173.

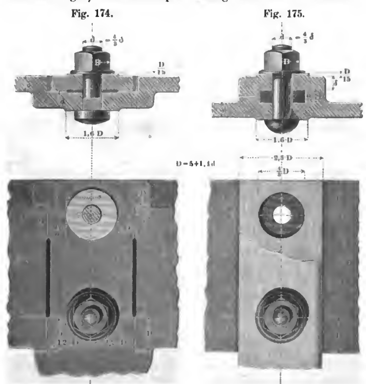
dans les cas où des pressions de ce genre sont à redouter, d'adopter une disposition spéciale pour les pièces à relier.

Dans les fig. 172 et 173, les deux pièces, réunies par des boulons, s'emboitent, l'une dans l'autre, au moyen de rainures et de saillies qui se correspondent.

La fig. 174 représente un emboitement en forme d'ancre, et la fig. 175 un assemblage, avec rondelle interposée entre les deux pièces. Les deux derniers modes d'assemblage protégent les boulons contre toutes les pressions latérales, quelle que soit leur direction, tandis que les dispositions des deux premières figures ne sont efficaces que pour les pressions latérales, dirigées perpendiculairement aux arêtes des rainures.

L'assemblage avec rondelle interposée est d'un usage très-répandu et on ne saurait trop le recommander, en raison de sa simplicité et de la sécurité qu'il présente. La rondelle se fait en fer forgé et se dresse au tour; les cavités, dans lesquelles elle doit être logée, s'obtiennent par l'alésage des trous de boulon et

Fig. 174. Fig. 175.



ont ainsi une position exactement déterminée. Lorsque la rondelle doit avoir de grandes dimensions, on la fait en fonte; souvent aussi on la remplace par une tête intermédiaire (fig. 153), qui est tournée et encastrée à moitié dans chacune des deux pièces. Les modes d'assemblage, représentés par les fig. 174 et 175, sont quelquefois employés, dans les roues hydrauliques, pour réunir les bras à la jante. La disposition qu'on adopte, dans ce cas, n'est pas exactement celle de la fig. 174; pour s'en faire une idée, il suffit d'imaginer que la pièce inférieure, dans cette figure, soit remplacée par une pièce plane, d'une épaisseur convenable, dont la face supérieure porterait des saillies, entre lesquelles s'engageraient les extrémités des bras.

Dans l'établissement des réservoirs en fonte, à parois planes, on fait très-souvent usage d'assemblages à rebords.

Dans ce mode de jonction, les rebords qui doivent être réunis par des boulons peuvent se présenter, soit en dehors, soit en dedans du réservoir, ou encore, les uns à l'extérieur, les autres à l'intérieur. Il est évident que la position de ces rebords, pour un réservoir parallélipipédique, joue un rôle assez important au point de vue de l'aspect. Les figures suivantes représentent quelques-unes des dispositions qu'on peut adopter, pour ce genre d'assemblage, ainsi que la forme du fond qui correspond à chacune d'elles.

Dans les trois premières figures (176, 177 et 178), les rebords des plaques, qui doivent être réunies entre elles et avec le fond, sont tous extérieurs, tandis que, dans les trois autres (179, 180 et 181), ces mêmes rebords sont tous intérieurs. L'aspect extérieur qu'entraine pour le réservoir l'adoption d'une de ces trois dernières dispositions est beaucoup plus satisfaisant que celui d'une quelconque des trois premières.

Lorsque tous les rebords des faces perpendiculaires au fond se trouvent à l'intérieur et qu'on adopte, pour ce fond, une forme analogue à celle de la fig. 179, les assemblages n'offrent aucune saillie visible à l'extérieur (à l'exception de celle des boulons formant le joint des deux faces verticales). Les fig. 182 et 183 indiquent les rapports des dimensions à adopter pour les assemblages à rebords. Le diamètre d des boulons et, par suite, les autres dimensions, se déduisent de l'épaisseur δ des parois.

Pour les joints, la distance de deux boulons consécutifs est ordinairement comprise entre $2{,}5\,D$ et $3\,D$. Lorsqu'on fait

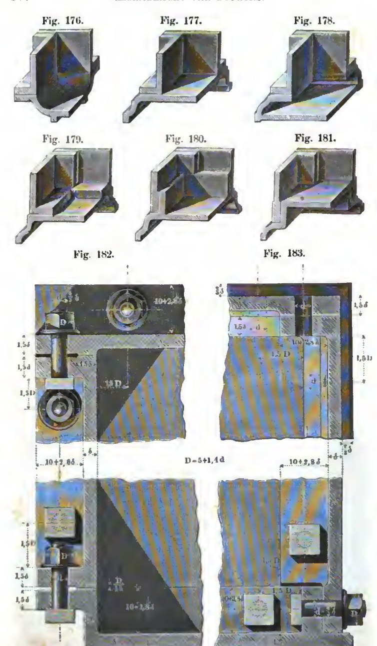


Fig. 176. Fig. 177. Fig. 178.

Fig. 179. Fig. 180. Fig. 181.

Fig. 182. Fig. 183.

usage de machines à raboter, pour dresser les rebords, il convient de supprimer les portées représentées dans la fig. 182, et de faire reposer entièrement, l'une sur l'autre, les surfaces dressées des deux rebords.

II. Clavettes et assemblages à clavettes.

§ 68.

Clavette d'assemblage.

La clavette est fréquemment employée pour relier certaines pièces de construction et elle reçoit des formes et des dispositions différentes, suivant la nature de ces pièces et le but qu'elles doivent remplir. L'assemblage à clavette le plus simple comprend au moins trois parties, les deux pièces à relier et la clavette proprement dite. L'un des côtés du profil longitudinal de la clavette, ou même souvent les deux côtés sont inclinés sur la direction du mouvement relatif des deux corps à relier. L'angle aigu, que forme un côté du profil avec la normale à la direction du mouvement, constitue l'inclinaison de la clavette. Lorsque cette inclinaison n'existe que pour un seul côté, elle se mesure par la tangente trigonométrique de l'angle; dans le cas où les deux côtés forment tous les deux un angle aigu avec la normale à la direction du mouvement, l'inclinaison totale est égale à la somme des inclinaisons des deux côtés et alors elle n'est plus mesurée par la tangente de l'angle.

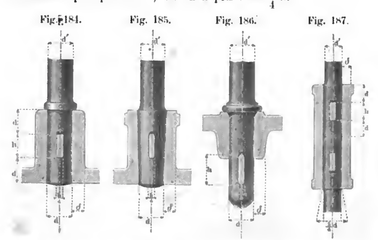
Pour les clavettes, destinées aux assemblages fixes, l'inclinaison totale est comprise entre $^1/_{30}$ et $^1/_{50}$ et descend même à $^1/_{100}$. Mais elle est plus considérable et varie de $^1/_{24}$ à $^1/_{12}$ et même à $^1/_{6}$, pour les clavettes qui doivent être enlevées fréquemment et pour celles qui sont destinées à produire, pour les pièces à relier, un déplacement relatif d'une certaine importance. Nous allons indiquer quelques-uns des assemblages à clavette les plus usités.

§ 69.

Assemblages par clavettes.

Les fig. 181 à 186 représentent l'assemblage, par une clavette transversale, d'une tige pleine avec une douille ou un manchon. Lorsque la tige est en fer forgé, d'un diamètre d, on obtient les dimensions de la clavette, supposée également en fer forgé, en prenant, pour la hauteur moyenne, $h = d$ et, pour l'épaisseur, $\frac{d}{4}$; lorsque la douille est en fonte, son épaisseur δ doit être égale à $\frac{d}{2}$; lorsqu'elle est en fer, cette épaisseur peut être réduite à $\frac{d}{4}$. Pour les clavettes, qui ne traversent qu'une des pièces, comme celle de la fig. 186, on prend volontiers une hauteur un peu plus forte; ici on a pris $h = \frac{5}{4}\,d$.

Fig. 184. Fig. 185. Fig. 186. Fig. 187.

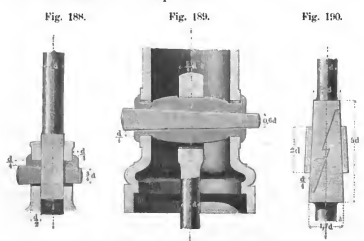


Pour les clavettes en acier, la hauteur et la largeur peuvent être réduites à 0,8 de celles des clavettes en fer. Les dimensions que nous venons d'indiquer supposent, bien entendu, que le diamètre d ait été déterminé convenablement, en tenant compte des efforts auxquels peut se trouver soumis l'assemblage. Le diamètre d' de la tige, en dehors de cet assemblage, peut d'ailleurs être supérieur à d. La fig. 187 représente la jonction de deux

pièces cylindriques, au moyen d'un manchon à clavettes. Les deux pièces reposant, l'une sur l'autre, par leurs extrémités, les dispositions spéciales adoptées, pour les tiges, dans les figures précédentes, ne sont plus ici d'aucune utilité. Le mode d'assemblage, avec manchon et clavettes, se rencontre fréquemment dans les tirants de fermes et les pièces de construction du même genre.

La fig. 188 donne un autre mode d'assemblage à clavette, très-employé pour les tirants, surtout dans les roues hydrauliques. Dans cette clavette l'inclinaison est, sur les deux côtés, de $^1/_{24}$. La cale à rebords, ou contre-clavette, a pour résultat d'augmenter notablement la surface par laquelle la clavette repose sur les pièces à relier. C'est dans le même but qu'on emploie souvent une contre-clavette sur chaque côté.

Fig. 188. Fig. 189. Fig. 190.



La fig. 189 représente une disposition de clavetage pour un boulon de fondation. L'emploi de deux contre-clavettes a pour résultat de faire reposer convenablement la clavette par ses deux côtés et de la renforcer en même temps. L'épaisseur de la clavette est égale à $\frac{d}{4}$. Les dimensions des contre-clavettes, dans le sens de la hauteur, doivent être calculées d'après la portée. A la partie inférieure du massif de fondation, le boulon s'appuie sur la contre-plaque par un écrou, qu'on tourne à la main, jusqu'à ce que le boulon arrive dans une position

telle qu'en chassant la clavette avec force, on obtienne un assemblage suffisamment rigide.

La fig. 190 représente un assemblage qu'on utilise dans les tiges de pompes. Dans cet assemblage, comme dans ceux que nous avons indiqués avec les boulons (fig. 172 à 175), certaines parties sont, comme on le voit, disposées spécialement pour s'opposer aux efforts de traction; la clavette creuse ne sert qu'à maintenir l'assemblage; elle agit simplement comme clavette de serrage. Sa largeur, mesurée perpendiculairement à la figure, est égale à 1,7 *d*.

Une des applications les plus importantes de la clavette se rapporte à la fixation, sur leurs arbres, des roues d'engrenages, des poulies, des manivelles, des leviers etc. Dans ce cas, elle est généralement placée dans le sens de la longueur des arbres et on peut la désigner sous le nom de clavette longitudinale, pour la distinguer de celle dont nous venons d'indiquer quelques dispositions et que nous avons appelée clavette transversale. On trouvera aux chapitres V et VII, relatifs aux arbres et aux manchons, les indications nécessaires pour déterminer les dimensions des clavettes longitudinales.

§ 70.

Clavettes de sureté.

Pour qu'une clavette ne soit pas exposée à se déplacer, sous l'action de l'effort qui s'exerce suivant la direction du mouvement, il est indispensable qu'en admettant $^1/_{10}$, par ex., pour le coefficient de frottement, l'inclinaison soit inférieure à $^2/_{10}$, quand elle n'existe que sur un seul côté, et inférieure à $^1/_{10}$ sur chacun des côtés, quand tous les deux sont également inclinés sur la direction du mouvement. Dans le cas de chocs ou de vibrations, les clavettes sont exposées à se desserrer, lorsque leur inclinaison n'est pas très-notablement au dessous des limites précédentes. Pour se mettre à l'abri de ces chances d'accident et pour pouvoir, dans certains cas, utiliser des inclinaisons plus fortes, on munit les clavettes de certains dispositifs de sureté, analogues à ceux que nous avons précédemment indiqués pour les boulons. Nous allons décrire sommairement les plus importants.

La disposition la plus fréquemment employée, et qui assure dans la plupart des cas une sécurité suffisante, consiste à fendre

le petit bout de la clavette. Pour les pièces soumises à des mouvements vibratoires, on la munit, en outre, d'une goupille également fendue, analogue à celle du boulon de sureté de la fig. 157.

Pour les clavettes de têtes de bielles, on emploie toujours des dispositifs de sureté, tels que ceux représentés par les figures

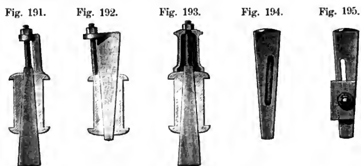


Fig. 191. Fig. 192. Fig. 193. Fig. 194. Fig. 195.

suivantes. Les fig. 191, 192 et 193 sont des clavettes de sureté, avec vis de traction.

Dans les locomotives et les machines de navires à vapeur, on augmente encore les chances de sécurité de ce mode de clavetage, en empêchant l'écrou de se desserrer par l'un des moyens que nous avons indiqués; le plus simple, et celui qu'on emploie généralement pour les clavettes, consiste dans l'addition d'un contre-écrou (fig. 156). La fig. 194 donne une disposition de clavette avec vis de pression; cette vis pénètre dans une rainure d'une faible profondeur, pratiquée sur une des faces de la clavette; il est évident que, lors même que cette vis ne serait pas suffisamment serrée pour empêcher tout déplacement de la clavette, elle aurait au moins pour résultat de l'empêcher d'être projetée au dehors. L'emploi de la rainure offre, en outre, cet avantage que les rugosités, produites dans le métal par la pression de la vis, se trouvent au dessous de la surface latérale de la clavette et ne sont pas susceptibles, par suite, de gêner son mouvement de serrage, comme celles qui seraient dues à une vis agissant directement sur cette surface. La fig. 195 représente une clavette de sureté avec boulon de serrage. Le boulon est serré à fond sur deux plaques, appliquées sur les faces de la clavette et qui sont protégées, par d'autres pièces, contre tout déplacement longitudinal; le boulon traverse une entaille pratiquée dans l'épaisseur de la clavette.

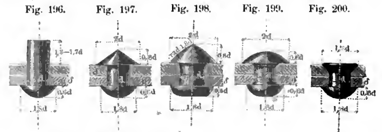
III. Rivets et rivures.

§ 71.

Rivets.

Les rivets sont destinés à relier les plaques métalliques et surtout les plaques de tôle. Les figures suivantes représentent différentes formes employées pour ces organes. Le rivet ordinaire, en fer forgé, se compose d'une première tête (fig. 196), forgée à l'étampe, avant la pose, et d'une seconde tête (fig. 197) qu'on obtient, par l'opération même de la rivure, en rabattant la partie cylindrique qui, dans la fig. 196, déborde la tôle; cette saillie, qui varie de 1,3 à 1,7 du diamètre du rivet, doit être d'autant plus faible que le corps du rivet remplit mieux le trou des tôles à relier. Lorsque la seconde tête du rivet se travaille au marteau à main, sans aucun outil intermédiaire, on arrive à une forme terminée en pointe et analogue à celle que donne la fig. 197. Lorsqu'au contraire on fait usage d'une étampe, la tête affecte une forme sphérique, comme celle de la fig. 199, ou se rapproche de la forme d'un conoïde, comme dans la fig. 198. Lorsque le corps du rivet, au lieu d'être complètement cylindrique, se termine, de chaque côté, par deux petits évasements, noyés dans l'épaisseur des tôles, comme l'indique la fig. 199, sa résistance se trouve augmentée dans une assez forte proportion et c'est ce qui explique l'usage assez répandu de cette forme de rivet. Celle que représente la fig. 198, et qui se compose d'un double tronc de cône, peut être obtenue très-simplement et sans qu'il soit nécessaire de recourir à des machines spéciales. Il résulte, en effet, des expériences de Reiche (1) que, dans le perçage des

Fig. 196. Fig. 197. Fig. 198. Fig. 199. Fig. 200.

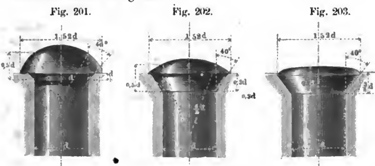


(1) Civ. Ing. 1864. P. 235.

tôles à la machine, on n'obtient des trous à bords bien nets qu'autant que le diamètre de la matrice est légèrement supérieur à celui de l'emporte-pièce; en particulier, pour les tôles de fer, il convient que le cercle de l'emporte-pièce (supposé en contact avec la tôle) et celui de la matrice forment un tronc de cône, dont le profil ait une inclinaison de $^1/_8$. Dans ce cas, le trou obtenu est, en réalité, conique et son diamètre, sur la face en contact avec la matrice, est supérieur de $^1/_4\,\delta$ à celui de l'autre face. La fig. 200 représente un rivet à tête noyée; cette forme est généralement employée pour les assemblages de tôles des navires en fer.

Dans les rivures des pièces de ponts, il convient d'apporter le plus grand soin dans la détermination des différents éléments des rivets. Les fig. 201 à 203 représentent les rapports de dimensions qui ont été adoptés, pour le pont de Dirschau, à la suite de nombreux essais. La fig. 201 donne la tête de rivet normale; dans la fig. 202, la tête est à demi noyée et elle l'est entièrement dans la fig. 203.

Fig. 201. Fig. 202. Fig. 203.



Les rivets, dont le corps ne dépasse pas 25 à 30^{mm}, peuvent être refoulés avec un marteau de 4^k à $4^k\,^1/_2$; pour terminer la tête, au moyen d'une étampe, on fait usage d'un marteau d'un poids plus considérable, allant jusqu'à $7^k\,^1/_2$. D'après Molinos et Prosnier, une équipe d'ouvriers exercés, travaillant sur des pièces placées horizontalement (pièces de ponts), peut poser, par jour,

200 à 250 rivets de 18^{mm} de diamètre,
180 - 200 - - 20 - - -
100 - 125 - - 22 - - -
90 - 100 - - 25 - - -

pour des pièces placées verticalement, on doit admettre les $^{3}/_{4}$ de ces nombres seulement.

Dans l'usine de chaudronnerie de Piedbœuf (Aix-la-chapelle), le nombre de rivets, placés par une équipe sur des chaudières complètement préparées, est beaucoup plus considérable; ce nombre est, en effet, pour une journée de onze heures, de

350	rivets	de	14	à	16^{mm}	de diamètre
325	-	-	17	-	18	- - -
300	-	-	19	-	20	- - -
280	-	-	21	-	22	- - -
260	-	-	23	-	24	- - -
240	-	-	25	-	26	- - -
220	-	-	27	-	28	- - -
200	-	-	29	-	30	- - -

Pour les chaudières cylindriques de plus d'un mètre de diamètre, ces nombres doivent être augmentés de 10 %; ils doivent être, au contraire, réduits de 10 %, dans le cas de formes difficiles et incommodes. Une équipe d'ouvriers comprend: 1 riveur, 2 frappeurs, 2 manœuvres, l'un pour chauffer les rivets, l'autre pour faire contre-coup avec un marteau, du côté opposé à celui de la tête; pour les rivets de 14 à 16^{mm} de diamètre seulement, un seul frappeur est suffisant. Dans ces derniers temps, les progrès réalisés dans la préparation préalable des tôles, des cornières, des rivets, etc., ont eu pour résultat d'augmenter notablement l'importance des travaux de rivures.

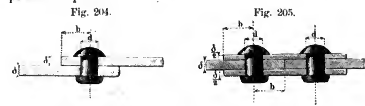
§ 72.

Résistance des rivures.

Les rivures doivent satisfaire à des conditions très-différentes suivant la nature des ouvrages auxquels elles se rapportent. Dans certains cas, on doit chercher surtout à obtenir une grande résistance au cisaillement (poutres en tôle pleine ou en treillis, fermes, etc.); dans d'autres cas, comme, par exemple, pour les réservoirs à faible pression intérieure (gazomètres), on doit principalement s'attacher à l'étanchéïté des joints; enfin, on peut avoir à réaliser à la fois ces deux conditions de résistance et d'étanchéïté, et c'est le cas des chaudières à vapeur. On est conduit ainsi à distinguer trois genres de rivures, que nous allons étudier successivement.

Les rivures de force, c'est-à-dire celles dans lesquelles le point capital est la résistance au cisaillement, s'exécutent, soit sur une seule face des tôles (fig. 204), soit sur les deux faces, avec bandes de recouvrement (fig. 205); cette dernière disposition, qui constitue la rivure à chaînes, se rencontre surtout dans les poutres de ponts.

Fig. 204. Fig. 205.



L'épaisseur de la tôle δ étant supposée constante, il est bien évident que la rivure ne peut jamais présenter une résistance aussi grande que celle de la tôle pleine; toutefois, il est possible de s'en rapprocher suffisamment, en proportionnant convenablement les différentes dimensions de la rivure. Afin de déterminer les dimensions qu'il convient d'admettre, dans le cas d'une rivure de force, désignons par

δ l'épaisseur de la tôle,
d le diamètre d'un rivet,
a l'écartement de deux rivets consécutifs d'une même file,
b la distance du centre d'un rivet au bord de la tôle,
i le nombre des files de rivets,
φ le rapport entre la résistance de la rivure et celle de la tôle.

Pour que la rivure présente la même résistance dans toutes ses parties, il convient de prendre,

1. dans le cas d'une rivure sur une seule face:

$$\frac{a}{\delta} = i\frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

$$\frac{b}{d} = \frac{5}{8}\,\frac{a-d}{i\delta} = \frac{\pi}{8}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (49)$$

d'où on tire:

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{i}\,\frac{5}{\pi}\,\frac{\delta}{d}} = 1 - \frac{d}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

2. dans le cas d'une rivure à chaînes:

$$\frac{a}{\delta} = 2i\frac{\pi}{5}\left(\frac{d}{\delta}\right)^2 + \frac{d}{\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (51)$$

$$\frac{b}{\delta} = \frac{5}{8} \frac{a-d}{i\delta} = 2 \cdot \frac{\pi}{8} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (52)$$

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{1}{2i} \frac{5}{\pi} \frac{\delta}{d}} = 1 - \frac{d}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (53).$$

Les formules précédentes ont été établies en tenant compte des notions du § 5, sur la résistance au cisaillement, et en supposant d'ailleurs la tôle et les rivets formés de la même matière. La table suivante fournit une série de valeurs, calculées d'après ces formules, pour les rivures simples et doubles ($i=1$ et $i=2$). Il serait facile de faire les calculs pour des rivures d'un plus grand nombre de files (poutres de ponts), mais cette opération n'aurait aucune utilité, ainsi que nous le verrons plus loin, au § 74, à propos des rivures croisées. Si les formules (49) et (52) donnaient pour b une valeur inférieure à $1{,}5\,d$, c'est cette dernière valeur qu'il conviendrait d'adopter. Dans ce cas, le calcul indiquerait simplement que la valeur de la distance du rivet au bord de la tôle, correspondant à la résistance à la rupture, est inférieure à celle qui est nécessaire pour recevoir convenablement la tête du rivet.

§ 73.

Tableau relatif à la résistance des rivures.

	$\frac{d}{\delta} =$	1		1,5		2,0		2,5		3,0		4,0	
	$i =$	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Rivure sur une seule face	$\frac{a}{\delta} =$	1,63	2.26	2.91	4,33	4,51	7.03	6,43	10,35	8,65	14,31	14,05	24,11
	$\frac{b}{\delta} =$	0,39	0.39	0,88	0,88	1,57	1.57	2,45	2,45	3,53	3,53	6,28	6,28
	$\varphi =$	0,39	0,58	0,52	0,65	0,56	0,72	0,61	0.76	0,65	0,79	0,72	0,83
Rivure à chaînes	$\frac{a}{\delta} =$	2,26	3,51	4,33	7,15	7,43	12,05	10,35	18,21	14,31	25,62	24,11	44,21
	$\frac{b}{\delta} =$	0,79	0,79	0,77	0,77	3,14	3,14	4,91	4,91	7,07	7,07	12,57	12,57
	$\varphi =$	0,56	0,72	0,65	0,79	0,72	0,83	0,76	0,86	0,79	0,90	0,83	0,91

Les nombres, fournis par cette table, sont conformes aux résultats des expériences de Fairbairn sur la résistance des rivures simples et doubles. D'une manière générale, on peut remarquer que les rivets d'un fort diamètre, assez écartés les uns des autres, fournissent une rivure plus résistante que les rivets d'un petit diamètre, plus rapprochés. Pour les poutres de ponts et les assemblages du même genre, il convient d'apporter la plus grande attention à la détermination des rapports analogues aux précédents. Pour les chaudières à vapeur, la détermination du rapport φ mérite également une attention spéciale.

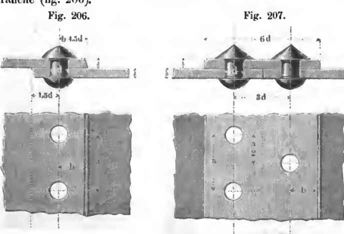
§ 74.

Rivures de chaudières à vapeur.

Dans les rivures de chaudières, où il importe d'obtenir une étanchéïté parfaite, on ne doit pas donner un grand écartement aux rivets; d'un autre côté, le diamètre des rivets et leur écartement, pour les tôles minces, doivent être relativement plus considérables que pour les tôles fortes. Les rivures sont d'ailleurs, suivant les cas, simples ou doubles.

La fig. 206 représente une rivure à simple recouvrement des deux tôles; pour faciliter l'opération du mattage, les tôles ont leurs bords abattus, comme dans la fig. 207, ou, ce qui est préférable, sont coupées obliquement sur toute l'épaisseur de la tranche (fig. 206).

Fig. 206. Fig. 207.



L'angle enlevé est de $18^0 \frac{1}{2}$ environ, ce qui correspond à une inclinaison de $\frac{1}{3}$, suffisante pour permettre de faire directement le mattage, sans avoir besoin d'une entaille préalable. La fig. 207 représente une rivure croisée simple, qui est très-employée pour l'assemblage des tuyaux verticaux, des cheminées, etc. Au point de vue de la résistance à la traction, cette disposition doit être assimilée à la précédente et, malgré la double file de rivets, elle doit être, en réalité, considérée comme une rivure simple. Comme, dans les tuyaux cylindriques, soumis à une pression intérieure, les joints dirigés dans le sens des génératrices éprouvent des efforts plus considérables que les joints transversaux, il convient, dans les chaudières, d'adopter pour ces derniers la rivure simple, en réservant pour les premiers la rivure double, qui est plus résistante. C'est ce qu'on fait, dans les bonnes usines de construction, pour les chaudières dont le diamètre est supérieur à $1^m \frac{1}{2}$ et qui doivent marcher à une pression tant soit peu élevée. Avec la rivure double, on n'obtient d'ailleurs réellement une augmentation de résistance qu'à la condition d'adopter un écartement de rivets plus considérable que dans la rivure à un seul rang, ainsi que l'indique la formule (55), que nous donnons un peu plus loin. Les tuyaux de fumée des chaudières de Cornouailles, qui ont été exécutés dans ces derniers temps, ont tous leurs joints, longitudinaux et transversaux, munis de bandes de recouvrement; afin d'augmenter la résistance des tuyaux, ces recouvrements sont composés de fers à T (fig. 216, § 77), dont la nervure est tournée vers l'extérieur. On obtient pour φ une valeur un peu supérieure à celle dont nous avons donné précédemment l'expression, lorsqu'on dispose les joints des chaudières obliquement, par rapport aux génératrices, c'est-à-dire suivant des hélices, comme le fait Wright en Angleterre.

Mais on peut se demander si la faible augmentation de résistance, qu'on réalise par cette disposition, est bien en rapport avec l'excédant de dépense qu'entraine son exécution.

La fig. 208 représente une rivure double ordinaire et la fig. 209 une rivure double avec bande de recouvrement.

D'après Lemaitre, il convient de prendre, pour les chaudières à vapeur, dans le cas de la rivure simple:

$$\left.\begin{aligned} d &= 4 + 1{,}5\,\delta \\ a &= 10 + 2\,d \\ b &= 1{,}5\,d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (54).$$

Avec les dimensions ordinairement adoptées, φ se trouve compris entre 0,65 et 0,58. Pour les rivures doubles, la distance

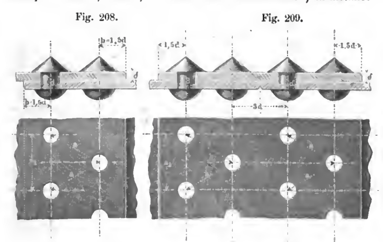


Fig. 208. Fig. 209.

a_1 de deux rivets d'une même file peut être déterminée par la formule: $a_1 = 20 + 3d$ . . . . (55).

Souvent aussi on prend $a_1 = 10 + 2d$; dans ce cas, le doublement de la rivure est destiné à donner un joint plus étanche, et non à augmenter la résistance. Le tableau que nous donnons ci-après a été calculé à l'aide des formules précédentes.

Au point de vue de l'épaisseur de la tôle et de la rivure, les gazomètres présentent d'assez faibles variations. Dans un grand nombre d'appareils de ce genre, ayant subi l'épreuve du temps, le diamètre des rivets varie de 7^{mm} à $7^{mm}\,{}^1/_2$, leur écartement est de 25^{mm} et leur distance au bord de la tôle de 13^{mm}; l'étanchéïté est d'ailleurs assurée par une garniture de chanvre, imprégné de minium, qu'on interpose entre les tôles.

Pour la confection des rivets en fer, il convient d'employer toujours du fer de première qualité, qui puisse supporter, sans se rompre, les brusques changements de forme, auxquels sont exposés les rivets. L'emploi des machines à river présente l'avantage que la tige du rivet, portée au rouge, se trouve prendre d'un seul coup et, par suite, dans un temps très-court, sa forme définitive; ce qui paraît avoir pour résultat de donner au fer une structure particulière, susceptible d'une plus grande résistance que celle qu'on obtient par le travail à la main. La

machine à river n'est cependant pas encore entrée d'une manière courante dans la construction des chaudières à vapeur; la raison de ce fait parait tenir à ce que la forme de la tête, produite par la machine, n'est pas toujours aussi nette que celle qu'on obtient à la main.

§ 75.

Tableau relatif aux rivures de chaudières à vapeur.

δ	d	Hauteur $0,6\,d$.	Diamètre $1,8\,d$.	Hauteur $0,8\,d$.	Diamètre $2\,d$.	Longueur de la tige.	a simple.	a_1 double.	Poids de 100 rivets.	Poids des têtes de 100 rivets.
3	8,5	5	15	7	17	20	27	45	1,28	0,81
4	10	6	18	8	20	25	30	50	2,25	1,43
5	11,5	7	21	9	23	30	33	55	3,52	2,11
6	13	8	23	10	26	34	36	59	5,16	3,03
7	14,5	9	26	12	29	39	39	64	7,27	4,41
8	16	10	29	13	32	43	42	68	9,92	6,04
9	17,5	11	32	14	35	48	45	73	13,08	7,84
10	19	11	34	15	38	52	48	77	16,88	9,87
11	20,5	12	37	16	41	57	51	82	21,34	13,22
12	22	13	40	18	44	61	54	86	26,52	15,12
13	23,5	14	42	19	47	66	57	91	32,50	18,22
14	25	15	45	20	50	71	60	95	39,23	22,98
15	26,5	16	48	21	53	75	63	100	47,00	27,25
16	28	17	50	22	56	80	66	104	55,63	32,57
17	29,5	18	53	24	59	84	60	109	65,29	37,40
18	31	19	55	25	62	89	72	113	75,91	42,59

La longueur de la tige, dans ce tableau, est supposée égale à $2\,\delta + 1,7\,d$; elle correspond à un rivet, destiné à relier deux tôles, d'épaisseur δ, et présentant un excédant de matière suffisant pour remplir la différence entre le vide réel de ces tôles et le cylindre de diamètre d (voir § 71). Les deux dernières colonnes fournissent des renseignements utiles pour l'établissement de devis de rivures; le tableau suivant a été établi pour un usage analogue.

§ 76.

Tableau des poids des plaques métalliques.

Epaisseur de la tôle.	Poids en kilogr. pour 1 mètre carré.					
	Fer.	Fonte.	Laiton.	Cuivre.	Plomb.	Zinc.
1	7,79	7,24	8,51	8,79	11,35	6,86
2	15,58	14,49	17,02	17,58	22,70	13,72
3	23,36	21,73	25,52	26,36	34,06	20,58
4	31,15	28,97	34,03	35,15	45,41	27,44
5	38,94	36,22	42,54	43,91	56,76	34,31
6	46,73	43,46	51,05	52,73	68,11	41,17
7	54,52	50,70	59,56	61,52	79,46	48,03
8	62,30	57,94	68,06	70,30	90,82	51,89
9	70,09	65,19	76,57	79,09	102,17	61,75
10	77,88	72,43	85,08	87,88	113,52	68,61
11	85,67	79,67	93,59	96,67	124,88	75,47
12	93,46	86,92	102,10	105,46	136,22	82,33
13	101,24	94,16	110,60	114,24	147,58	89,19
14	109,03	101,40	119,11	123,03	158,93	96,05
15	116,82	108,65	127,62	131,82	170,28	102,92
16	124,61	115,89	136,13	140,61	181,63	109,78
17	132,40	123,13	144,64	149,40	192,98	116,61
18	140,18	130,37	153,14	158,18	204,34	123,50
19	147,97	137,62	161,65	166,97	215,69	130,36
20	155,76	144,86	170,16	175,76	227,04	137,22
21	163,55	152,10	178,67	184,55	238,39	141,08
22	171,34	159,35	187,18	193,34	249,74	150,94
23	179,12	166,59	195,68	202,12	261,10	157,80
24	186,91	173,83	204,19	210,91	272,45	164,66
25	194,70	181,08	212,70	219,70	283,80	171,53

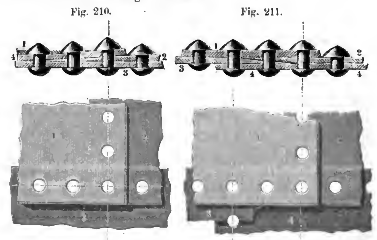
Le poids d'un mètre carré d'une plaque est égal au poids d'un décimètre cube de la matière dont elle est formée (ou à son poids spécifique), multiplié par l'épaisseur de la plaque en millimètres.

§ 77.

Autres formes d'assemblages à rivets.

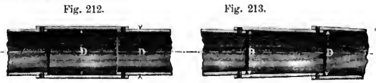
Modes de formation de surfaces de joints. Pour la jonction des feuilles de tôle, destinées à former des plaques de grandes dimensions (droites ou courbes), on fait fréquemment usage des deux modes d'assemblages suivants.

Fig. 210. Fig. 211.



La fig. 210 représente un assemblage de trois feuilles. Pour assurer l'application de ces feuilles, les unes sur les autres, la partie de la tôle n° 2, sur laquelle doit se courber la tôle n° 1, est préparée en biseau. Dans la fig. 211, qui est un assemblage de quatre feuilles, les tôles 2 et 3 se terminent également par des biseaux, tandis que les tôles 1 et 4 ne sont ni amincies ni coudées.

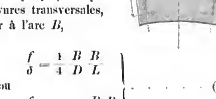
Fig. 212. Fig. 213.



Dans la construction des chaudières à vapeur, on donne aux anneaux, soit la forme cylindrique (fig. 212), soit la forme conique (fig. 213); des deux modes d'emboîtement, représentés par ces figures, le second offre l'avantage que toutes les saillies

se présentent de la même manière par rapport à la direction de la flamme. Pour ce dernier assemblage, il est indispensable de donner une légère courbure aux deux bords de la tôle, qui doivent former les bases de chaque tronc de cône, ainsi qu'aux deux rangs de rivets; cette courbure se détermine comme il suit:

Fig. 214.



Si on désigne par

D le diamètre d'un anneau, mesuré dans la position indiquée sur la fig. 213,

$U = \pi D$ la circonférence correspondante,

B la distance, mesurée sur U, des centres des trous des rivures longitudinales de la plaque,

L la longueur de cette plaque, comprise entre les deux rivures transversales,

f la flèche à donner à l'arc B,

on doit prendre:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{f}{\delta} = \dfrac{1}{4}\,\dfrac{B}{D}\,\dfrac{B}{L} \\ \text{ou} \\ \dfrac{f}{\delta} = 0{,}785\,\dfrac{B}{U}\,\dfrac{B}{L} \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (56).$$

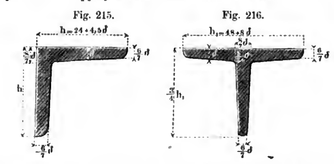
Exemple. Dans les tuyaux qui, en raison de leur diamètre, ne comprennent qu'une seule feuille, $B = U$. *Dans ce cas, si on suppose, pour la longueur de la feuille,* $L = 1^m$ *et, pour la largeur,* $B = 2^m$, *on doit, d'après la formule (56), prendre:* $\frac{f}{d} = 0{,}785 \cdot 2 = 1{,}570$, *c'est-à-dire que f est alors légèrement supérieur à une fois et demie l'épaisseur de la tôle. Si on part de la valeur* $D = \frac{U}{\pi} = \frac{1}{\pi} B = 0{,}318 \cdot 2000 = 636^{mm}$, *la formule (56) donne encore:* $\frac{f}{\delta} = \frac{1}{4}\,\frac{2000}{636} \cdot \frac{2000}{1000} = 1{,}57$, *c'est-à-dire la même valeur que précédemment. La courbure d'une des rivures étant ainsi déterminée, la seconde s'obtient en traçant un arc de cercle concentrique au premier.*

Lorsqu'on fait usage de rivures avec bandes de recouvrement, on doit apporter une attention spéciale aux points de croisement des rivures longitudinales et transversales, si l'on veut obtenir une étanchéité satisfaisante. Le moyen le plus simple, pour arriver à ce résultat, consiste à placer les bandes de recouvrement de ces rivures, l'une au dessus, l'autre au dessous de la tôle.

Pour donner de la rigidité aux tôles, on fait généralement usage, dans les assemblages, de cornières (fig. 215) ou de fers à T (fig. 216).

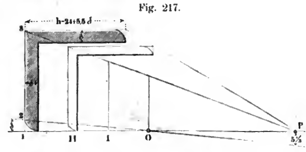
Les rapports, indiqués sur ces figures (ceux de la fig. 215 sont dus à Redtenbacher), fournissent, en général, des dimensions très-convenables; δ représente l'épaisseur de la tôle, sur laquelle doit s'appliquer la cornière ou le fer à T. Pour une

Fig. 215. Fig. 216.



faible valeur de δ, la valeur de h est encore assez grande pour recevoir convenablement les têtes de rivets. Dans les cornières, on supprime souvent l'amincissement, que représente la fig. 215, et on se borne alors à donner aux branches une épaisseur uniforme égale à δ. L'emploi d'une échelle de proportion permet d'établir très-facilement les tracés d'une série de fers de diverses grandeurs. La fig. 217 donne une échelle de ce genre pour les cornières d'épaisseur constante.

Fig. 217.

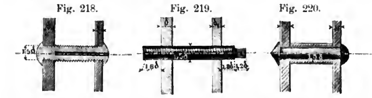


Dans la pratique, les fers à T présentent une bien plus grande variété de formes de section que les cornières. On trouve d'ailleurs, dans les albums des usines de fabrication, les renseignements nécessaires pour tous les cas qui peuvent se présenter.

Pour relier deux tôles parallèles, assez rapprochées, et maintenir leur écartement constant, on peut faire usage de rivets filetés ou à entretoises, comme ceux des fig. 218, 219 et 220.

Les fig. 218 et 219 représentent, après et avant l'opération de la rivure, les rivets en cuivre, dont on fait généralement usage pour les boites à feu des locomotives et les chaudières de navires à vapeur. L'épaisseur la plus forte (δ) est celle de la tôle de cuivre qui forme la paroi intérieure de la boite à feu; cette épaisseur δ est comprise entre 1 et $1^5/_8$ de l'épaisseur de la paroi extérieure, qui est composée de tôle de fer. Dans ces derniers temps, on a eu l'idée de percer, dans l'axe du

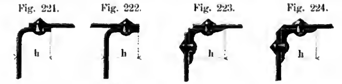
Fig. 218. Fig. 219. Fig. 220.



rivet, un petit trou (pénétrant quelquefois jusque dans le foyer), qui offre le double avantage de maintenir le rivet constamment froid et de prévenir à temps les défauts d'étanchéïté, qui se produisent, lorsqu'il vient à se brûler ou à se rompre. La fig. 220 représente un rivet en fer, qui sert au même usage que le précédent. La virole en fer, qui entoure le rivet, a pour but de s'opposer au rapprochement des deux tôles. Cette virole est simplement formée d'un morceau de tôle enroulé, qu'on laisse ouvert sur toute sa longueur, afin de permettre à l'eau de circuler autour du corps du rivet et de le maintenir ainsi à une température relativement peu élevée.

Formation d'arêtes. Fig. 221 à 224. Pour obtenir des joints de cette nature, on peut courber l'une des tôles, de manière

Fig. 221. Fig. 222. Fig. 223. Fig. 224.



à former un rebord s'appliquant sur la seconde, ou bien recourir à l'emploi de cornières. Dans la fig. 221, le rebord est recourbé intérieurement, tandis qu'il l'est extérieurement dans la fig. 222. Dans ces deux figures, comme dans les suivantes, de 226 à 229,

h représente la hauteur de branche de la partie recourbée, soit qu'elle appartienne à la tôle elle-même, soit qu'elle se trouve

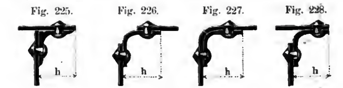


Fig. 225. Fig. 226. Fig. 227. Fig. 228.

rapportée. Les fig. 223 et 224 représentent des cornières ordinaires; dans la dernière disposition, les bords des feuilles, qui s'appliquent sur la cornière, sont coupés en biseau, pour faciliter l'opération du mattage, qui a pour but de rendre le joint étanche. Dans la fig. 225, la cornière est placée à l'extérieur.

Dans la fig. 226, les deux tôles sont réunies par une cornière de tôle; il convient d'employer ce mode d'assemblage pour es réservoirs à parois d'une faible épaisseur. La cornière de la fig. 227, qui est identique à la précédente, est entièrement recouverte par les deux tôles; comme le mattage, dans ce cas, est beaucoup plus difficile, il est indispensable d'interposer, entre les tôles et la cornière, une matière destinée à assurer l'étanchéïté. La cornière de la fig. 228, est semblable aux précédentes et n'en diffère qu'en ce qu'elle est placée à l'extérieur.

Formation de coins. La formation de coins, dans les assemblages à rivets, présente d'assez grandes difficultés; les dispositions à adopter dépendent naturellement du mode d'assemblage des arêtes. Les figures suivantes représentent quelques-unes de ces dispositions.

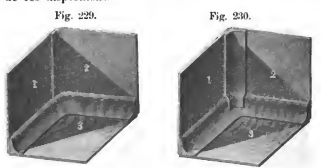


Fig. 229. Fig. 230.

Dans la fig. 229, l'arête verticale est analogue à celle de la fig. 221, tandis que les deux arêtes horizontales sont formées

par une cornière, comme dans la fig. 223; la tôle 2 est amincie à la partie inférieure. Dans la fig. 230, les trois arêtes sont formées par des cornières, dont l'une, celle qui est verticale, est recourbée et rivée sur les deux autres.

Dans la fig. 231, les arêtes présentent la disposition de la fig. 223 ou celle de la fig. 224; au sommet les cornières sont soudées ensemble; cette opération, qui est assez délicate, a l'avantage de donner des joints très-satisfaisants au point de vue

Fig. 231.

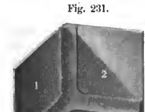
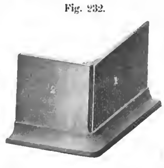


Fig. 232.



de l'étanchéïté, en même temps qu'elle assure une certaine rigidité au réservoir. Les cornières soudées ne sont guère employées, du reste, que pour les pièces de faibles dimensions. Dans la fig. 232, l'arête verticale, qui est disposée comme dans la figure précédente, est légèrement arrondie à la partie inférieure; les arêtes horizontales sont formées par une cornière extérieure, comme dans la fig. 225; cette disposition, qui est d'une exécution simple, donne des joints étanches et d'une grande solidité.

IV. Tourillons.

§ 78.

Classification des tourillons.

Les tourillons, dans les machines, sont les organes qui permettent à certaines pièces de prendre un mouvement de rotation autour de leurs axes géométriques; il en résulte qu'ils doivent affecter la forme de corps de révolution, recouverts en totalité

ou en partie par les supports fixes (paliers, boites), sur lesquels ils tournent. Par suite de la multiplicité des mouvements de rotation, que présentent les machines, les tourillons sont d'un usage extrêmement répandu et, comme ils exercent une influence très-marquée au double point de vue du fonctionnement et de la conservation des appareils, on ne saurait apporter trop de soin dans l'étude des divers points, qui se rattachent plus particulièrement à leur exécution. Sous l'action des différentes forces auxquelles il se trouve soumis, un tourillon peut avoir à supporter, en définitive, deux genres d'efforts très-différents; dans certains cas, la résultante des forces donne lieu surtout à une pression transversale, perpendiculaire à la direction de l'axe de rotation; dans d'autres cas, au contraire, elle correspond à une pression, dont la direction est précisément celle de cet axe. Il convient, d'après cela, d'établir deux divisions principales:

1. *les tourillons à pression transversale,*
2. *les tourillons à pression longitudinale.*

A la première classe appartiennent les tourillons des arbres de transmission horizontaux, des roues hydrauliques, des essieux de voitures, des manivelles, etc., la seconde classe comprend les pivots des turbines, ceux des arbres verticaux, les tourillons des arbres d'hélices de bateaux à vapeur, etc.

Sur la pièce de la machine, à laquelle il appartient, un tourillon peut occuper différentes positions. Il peut être placé complètement à l'extrémité de cette pièce, à laquelle il n'est relié dès lors que d'un seul côté, ou se trouver établi dans une position comprise entre les deux extrémités; ce qui conduit à deux nouvelles divisions:

a. *les tourillons d'extrémités,*
b. *les tourillons intermédiaires.*

Dans les tourillons à charge transversale, les tourillons d'extrémités peuvent être désignés sous le nom de tourillons frontaux, tandis que dans les tourillons à pression longitudinale, ils constituent les pivots. Parmi les formes variées qu'on donne aux tourillons, nous n'examinerons ici que les plus simples, qui sont d'ailleurs celles qui ont le plus d'importance; il est, du reste, facile de déduire, des formules que nous allons établir, les dimensions applicables aux autres formes de tourillons qu'on peut avoir à employer.

A. Tourillons cylindriques chargés transversalement.

§ 79.

Tourillons frontaux.

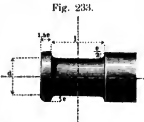
Les tourillons frontaux cylindriques se terminent, à une de leurs extrémités, et souvent même à toutes les deux, par une saillie, dont la hauteur e est donnée par la formule empirique:

$$e = 3 + {}^{7}\!/_{100}\, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57).$$

La largeur de cette saillie est égale à $1{,}5\,e$. La longueur l du tourillon et son diamètre d se déterminent par des considérations théoriques. Dans le calcul de ces dimensions, il convient de tenir compte, non seulement de la résistance de la matière dont le tourillon est formé, mais encore de diverses autres conditions, telles que le frottement et l'usure.

Si on désigne par P la charge sur le tourillon, par $\mathfrak{S}$ la plus grande tension qui puisse s'y développer sous l'action de cette charge, on doit prendre, pour le diamètre du tourillon, en tenant compte simplement de sa résistance:

Fig. 233.



$$d = \sqrt{\frac{16}{\pi \mathfrak{S}}\left(\frac{l}{d}\right)}\sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

formule dans laquelle il faut faire $\mathfrak{S} = 6$, pour le fer forgé, et $\mathfrak{S} = 3$ pour la fonte. Pour la détermination du rapport $\frac{l}{d}$, on doit avoir égard au frottement et à l'usure. Dans les formules que nous donnons ci-après, nous avons cherché à tenir compte des expériences les plus récentes sur le frottement des surfaces graissées; bien que ces expériences ne présentent pas toujours entre elles une concordance complète, il est cependant possible d'en tirer quelques conclusions générales d'une certaine importance.

a. *Tourillons frontaux en fer forgé*, tournant dans des coussinets formés de bronze ou d'un métal analogue. Si le nombre de tours n du tourillon par minute est inférieur à 150, on doit prendre:

$$d = {}^{9}/_{8} \sqrt{P} \quad \text{et} \quad \frac{l}{d} = 1{,}5 \quad \ldots\ldots \quad (58).$$

Pour $n > 150$, il convient d'adopter les formules:

$$d = 0{,}32 \sqrt{P} \sqrt[4]{n} \quad \text{et} \quad \frac{l}{d} = 0{,}12 \sqrt{n} \quad \ldots\ldots \quad (59).$$

b. *Tourillons frontaux en acier fondu*, avec les mêmes coussinets que précédemment. Pour $n < 150$, on doit prendre, dans ce cas:

$$d = 0{,}95 \sqrt{P} \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

(c'est-à-dire 0,843 de la valeur du tourillon en fer) et

$$\frac{l}{d} = 1{,}78.$$

La longueur de l, donnée par cette expression, est exactement la même que celle du tourillon en fer équivalent.

Pour $n > 150$, on doit preudre:

$$d = 0{,}27 \sqrt{P} \sqrt[4]{n} \quad \ldots\ldots \quad (61)$$

(c'est-à-dire 0,843 de la valeur du tourillon en fer) et, en outre:

$$\frac{l}{d} = 0{,}15 \sqrt{n}.$$

c. *Tourillons frontaux en fonte*, avec coussinets en bronze. Le diamètre et la longueur sont donnés par les formules:

$$d = 1{,}5 \sqrt{P} \quad \frac{l}{d} = {}^{4}/_{3} \quad \ldots\ldots \quad (62).$$

On peut faire usage des valeurs fournies par ces expressions, pour toutes les valeurs de n inférieures à 200. Pour des vitesses de rotation supérieures, il convient de ne pas employer de tourillons en fonte.

d. *Tourillons frontaux en fer*, tournant sur de la fonte. Les dimensions des tourillons se déterminent par les formules suivantes:

$$d = 1{,}2 \sqrt{P} \quad \frac{l}{d} = 1{,}75 \quad \ldots\ldots \quad (63)$$

formules qu'on pourrait également appliquer aux tourillons en fer, avec coussinets en bronze (*a*), pour toutes les valeurs de P inférieures à 2000 k.

e. *Tourillons en fer et en fonte*, qui ne sont pas destinés à tourner constamment. Dans ce cas, on peut, sans inconvénient, admettre un rapport assez faible entre la portée et le diamètre et se contenter d'une sécurité moindre.

On peut prendre alors pour:

$\frac{l}{d} =$	1	$^3/_4$	$^1/_2$	$^1/_3$	
Tourillons en fer:					
$(\mathfrak{S} = 7{,}5)$	$d = 0{,}82\sqrt{P}$	$0{,}71\sqrt{P}$	$0{,}58\sqrt{P}$	$0{,}47\sqrt{P}$	(64).
Tourillons en fonte:					
$(\mathfrak{S} = 3{,}75)$	$d = 1{,}16\sqrt{P}$	$1{,}0\sqrt{P}$	$0{,}82\sqrt{P}$	$0{,}67\sqrt{P}$	

Exemple. Le crochet d'un palan supportant une charge de 2000 kilogr. est fixé à une traverse, dont il s'agit de calculer les tourillons. Chacun d'eux est soumis à une charge de 1000 kilogr.; en admettant $^1/_3$ pour le rapport de la portée au diamètre, le tableau précédent donne: $d = 0{,}47\sqrt{1000} = 15^{mm}$; pour $\frac{l}{d} = \frac{1}{2}$, on aurait: $d = 0{,}58\sqrt{1000} = 18^{mm}$.

f. *Tourillons creux.* Désignons par

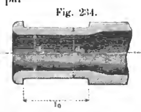


Fig. 234.

d_0 le diamètre extérieur d'un tourillon creux,

d_1 le diamètre intérieur,

d le diamètre d'un tourillon plein, capable de supporter la même charge.

En supposant la même longueur aux deux tourillons, on devra prendre, pour obtenir le même degré de sécurité:

$$\frac{d_0}{d} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65).$$

Formule qui a servi à calculer les valeurs suivantes:

$\frac{d_1}{d_0} =$	0,8	0,75	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0	(66).
$\frac{d_0}{d} =$	1,19	1,13	1,10	1,05	1,02	1,01	1,003	1,0004	1,0	

Ce tableau montre qu'on peut creuser un tourillon ordinaire sans l'affaiblir, tant que le diamètre du creux reste inférieur à

$^1/_3$ du diamètre extérieur. Dans la pratique, on fait assez souvent usage de tourillons creux, dans lesquels le rapport des diamètres intérieur et extérieur est égal à 0,6.

§ 80.

Tableau servant à déterminer les dimensions des tourillons d'extrémités d'arbres (fer et fonte).

Le tableau ci-contre contient les résultats fournis par les formules (58), (59) et (62) pour une série de valeurs.

1er. Exemple. Déterminer les dimensions des tourillons en fer d'un essieu de wagon, pour une charge de 3800 kilogr. Le diamètre des roues doit être de $0^m,850$ et la vitesse du wagon de 12 mètres. Le nombre de tours des tourillons, par minute, est alors: $n = \frac{12 \cdot 60}{0,85 \times 3 \cdot 14} = 270$ *approximativement. En cherchant dans la colonne, qui correspond aux valeurs de n, comprises entre 150 et 350, on trouve (pour P = 3770): d = 80^{mm}, l = 160^{mm}, e = 9^{mm}.*

2e. Exemple. Une roue hydraulique à augets, d'un poids propre de 30,000 kilogr., contient, pendant la marche, 6 mètres cubes d'eau. Les tourillons de l'arbre en fonte de la roue sont disposés symétriquement et supportent, par suite, chacun une charge de 15000 k^{os} + 3000 k^{os} = 18000 kilogr. Dans la colonne 3, ce nombre est compris entre ceux de la 29e et de la 30e ligne; on doit donc prendre, pour le diamètre, 200^{mm} environ; la longueur de chaque tourillon est alors: $^4/_3 \cdot 200 = 267^{mm}$ et la saillie du collet $e = 17^{mm}$.

3e. Exemple. Aux mines de Bleiberg, en Belgique, les tourillons de l'arbre en fonte du balancier d'une machine d'élévation d'eau supportent une charge de 140550 kilogr.; ils sont creux et le rapport des diamètres intérieur et extérieur est 0,5. D'après nos formules nous devrions prendre, pour le diamètre, $d_0 = 1,02 \cdot 1,5 \sqrt{140550} = 574^{mm}$ *et, pour la longueur,* $l_0 = {}^4/_3 \cdot 1,5 \sqrt{140550} = 750^{mm}$. *Les coussinets supporteraient alors, par millimètre carré de surface, une pression* $p = \frac{140550}{574 \times 750} = 0^k,33$. *En réalité on a pris:* $d_0 = 500^{mm}$, $l_0 = 460^{mm}$ *(ce qui correspond à une tension de $2^k,9$) et on a donné aux coussinets une longueur de 400^{mm} seulement. Dans ces conditions la pression, par millimètre carré, est de* $\frac{140550}{500 \times 400} = 0^k,7$, *c'est-à-dire trop élevée; aussi, pour prévenir les échauffements qui se produisaient, constamment, on a du recourir à l'emploi de l'eau comme réfrigérant (1). D'après les calculs de l'avant-projet d'établissement de ces machines, la charge sur chaque tourillon avait été évaluée approximativement à 170000 kilogrammes. Si cette charge s'était réellement produite, les dimensions adoptées auraient conduit à une tension de $3^k,52$, à la naissance du tourillon, et à une pression de $0^k,85$, par millimètre carré, sur le coussinet.*

(1) Dans la machine du Grand Hornu, qui a été établie quelques années après, la pression p n'est que de $0^k.51$, avec des tourillons en fer; cette valeur se rapproche beaucoup de celle qui est donnée par nos formules.

Tableau relatif aux tourillons d'extrémités.

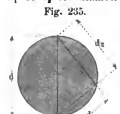
d	e	Valeurs de la charge P.					
		Fonte.	Fer forgé.				
		n compris entre 1 et 200 $\frac{l}{d} = \frac{4}{3}$	n compris entre 1 et 200 $\frac{l}{d} = 1,5$	n compris entre 150 et 350 $\frac{l}{d} = 2$	n compris entre 350 et 500 $\frac{l}{d} = 2,5$	n compris entre 500 et 800 $\frac{l}{d} = 3$	n compris entre 800 et 1200 $\frac{l}{d} = 4$
27	5	324	583	395	316	281	197
30	5	400	720	535	428	353	267
33	6	484	871	641	513	428	320
37	6	608	1095	806	645	538	406
40	6	711	1280	943	754	628	471
45	6	900	1620	1193	954	795	595
50	7	1111	2000	1473	1178	982	736
55	7	1344	2420	1781	1425	1183	890
60	8	1600	2880	2120	1696	1413	1060
65	8	1877	3380	2689	2151	1659	1344
70	8	2177	3920	2886	2309	1924	1443
75	8	2500	4500	3312	2650	2208	1656
80	9	2844	5120	3770	3016	2513	1885
85	9	3211	5780	4256	3405	2837	2128
90	10	3600	6480	4771	3817	3181	2385
95	10	4011	7220	5316	4253	3544	—
100	10	4444	8000	5891	4713	3927	—
105	10	4900	8820	6494	5195	4329	—
110	11	5377	9680	7127	5702	4751	—
115	11	5877	10580	7790	6232	5193	—
120	12	6400	11520	8483	6786	—	—
130	12	7511	13520	9955	7964	—	—
140	13	8933	15680	11546	9237	—	—
150	13	10000	18000	13253	10602	—	—
160	15	11377	20480	15080	12064	—	—
170	15	12844	23120	17022	—	—	—
180	16	14440	25920	19084	—	—	—
190	16	16044	28880	21223	—	—	—
200	17	17777	32000	23560	—	—	—
210	18	19600	35280	25975	—	—	—
220	18	21511	38720	—	—	—	—
240	20	25600	46080	—	—	—	—
260	21	30044	54080	—	—	—	—
280	23	34844	62720	—	—	—	—
300	24	40000	72000	—	—	—	—

§ 81.

Changement de longueur d'un tourillon.

On a souvent à résoudre le problème qui consiste à trouver les dimensions d'un tourillon, susceptible d'en remplacer deux autres, de dimensions connues, en faisant d'ailleurs le même nombre de tours. En désignant par d le diamètre inconnu, par d_1 et d_2 les diamètres donnés, on doit prendre:

Fig. 235.



$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (67).$$

relation qui montre que d doit être l'hypothénuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont d_1 et d_2. De même, la longueur du nouveau tourillon est donnée par l'expression simple :

$$l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68).$$

Dans les pièces soumises à de faibles efforts, il arrive souvent que le calcul conduit, pour les tourillons, à des diamètres tellement petits, qu'il convient, pour l'exécution, de les augmenter; on peut également, dans ce cas, trouver avantage, pour la marche du tourillon, à augmenter la longueur de la portée et à rendre, par suite, l'usure moins rapide. Inversement, il peut se présenter certaines circonstances où on ait intérêt à réduire au minimum le diamètre et la portée. Qu'on augmente ou qu'on diminue d par rapport à d', on conserve le même degré de sécurité, si on satisfait à la relation:

$$\frac{l'}{l} = \left(\frac{d'}{d}\right)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69).$$

Les relations de cette espèce sont fréquemment appliquées dans les dispositifs, destinés à assurer le mouvement rectiligne (comme le parallélogramme de Watt) et dans les têtes de bielles (ch. XVII).

Exemple. Un tourillon en fer forgé, dont le diamètre est de 20mm et la longueur de 30mm, doit être remplacé par un autre tourillon, ayant pour diamètre 30mm; d'après la formule (69), on doit prendre, pour la longueur de ce nouveau tourillon: $l' = 30 \cdot \left(\frac{30}{20}\right)^3 = 30 \cdot 3{,}375 = 100^{mm}$.

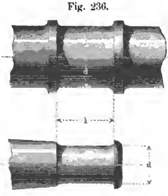
§ 82.

Tourillons renforcés et rétrécis. Tourillons à fourchette.

Lorsqu'un tourillon se trouve compris entre deux parties de l'arbre auquel il appartient, il se trouve généralement soumis

à des efforts de torsion ou de flexion, supérieurs à ceux qu'aurait à supporter un tourillon, situé à l'extrémité et sur lequel s'exercerait la même pression directe. On doit, par conséquent, donner à ce tourillon un diamètre d', supérieur à celui d'un tourillon d'extrémité, ayant à supporter la même charge, composé de la même matière et faisant le même nombre de tours. De ces deux tourillons, qui sont, l'un par rapport à l'autre, ce qu'est la vis renforcée par rapport à la vis normale, le dernier est dit l'équivalent du tourillon renforcé. Pour que l'usure soit la même pour ce dernier tourillon, il convient de lui donner la longueur l du tourillon équivalent; il n'y aurait d'ailleurs aucun inconvénient à prendre une portée plus considérable, puisque cette augmentation aurait pour résultat de diminuer l'usure; mais, dans un grand nombre de circonstances, comme, par exemple, pour les locomotives, il est nécessaire de s'en tenir à la longueur l. Pour des motifs analogues, on peut être conduit à adopter, dans certains cas, un tourillon plus faible que le tourillon normal, à la condition de prendre un rapport de longueur plus petit (§ 79) ou de recourir à l'emploi de matériaux d'une qualité supérieure. Par rapport au tourillon d'extrémité équivalent, un semblable tourillon constitue un tourillon rétréci, dont on trouve un exemple dans le tourillon en fonte indiqué précédemment (b § 79).

Fig. 236.



Une espèce particulière du tourillon, avec prolongation de l'arbre de chaque côté, est le tourillon à fourchette ou à boulon (fig. 237 et 238). En supposant un semblable tourillon soumis à une charge P, les dimensions à adopter, pour sa construction, sont données par les relations:

$$\left.\begin{aligned} d_3 &= \frac{d}{2} \\ \frac{l_3}{d_3} &= \frac{l}{d} \end{aligned}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (70)$$

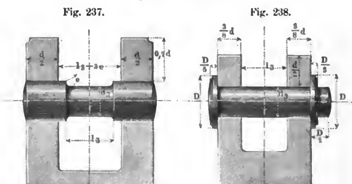
où l et d désignent la portée et le diamètre du tourillon d'extrémité équivalent. On trouve souvent commode de prendre d_3

plus grand que $\frac{d}{2}$, mais alors il convient d'augmenter également l_3, dans une proportion indiquée par la formule :



$$\frac{l_3}{d_3} = 4\left(\frac{l}{d}\right)\left(\frac{d_3}{d}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71).$$

Fig. 237. Fig. 238.



Si la longueur l_3 était déterminée à l'avance et si on avait à calculer d_3, on se servirait de la relation :

$$\frac{d_3}{d} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\sqrt[3]{\frac{l_3}{l}} = 0{,}63\sqrt[3]{\frac{l_3}{l}} \quad . \; . \; . \quad (72).$$

Dans la fig. 238, le diamètre D a pour expression $5 + 1{,}4\, d_3$. Dans les boulons trempés, il se produit facilement des crevasses sur la tête, lorsque celle-ci a un diamètre trop considérable ; pour éviter cet inconvénient, il convient de prendre simplement ce diamètre égal à $\frac{4}{3}\, d$. Pour les tourillons à fourchette, comme pour tous ceux qui sont établis en un point quelconque de la longueur d'un arbre, la saillie des collets est toujours rapportée au diamètre réel du tourillon.

Exemple. A la place d'un tourillon d'extrémité en fer forgé, ayant pour dimensions $d = 70^{mm}$, $l = 105^{mm}$, on veut établir un tourillon à fourchette, également en fer forgé, dont la longueur l_3 doit être égale à celle du premier. On a alors : $l_3 = l = 105$ et, d'après la formule (72), on doit prendre : $d_3 = 0{,}63\, d = 0{,}63 \cdot 70 = 44^{mm}$.

B. Tourillons à pression longitudinale ou pivots.

§ 83.

Pivots cylindriques.

Les tourillons, qui doivent résister à des efforts dirigés dans le sens de leur longueur, sont ceux qui, dans la pratique, donnent lieu aux plaintes les plus nombreuses, en raison des échauffements et de l'usure rapide, auxquels ils sont généralement exposés, comme, par exemple, dans les turbines et les hélices de bateaux à vapeur. Mais un examen attentif de tourillons de cette espèce, auxquels on reprochait leur faible durée, malgré les procédés ingénieux employés pour diminuer l'usure, a permis de conclure que, presque toujours, cette usure était simplement le résultat d'une pression trop considérable et d'une vitesse de rotation trop grande. Cette conclusion se trouve confirmée par cet autre fait d'observation que des tourillons du même genre ont parfaitement résisté, toutes les fois qu'on a eu soin de les établir dans des conditions satisfaisantes de pression et de vitesse. Dans les formules suivantes, nous avons admis que le maximum de pression, par millimètre carré de surface du tourillon, ne devait pas dépasser $0^k,5$.

Fig. 239.



Si on désigne par P la pression totale sur la surface qui limite transversalement le tourillon, par d le diamètre de cette surface, reposant sur le grain de la crapaudine, qui est muni d'une cavité centrale et de quatre rainures à huile, on est conduit, pour les cas ordinaires de la pratique, aux formules suivantes:

$$d = 1,86\sqrt{P}, \qquad P = 0,29\,d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Le tableau ci-joint contient un certain nombre de résultats, calculés d'après ces formules:

d	P	d	P	d	P	d	P	d	P
15	65	45	587	75	1631	105	3197	150	6525
20	116	50	725	80	1856	110	3509	160	7424
25	181	55	877	85	2095	115	3835	170	8381
30	261	60	1044	90	2349	120	4176	180	9396
35	355	65	1215	95	2683	130	4901	190	10469
40	464	70	1421	100	2900	140	5684	200	11600

1er. Exemple. Une grue, dont la disposition est analogue à celle de la fig. 52, doit être établie pour une charge de 4 tonnes et son poids propre est de 800 kilogr.; le tableau précédent montre que le pivot doit avoir un diamètre de 130mm.

2e. Exemple. Un arbre vertical, dont la charge est de 1000 kilogr., doit avoir un diamètre de tourillon égal à 60mm.

Nous avons dit précédemment que la base du pivot était en fer forgé, tandis que la crapaudine était en bronze. Il en résulte que cette crapaudine, ou plutôt son grain, éprouve une usure qui va en croissant avec la vitesse de rotation, sans que d'ailleurs, avec les proportions indiquées, il puisse y avoir danger d'échauffement, tant que le graissage s'effectue d'une manière régulière. Si l'on veut que l'usure, dans un temps donné, reste la même, quelle que soit la vitesse de rotation, il convient de faire usage de la formule:

$$d = 0{,}0015\, Pn \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (74)$$

où n représente le nombre de tours du tourillon par minute; pour des valeurs considérables de n, cette formule conduit généralement à des dimensions supérieures à celles de la formule (73); dans tous les cas où elle en donne de plus petites, il convient de conserver celles que fournit la première.

3e. Exemple. Si l'arbre de l'exemple précédent avait une vitesse de rotation de 75 tours par minute, on devrait, d'après la formule (74), lui donner, pour diamètre de tourillon, $d = 0{,}0015 \cdot 1000 \cdot 75 = 113^{mm}$, au lieu de 60^{mm}. En pratique, dans les cas de ce genre, on adopte ordinairement le plus petit diamètre, bien qu'il en résulte une usure un peu plus considérable.

4e. Exemple. Si on suppose que la grue de l'exemple no 1 ait une vitesse de rotation très-faible (ce qui a toujours lieu) et qu'on fasse, par exemple, $n = 4$, la formule (74) donne: $d = 0{,}0015 \cdot 4800 \cdot 4 = 29^{mm}$, résultat bien inférieur à celui que nous avons trouvé précédemment et, par suite, tout-à-fait inadmissible. Avec un pareil diamètre, le tourillon aurait à supporter une pression de $7^k{,}3$, par millimètre carré, et la crapaudine serait exposée à des grippements qu'aucun mode de graissage ne saurait empêcher.

Pour les tourillons en fonte, avec crapaudine en bronze, il convient de ne pas prendre, pour le diamètre, de valeurs inférieures à celles que donne la formule:

$$d = 2{,}26 \sqrt{P} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (75)$$

établie, en supposant une pression de $\frac{1}{3}$ de kilogr. par millimètre carré.

Pour les tourillons en fer, avec crapaudine en bois de gaïac, on peut admettre une pression beaucoup plus forte et aller jusqu'à 1 kilogr., lorsqu'il existe un graissage continu par l'eau, comme,

par exemple, pour les pivots de turbines, qui sont constamment immergés. Le minimum de diamètre, correspondant à ce cas, est:

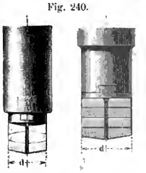
$$d = 1,3 \sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76).$$

Au point de vue de l'usure, on peut appliquer aux formules (75) et (76) la remarque déjà faite pour la formule (73), et tenir compte de la vitesse, en recourant à la formule (74), toutes les fois qu'elle donne des valeurs supérieures à celles des deux autres.

Pour les vitesses de rotation considérables, la formule (74) fournit souvent des diamètres de tourillons, que leur grandeur rendrait d'un emploi incommode. Dans ces conditions, si on emploie des diamètres plus faibles, il est indispensable d'amener l'huile, sur les surfaces frottantes, avec une pression assez élevée, qu'on lui donne, soit au moyen de tuyaux s'élevant à une assez grande hauteur, soit au moyen d'une petite pompe. Il se présente aussi certains cas où la question de l'usure n'est d'aucune importance; on peut alors, même pour les vitesses de rotation considérables, conserver le minimum de diamètre. Pour les tourillons des meules de moulins, on cherche ordinairement à réduire l'usure, en trempant le pivot et le grain de la crapaudine; il semble évident qu'on arriverait plus sûrement au but qu'on se propose, en employant des tourillons d'un diamètre suffisamment fort.

Pour diminuer, dans une certaine proportion, l'influence de n, au point de vue de l'usure, on peut recourir à l'emploi de plaques mobiles. Si, entre la base du pivot et le fond fixe de la crapaudine, on interpose 1, 2, 3 ... i plaques (fig. 240), les nombres de rotations des différentes surfaces de glissement semblent devoir être égaux à n, multiplié respectivement par $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{1+i}$; cette disposition a été essayée dans les turbines et les moulins. Pour les hélices des bateaux, elle n'a donné aucun résultat satisfaisant; les plaques se soudaient, en quelque sorte, les unes aux autres et, en définitive, celles qui tournaient arrivaient assez rapidement à s'échauffer, sous l'action du frottement; leur usure était

Fig. 240.



excessivement rapide; l'emploi de roues dentées, pour assurer aux différentes plaques les vitesses de rotation indiquées précédemment, ne suffit pas davantage à empêcher la destruction rapide du palier. Autant, du reste, qu'il nous est permis d'en juger, par les dimensions que nous avons pu recueillir, la pression par millimètre carré est, en général, beaucoup trop considérable (1 kil. et souvent même plus encore).

On a souvent cherché à remplacer, pour les crapaudines, le fer, le bois, le bronze ou les alliages métalliques (métal blanc, etc.). En dehors des crapaudines en acier, que nous avons déjà signalées et dont l'action est également peu efficace pour les pressions trop considérables, on a essayé diverses substances, comme la pierre, le verre (1) et l'argile durci par la cuisson; mais l'emploi d'aucune de ces matières ne s'est généralisé. Girard est l'inventeur des paliers à eau comprimée (2); l'eau, amenée à une certaine pression au moyen d'une pompe, agit sur les surfaces destinées à frotter l'une sur l'autre et on obtient ainsi, au prix d'une perte de travail très-faible, due au mouvement de la pompe, une marche très-facile du tourillon. Cette disposition était appliquée, à l'exposition universelle de 1867, à un tourillon vertical, pour lequel Girard avait remplacé l'eau par l'air. A la même exposition, on remarquait encore les tourillons de Jouffray, qui tournaient, avec une très-grande facilité, dans des paliers, complètement fermés, sur de l'eau comprimée. La seule conclusion un peu nette qu'on puisse tirer de tout ce qui précède, c'est qu'on a reconnu l'insuffisance des diverses dispositions usitées pour les tourillons, soumis à des efforts longitudinaux, sans même pouvoir affirmer que la complication de certaines d'entre elles corresponde à un avantage sérieux.

§ 84.

Pivots cylindriques pour arbres verticaux.

Dans les usines, les arbres moteurs verticaux ont le plus souvent une vitesse de rotation assez faible, de telle sorte qu'il

(1) Les coussinets en verre ont subi une épreuve de plus de 12 ans et on en fabrique d'une manière courante à la verrerie de Acker et Cie, à Graggenau, près de Rastatt. Ces coussinets, qui sont d'un prix peu élevé, doivent avoir une très-grande durée, tout en n'exigeant qu'une faible quantité de matière lubréfiante.

(2) Armengaud-Vignole des mécaniciens, page 139.

convient ordinairement d'adopter, pour leur calcul, la formule $d = 1,86 \sqrt{P}$. La charge du pivot ne se compose, en général, que du poids propre de l'arbre, augmenté de celui des roues et des manchons dont il est muni. Si on suppose ces pièces transformées en un cylindre, d'un diamètre δ égal à celui de l'arbre, on obtient un arbre idéal, d'une longueur L, et le diamètre du pivot se calcule par la formule:

$$\frac{d}{\delta} = 0,14 \sqrt{L} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

laquelle donne pour:

$L = 5^m$	8^m	12^m	16^m	20^m	25^m	30^m	35^m	40^m	45^m
$\frac{d}{\delta} = 0,31$	0,40	0,48	0,56	0,63	0,70	0,77	0,83	0,89	1,0.

Exemple. Un arbre vertical, de 15^m de hauteur, porte 3 roues dentées et 4 manchons; l'ensemble de ces pièces est équivalent, comme poids, à un cylindre, de même diamètre que l'arbre et dont la longueur serait de 10^m. Dans ce cas $L = 15 + 10 = 25^m$ et le diamètre du pivot doit être pris égal à $^7/_{10}$ du diamètre de l'arbre.

§ 85.

Tourillons à cannelures.

L'emploi des tourillons à cannelures permet d'éviter les inconvénients qu'entraine la grandeur du diamètre, dans les tourillons soumis à des efforts longitudinaux considérables; en effet, grâce à cette disposition, il devient possible de n'employer qu'un tourillon de faible section, en répartissant l'effort total sur une surface aussi grande qu'on le désire. L'emploi de ce tourillon a eu une très-grande influence sur la construction des machines de bateaux à hélice et a permis de la simplifier notablement. Il présente également de grands avantages pour les turbines et les pompes à force centrifuge. La pression se transmet au palier par une série de surfaces annulaires.

Pour le tourillon d'extrémité (fig. 241), comme pour les deux autres (fig. 242 et 243), le calcul conduit à une seule et même formule.

Si l'on désigne par

P la pression totale sur le tourillon,

d' le diamètre moyen et d le diamètre intérieur d'un anneau,

b son épaisseur, h sa hauteur, h_1 la hauteur d'une rainure,

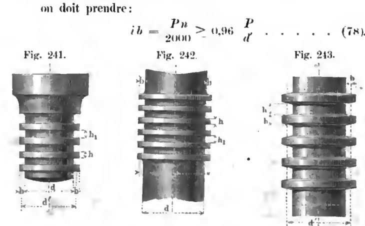
i le nombre des surfaces annulaires, qui reçoivent l'action de la charge,

n le nombre de tours du tourillon,

on doit prendre :

$$i b = \frac{P n}{2000} \geq 0{,}96 \frac{P}{d'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78).$$

Fig. 241. Fig. 242. Fig. 243.



Double formule, comme celle que nous avons indiquée précédemment pour les tourillons cylindriques et dont on doit se servir, dans la pratique, en choisissant le plus fort des deux résultats qu'elle fournit; la valeur de b se détermine au sentiment; elle est généralement comprise entre $\frac{d}{6}$ et $\frac{d}{10}$. h et h_1 sont souvent pris égaux à b et quelquefois plus petits; les arêtes sont tantôt aigues, tantôt légèrement arrondies, ou encore, comme dans la fig. 243, sont formées par deux surfaces, inclinées l'une sur l'autre de plus de 90°. La formule précédente suppose l'emploi de coussinets en bronze, ou de coussinets d'autres substances, munis d'une garniture en métal blanc. Le bois ne peut guère employé dans ce cas, car il ne présenterait pas une résistance suffisante, à moins d'exagérer, hors de toute proportion, la hauteur des rainures par rapport à celle des anneaux sur le tourillon; toutefois, il n'y aucun inconvénient à l'admettre pour le cas particulier où on fait $i = 1$. On peut diminuer de moitié les dimensions que donne la formule précédente, pour les surfaces destinées à la pression, à la condition de faire passer sur les coussinets un courant d'eau continu.

1er. Exemple. L'arbre d'une pompe centrifuge, qui fait 500 tours par minute, exerce, dans le sens de sa longueur, un effort de 270 kilogr. sur les

cannelures d'un tourillon; l'arbre a 55^{mm} de diamètre et chaque cannelure doit avoir une saillie de 10^{mm}. La formule (78) fournit alors, pour le nombre de ces cannelures le double résultat:

$$1^o.\ i = \frac{270 \cdot 500}{10 \times 2000} = 6{,}75 \text{ ou } 7; \text{ et } 2^o.\ i = 0{,}96 \frac{270}{55 + 10} = 4,$$

dans ce cas, il convient d'adopter le nombre 7.

2e. Exemple. L'arbre de l'hélice d'un gros vaisseau de guerre exerce sur le vaisseau une propulsion de 18000 kilogr.; le diamètre de cet arbre $d = 380^{mm}$ et il doit faire 55 tours par minute. Si nous prenons $b = 50^{mm}$, nous aurons, d'après la formule (78):

$$1^o.\ i = \frac{18000 \cdot 55}{2000 \cdot 50} = 9{,}9 \text{ ou } 10 \text{ et } 2^o.\ i = \frac{0{,}96 \cdot 18000}{430 \cdot 50} = 0{,}8.$$

la première valeur est de beaucoup supérieure à la seconde et c'est celle qu'on doit adopter. Si on avait $d = 450^{mm}$, la seconde valeur serait encore plus petite, tandis que la première ne serait pas modifiée, ib ne dépendant pas du diamètre. Dans le vaisseau, qui nous a fourni les données de cet exemple, le nombre des cannelures i est égal à 9.

3e. Exemple. En conservant les données du 1er exemple, il s'agit de déterminer le plus petit tourillon qu'on puisse employer, pour une valeur de $b = 10^{mm}$. Pour cela, dans la double formule, nous égalerons les deux valeurs, ce qui donne: $d'n = 0{,}96 \cdot 2000 = 1920$, d'où $d' = \frac{1920}{500} = 3{,}84$ ou 4^{mm}. On a ensuite $i = \frac{0{,}96 \cdot 270}{4 \cdot 10} = 6{,}48$, ou 7, comme précédemment: inutile de faire remarquer d'ailleurs que le tourillon aurait un noyau d'une épaisseur tout-à-fait inadmissible. Mais cet exemple suffit pour montrer comment, sous certaines conditions, un tourillon à cannelures permet de descendre à des dimensions très-faibles.

§ 86.

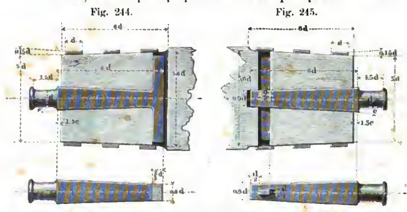
Assemblages de tourillons.

Lorsqu'un tourillon ne peut pas être d'une seule pièce avec l'arbre qu'il doit porter, on est obligé de l'assembler avec lui d'une manière spéciale; ainsi, par exemple, on a fréquemment, pour les roues hydrauliques, à relier des arbres en bois avec des tourillons en fer ou en fonte.

La disposition de la fig. 244, qui représente un *tourillon à ancre*, conduit à pratiquer une entaille d'une grande largeur à l'extrémité de l'arbre et exige l'addition de deux pièces de remplissage en bois. Ces pièces, une fois introduites, sont maintenues par trois anneaux en fer placés à chaud. On donne à ces anneaux une forme conique, parfaitement régulière, qu'on peut obtenir de deux manières; la première méthode consiste à

employer des barres de fer droites, qu'on courbe d'abord en arc de cercle, dans le plan perpendiculaire à la plus petite dimension

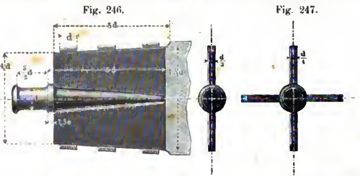
Fig. 244. Fig. 245.



de la section, et qu'on centre ensuite, pour rapprocher les extrémités et les souder; dans le second procédé, on forme d'abord de véritables anneaux cylindriques, qu'on transforme en anneaux coniques par la méthode de Clerk (1). Dans le premier procédé, si on désigne par R le plus grand rayon intérieur d'un anneau, on doit prendre $20\,R$ pour le rayon de l'arc de cercle, qui doit former l'arête extérieure de la barre de fer, lorsqu'on la courbe d'abord dans un plan.

Le tourillon à clavette, ou à ancre artificielle, (fig. 245) est un mode d'assemblage très-convenable et très-solide. La fig. 246 représente un *tourillon à deux ailes* (en fonte) et la fig. 247 un

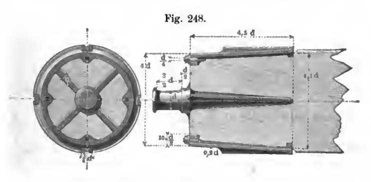
Fig. 246. Fig. 247.



(1) Voir l'Ingénieur civil, 1864 (vol. X) p. 238. Clerk, changements de forme du fer forgé et d'autres métaux par immersion dans l'eau.

tourillon à quatre ailes. Dans les tourillons à trois ailes seulement, il convient de prendre $^3/_{10}\ d$ pour l'épaisseur du métal.

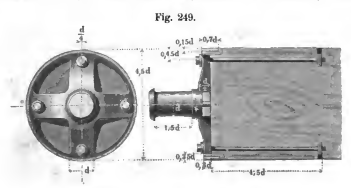
Fig. 248.



Le tourillon à anneaux (fig. 248) comprend quatre ailes, réunies par une enveloppe conique, qui porte souvent, comme sur la figure, des nervures parallèles à l'axe, destinées à recevoir le moyeu d'une roue.

Le tourillon en croix, représenté par la fig. 249, donne la disposition la plus usitée dans la pratique. Le croisillon, venu

Fig. 249.



de fonte avec le tourillon, présente une surface complètement tournée, s'appliquant exactement sur l'about de l'arbre, qui est également dressé; un anneau en fer forgé est destiné à renforcer l'anneau en fonte, qui réunit les bras du croisillon; ce dernier est d'ailleurs solidement fixé contre l'about de l'arbre par quatre boulons, dont les écrous sont noyés dans de petites cavités, ménagées dans le bois.

V. Arbres.

§ 87.

Division des arbres.

Les arbres, qui sont destinés à porter des pièces animées de mouvements de rotation ou d'oscillation et qui, par cela même, sont munis de tourillons, se divisent, comme ces derniers, en deux catégories, suivant qu'ils ont à supporter des efforts perpendiculaires ou parallèles à leur axe de rotation. On rencontre très-rarement des arbres rentrant complètement dans la seconde catégorie. Dans ce qui va suivre, nous aurons donc principalement à nous occuper des arbres qui sont simplement chargés transversalement, ou encore de ceux qui sont soumis à la fois aux deux genres d'actions. Dans les premiers, la charge peut agir en un point unique, ou se trouver répartie en plusieurs points; nous aurons, par conséquent, à étudier séparément:

les arbres chargés en un seul point, ou arbres simples,
et *les arbres chargés en plusieurs points.*

Pour chacun de ces deux cas principaux, nous aurons encore à établir deux subdivisions, comprenant, l'une les arbres à section circulaire, l'autre les arbres à section composée de différentes formes. Dans toutes les questions que soulève la construction des arbres, la méthode, connue sous le nom de graphostatique, rend de très-grands services. Nous aurons donc recours à la fois au procédé analytique et à la méthode des tracés, pour arriver à la solution des divers problèmes que nous allons aborder.

A. Section de forme circulaire.

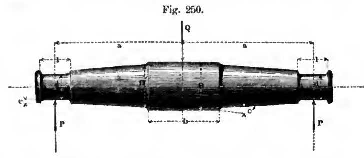
§ 88.

Arbre simple composé de deux fuseaux symétriques.

La charge Q, dirigée perpendiculairement à l'axe de l'arbre, agit au milieu de la longueur et sur la tête de cet arbre, qui porte un moyeu (fig. 250). Les parties qui réunissent la tête de l'arbre aux tourillons portent le nom de fuseaux.

Les tourillons doivent être calculés, d'après les règles du chapitre IV, pour une pression $P = \frac{Q}{2}$ et l'arbre lui même doit

Fig. 250.



être établi de manière à présenter, en tous ses points, la même résistance que les tourillons.

Si l'on désigne par

d le diamètre et l la longueur d'un des tourillons,

e la hauteur du collet,

D le diamètre du renflement de l'arbre, b sa longueur,

D' le plus grand diamètre du fuseau près de la tête,

$e' = \frac{D - D'}{2}$ la saillie du renflement sur cette partie,

a la distance du milieu de l'arbre au milieu du tourillon,

et si l'on prend:

$$\frac{D'}{d} = \sqrt[3]{\frac{a - 0{,}5\,b}{\frac{l}{2}}} \quad \ldots\ldots \quad (79)$$

on obtient un arbre qui, abstraction faite des congés, présente partout le même degré de sécurité que le tourillon, c'est-à-dire que la tension maxima atteint 6^k, lorsque l'arbre est en fer forgé et 3^k seulement, lorsqu'il est en fonte.

Rigoureusement, pour présenter partout la même résistance, la forme de la partie comprise entre le tourillon et le renflement de l'arbre, devrait être une portion de paraboloïde cubique (§ 10. n. VI). L'exécution d'une surface de ce genre ne pourrait guère présenter d'intérêt que pour l'instruction des jeunes ouvriers. Dans les cas ordinaires, on se borne généralement à la construction d'un tronc de cône, ayant pour diamètres extrêmes D' et $d + 2e$. Quant à e', il suffit de lui donner une valeur suffisante pour permettre l'établissement d'une rainure, destinée à recevoir

la clavette de fixation du moyen de la pièce, qui doit être établie sur le renflement.

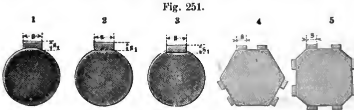
Les longueurs des clavettes de fixation sur l'arbre varient essentiellement avec la forme qu'on donne à leur section; d'une manière générale, on peut distinguer trois espèces de clavettes:

les clavettes évidées suivant la courbure de l'arbre, fig. 251, 1.
les clavettes posées à plat, à section rectangulaire, fig. 251, 2, 4, 5.
les clavettes en partie noyées dans une rainure, fig. 251, 3.

Les clavettes évidées ne peuvent guère s'employer que pour la fixation de pièces travaillant sans choc, comme, par exemple, les poulies; une seule clavette permet déjà de résister à des efforts considérables et, avec plusieurs pièces de ce genre, sur le même arbre, comme dans les exemples 4 et 5 de la fig. 251, on obtient une fixation, qui offre une sécurité complète. On obtient également un mode de liaison d'une très-grande solidité, avec une seule clavette à rainure, lorsque le moyeu est parfaitement alésé sur l'arbre. Dans les pièces de machines qui sont exposées à des chocs violents, il est prudent d'en employer plusieurs.

Les dimensions des clavettes, ne pouvant guère se déterminer que par une méthode complétement empirique, présentent, dans la pratique, de très-grandes variations; mais les indications que nous allons donner suffisent parfaitement pour les cas ordinaires. La seule matière qu'on emploie pour les clavettes est l'acier. On est conduit à distinguer deux cas, suivant que l'arbre doit simplement porter le moyeu ou qu'il est, au contraire, exposé à la torsion. On a ainsi, suivant les cas, des clavettes de soutien ou

Fig. 251.



des clavettes de torsion; en désignant par s la largeur de la clavette, par s_1 son épaisseur moyenne et par D le diamètre du renflement de l'arbre, on peut prendre:

pour les clavettes de soutien: $s = 6 + \frac{D}{7}$, $s_1 = 4 + \frac{D}{12}$ (80)

pour les clavettes de torsion: $s = 4 + \frac{D}{5}$, $s_1 = 4 + \frac{D}{10}$ (81).

Au moyen de ces formules on peut dresser le tableau suivant:

D = 30	50	100	150	200	300	400	500
			clavettes de soutien:				
s = 10	13	21	27	35	49	63	77
s_1 = 7	8	12	17	21	29	37	46
			clavettes de torsion:				
s = 10	14	24	34	44	64	84	104
s_1 = 7	9	14	19	24	34	44	54

Pour $D < 30^{mm}$, on prend $s = \frac{D}{3}$, $s_1 = \frac{D}{5}$. Lorsqu'on emploie plusieurs clavettes, il convient de conserver à chacune d'elles les dimensions de la clavette unique. Pour les moyeux, qui sont placés à chaud sur l'arbre et qui, par cela même, présenteraient déjà, sans clavette, une fixation très-sérieuse, on peut diminuer les dimensions pour le cas de la torsion et se contenter de celles qui correspondent à l'autre cas.

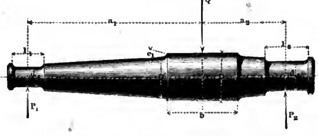
§ 89.

Arbre simple composé de deux fuseaux non symétriques.

Lorsque les distances du renflement de l'arbre aux tourillons sont différentes, comme dans la fig. 252, la charge se répartit inégalement sur ces tourillons d_1 et d_2 et on a:

$$\frac{P_1}{Q} = \frac{a_2}{a_1 + a_2}, \quad \frac{P_2}{Q} = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad . \quad . \quad (82).$$

Fig. 252.

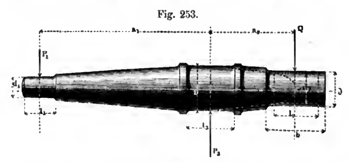


Le plan moyen du renflement partage l'arbre en deux parties, dont chacune peut être considérée comme la moitié d'un arbre simple à fuseaux symétriques. On calcule, pour chacun

de ces arbres, la valeur de D' et la plus grande sert à déterminer la valeur de D.

Si le moyen, destiné à transmettre la charge Q, au lieu d'être placé entre les deux tourillons, tombe en dehors, c'est-à-dire si a_2 est négatif, comme dans la fig. 253, l'arbre, suivant l'expression pratique, se trouve chargé en porte-à-faux.

Fig. 253.



Le tourillon D devient, dans ce cas, un tourillon intérieur. Les grandeurs numériques des efforts exercés sur les tourillons sont données par les relations:

$$\frac{P_1}{Q} = \frac{a_2}{a_1}, \quad \frac{P_3}{Q} = \frac{a_1 + a_2}{a_1}, \quad \frac{P_1}{P_3} = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \quad \cdot \cdot \quad (83).$$

On commence par déterminer le tourillon d_1, puis on calcule un tourillon idéal d_2, correspondant à la position de la charge; on détermine ensuite le diamètre D, comme s'il s'agissait d'un arbre, analogue au précédent, dont les tourillons seraient d_1 et d_2 et dont le renflement serait à la place du tourillon intérieur; on prend donc, pour D, la plus grande des deux valeurs D' et D'', que la formule (79) donne, pour les diamètres, aux deux extrémités du tourillon intérieur, et on détermine la longueur correspondante l_3 par la formule: $l_3 = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$. Cela fait, sur la partie a_2, on porte la parabole cubique, qui représente rigoureusement la forme d'égale résistance et, à partir du milieu du tourillon d_2, on porte, de chaque côté, la moitié de la longueur b que doit avoir la tête de l'arbre; la perpendiculaire à l'axe, menée à cette distance, détermine, par son intersection avec la parabole, le diamètre δ de la tête de l'arbre, qui est d'ailleurs donné par la relation:

$$\frac{\delta}{d_2} = \sqrt[3]{\frac{b}{l_2}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (84).$$

Exemple. Pour un arbre en fonte, on donne $Q = 12000$ *kos*, $a_1 = 1200^{mm}$, $a_2 = 600^{mm}$, $b = 330^{mm}$; *le nombre de tours est inférieur à 150. On a* $P_1 = \frac{Q}{2} = 6000^k$, $P_3 = \frac{3}{2} Q = 18000$ *kos*. *D'après la table du § 80,* d_1 *devant être compris entre 115 et 120, nous le prendrons égal à 115, et* d_2 *égal à* 165^{mm}; *par suite* $l_1 = 153^{mm}$, $l_2 = 220^{mm}$. *Nous trouverons ensuite* $D = 165 \cdot \sqrt[3]{\frac{600}{110}} = 1{,}77 \cdot 165 = 292^{mm}$, $l_3 = \sqrt{153^2 + 220^2} = 268^{mm}$, $\delta = 165 \cdot \sqrt[3]{\frac{330}{220}} = 165 \cdot 1{,}15 = 190^{mm}$.

§ 90.

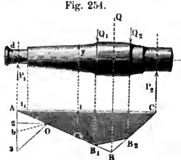
Emploi de la graphostatique pour le calcul d'un arbre chargé en un seul point.

Pour déterminer les forces agissant sur les tourillons, on peut employer la méthode graphostatique, comme nous l'avons indiqué précédemment (§ 39). Nous avons enseigné à cet endroit le tracé du polygone funiculaire et nous avons montré (§ 43 et 44) comment, par ses ordonnées parallèles à la direction des forces, il fournit les moments statiques, correspondant aux différents points; pour ce motif, ce polygone peut donc encore être désigné sous le nom de surface des moments. Pour les problèmes que nous avons à traiter en ce moment, il est facile de déduire des principes généraux les procédés simples suivants.

I. La charge agit normalement à l'arbre.

a. *Le moyeu et la charge se trouvent compris entre les tourillons.* Fig. 254. Sur la ligne AC, qui réunit les milieux des tourillons, on construit un triangle ABC, dont le sommet B tombe sur la direction de la charge Q; par le point A, normalement à AC, on mène $A.3 = Q$, puis on tire $3.O$ et $2.O$ parallèles à BC et à AC; on a alors $A.2 = P_1$ et $2.3 = P_2$. Comme les points B_1 et B_2 correspondent aux extrémités du moyeu, il en résulte que la force Q se décompose en deux, Q_1 et Q_2, agissant précisément en ces points et qui sont données par le

Fig. 254.



polygone des forces, en menant Ob parallèle à $B_1 B_2$; on a alors: $Ab = Q_1$, $b.3 = Q_2$.

L'ordonnée verticale t, en un point de la surface des moments, est proportionnelle au moment statique M_y, pris par rapport au point où cette ordonnée rencontre l'axe; de même l'ordonnée t_1 est proportionnelle au moment statique M_1, pris par rapport à l'origine du tourillon P_1. On a ainsi les deux relations distinctes:

$$y^3 = \frac{32}{\pi \mathfrak{S}} M_y, \qquad d_1^3 = \frac{32}{\pi \mathfrak{S}} M_1,$$

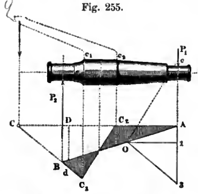
d'où on tire:

$$\frac{y}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{M_y}{M_1}} = \sqrt[3]{\frac{t}{t_1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (85)$$

relation qui permet de déterminer très-simplement la valeur de y.

b. *Le moyeu est entre les tourillons, mais la charge tombe en dehors.* Fig. 255. Sur la ligne AC, parallèle à l'axe de l'arbre, on construit le triangle ABC, dont les trois sommets tombent sur les directions des forces et on cherche le point D, dont l'ordonnée Dd est égale à Q; on mène ensuite $O.1$ parallèle à AC et égal à CD, $O.3$ parallèle à CB, la ligne $A.1.3$ étant perpendiculaire à AC; on obtient alors $1.3 = Q$, $A.1 = P_1$, $3.A = P_2$. La force Q doit se décomposer en deux autres, situées dans les plans qui limitent le moyeu; si on joint les deux points C_1 et C_2 et si on mène Oc parallèle à $C_1 C_2$, les longueurs $c.3$ et $c.1$ représentent les forces correspondant respectivement à C_1 et à C_2. Le tracé indique que, sur la longueur du renflement de l'arbre, il existe un point de la ligne élastique, pour lequel le moment de flexion est nul.

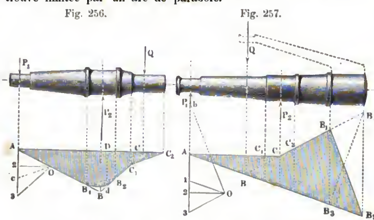
Fig. 255.



c. *La charge est en dehors des tourillons.* Fig. 256. On construit, comme dans le cas précédent, le triangle ABC, on détermine le point D par la condition que $Dd = Q$, on mène $A.3$ normal à AC, on fait $O.2 = CD$ et parallèle à AC, $O.3$ parallèle à CB et on obtient $A.2 = P_1$, $3.A = P_2$. Pour décomposer Q en deux forces, aux points C_1 et C_2, on mène Oc

parallèle à $C_1 C_2$ et les longueurs $c.3$ et $c.2$ donnent les composantes en C_1 et C_2. Le tourillon B étant uniformément chargé sur toute sa longueur, la surface des moments, pour cette longueur, se trouve limitée par un arc de parabole.

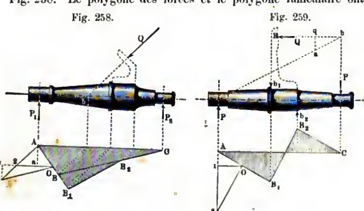
Fig. 256. Fig. 257.



d. *La charge tombe entre les tourillons.* Fig. 257. Après avoir construit le triangle ABC, on a à décomposer la force Q en deux autres, correspondant aux points B_1 et B_2, et pour cela à construire le polygone $ACB_1 B_2$ (auquel est équivalent le polygone $ACB_4 B_3$). Dans le polygone des forces, $1.3 = Q$, $2.1 = P_1$, $3.2 = P_2$ et si on mène Ob parallèle à $B_2 B_1$, $b.3$ et $b.1$ représentent les composantes cherchées pour $B_1 B_3$ et $B_2 B_4$.

II. La charge agit obliquement sur l'arbre. Fig. 258. Le polygone des forces et le polygone funiculaire ont,

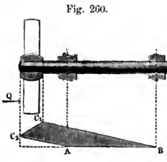
Fig. 258. Fig. 259.



dans ce cas, une certaine inclinaison, qui est déterminée par la direction de Q. Les projections verticales aA et $3.c$ représentent les pressions P_1 et P_2, exercées sur les tourillons; la composante horizontale de Q s'exerce sur l'un des tourillons, ou sur tous les deux (1).

III. Effort parallèle à l'axe de l'arbre. Fig. 259. Il se produit, dans ce cas, deux couples, composés, l'un des actions égales exercées par le moyeu sur l'arbre, l'autre des forces P agissant sur les tourillons (§ 38). Si, par les points A et C, correspondant aux milieux de ces tourillons, on mène les parallèles AB_1 et CB_2 jusqu'aux verticales des extrémités du moyeu et si on joint les points B_1 et B_2, la surface AB_1B_2C est celle des moments. Pour déterminer les différents efforts qui agissent sur l'arbre, transportons la force Q, parallèlement à elle-même, en bq, le point q se trouvant situé sur la verticale Cb du milieu d'un tourillon, joignons le point b au milieu de l'autre tourillon et menons, par le point q, la verticale qa jusqu'à la rencontre de cette ligne de jonction, la longueur qa représentera la force P. Si on porte cette longueur en $A.1$ et si on mène $1.O$ et $O.2$ parallèles à AC et à B_2B_1, 1.2 représentera l'effort qui s'exerce en b_1 et 2.1 celui qui s'exerce en b_2.

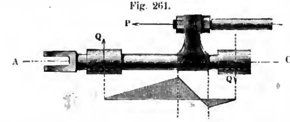
Fig. 260.



Si, toutes les autres conditions restant d'ailleurs les mêmes, le moyeu tombe en dehors des tourillons, ce qui arrive, par

(1) La disposition de tiroir, dite à bayonnette, qu'on rencontre souvent dans les locomotives (fig. 261), donne lieu à un problème du même genre.

Fig. 261.



Seulement, dans ce cas, le sens d'action de l'effort et son point d'application sur la tige AC changent périodiquement.

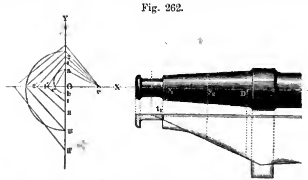
exemple, pour une hélice de vaisseau, placée en porte-à-faux, qui n'est qu'en partie immergée, fig. 260, le diagramme prend alors la forme $A B C_1 C_2$ et montre que la longueur de la saillie n'a aucune influence sur la flexion.

§ 91.

Détermination de la résistance d'un arbre donné. Diagramme d'essai.

Pour déterminer la résistance à la flexion d'un arbre donné, il est nécessaire de prendre les modules des sections correspondant à un certain nombre de points. Si, comme nous le supposons ici, toutes les sections sont circulaires, ces modules sont proportionnels à la troisième puissance des diamètres et on a, par suite, à prendre les cubes de tous les diamètres des sections considérées. C'est ce qu'on peut faire graphiquement, d'une manière très-simple, en se reportant aux principes exposés § 28.

Fig. 262.



Dans le cas où le diagramme qu'on se propose d'obtenir devrait être comparé à une des surfaces de moments théoriques, que nous venons d'examiner, il conviendrait évidemment de l'établir de suite à la même échelle. A partir du point d'intersection O des deux axes rectangulaires X et Y, on porte, au-dessus de OX, la longueur Oa, qui représente la valeur entière (ou la moitié) du diamètre du tourillon de la partie de l'arbre qu'on veut calculer et, dans la direction opposée, suivant Ob, l'ordonnée t_1, correspondant à la surface de moments théorique; sur ab on décrit un demi-cercle acb, on mène ae perpendiculaire à ac et, en prenant Oe pour unité, on a $Ob = (Oa)^3$. On fait ensuite

$O.1 = y_1$, $O.2 = y_2$ ... etc. et on obtient, par une construction analogue, les valeurs cherchées $y_1{}^3$, $y_2{}^3$ ... qu'on reporte sur la figure principale, pour le tracé du diagramme.

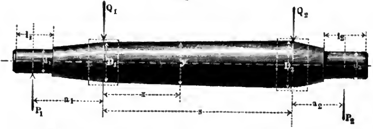
Le diagramme ainsi obtenu fournit des indications très-nettes sur l'effet des congés, des renflements, des évidements et même sur les erreurs de calcul qui ont pu se produire; il montre, en même temps, les différences de sécurité d'un point à un autre, puisque, en chaque point, la tension réelle est à la tension limite dans le rapport inverse de l'ordonnée du diagramme d'essai à celle de la surface des moments théorique. Lorsqu'on connaît l'une des dimensions principales du diagramme d'essai, correspondant à celle du diagramme théorique, comme, par exemple, dans le cas actuel, le diamètre D', il est préférable de déterminer l'unité à adopter au moyen de cette donnée (c'est ce qui a été fait pour la fig. 262); on est beaucoup plus sûr, en opérant ainsi, de l'exactitude de l'unité Oe.

§ 92.

Arbre soumis à des charges en deux points de sa longueur.

Lorsqu'un arbre, comme celui de la fig. 263, est chargé en deux points, les extrémités portent le nom de fuseaux, tandis

Fig. 263.



que la partie moyenne constitue ce qu'on appelle le corps de l'arbre. Q_1 et Q_2 désignant les charges, s la longueur du corps, les pressions sur les tourillons sont données par les relations:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{s + a_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right)}{a_1 + s + a_2}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{s + a_1\left(1 + \frac{Q_1}{Q_2}\right)}{a_1 + s + a_2} \quad . \quad . \quad (86).$$

Au moyen de ces valeurs il est facile de calculer complètement les tourillons d_1 et d_2, ainsi que les fuseaux a_1 et a_2,

à la condition de déterminer préalablement les diamètres D_1 et D_2, en les considérant comme appartenant à deux têtes d'arbre idéales, sur chacune desquelles l'action des forces Q_1 et Q_2 serait supposée concentrée en un seul point.

Pour déterminer les diamètres du corps de l'arbre, aux différents points de sa longueur, on a, en désignant par y le diamètre de la section, située à la distance x du point d'application de Q_1:

$$\frac{y}{D_1} = \sqrt[3]{1 + \frac{x}{a_1}\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

équation qui montre que le profil du corps de l'arbre se trouve formé par deux arcs de paraboles cubiques. Ordinairement ces deux arcs se trouvent remplacés par de simples lignes droites, de telle sorte que le corps de l'arbre présente, en réalité, la forme d'un tronc de cône.

Les deux têtes de l'arbre peuvent se déterminer, comme on l'a indiqué au § 88, en supposant qu'on donne une faible profondeur aux rainures des clavettes; la largeur b des portées est celle des moyeux des pièces qu'elles doivent recevoir.

Dans un grand nombre de cas, les longueurs des fuseaux doivent être égales et les deux charges sont les mêmes, c'est-à-dire qu'on a: $a_1 = a_2$, $Q_1 = Q_2$; il en résulte

$$P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 \quad \text{et} \quad y = D,$$

c'est-à-dire que le corps de l'arbre est cylindrique.

Il peut encore arriver que, pour un fuseau, et même pour les deux, la charge soit en porte-à-faux. La fig. 264 se rap-

Fig. 264.

porte au premier cas et, si on désigne par s la longueur du corps de l'arbre comprise entre Q_1 et P_2, on a:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{s - a_2 \dfrac{Q_2}{Q_1}}{s + a_1}, \qquad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{s + a_2 + a_1\left(1 + \dfrac{Q_1}{Q_2}\right)}{s + a_1} \quad . \quad . \quad (88)$$

les valeurs de $\frac{y}{D_1}$, se déterminent, ici encore, par la formule (87). Pour une disposition de ce genre, il peut arriver que cette formule conduise à $y = 0$ pour un certain point; c'est ce qui a lieu, si, pour un point situé à une distance x_0 du point d'application de Q_1 (fig. 264), on a la relation:

$$x_0 = \frac{a_1}{\frac{Q_1}{P_1} - 1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (89).$$

Dans ce cas, pour se rapprocher le plus possible de la forme indiquée par la théorie, il convient de faire usage, dans la pratique, d'un tronc de cône creux; on peut encore économiser la matière, en ayant recours à un retrécissement dans cette partie de l'arbre; toutefois, le diamètre correspondant à l'abscisse x_0 ne doit pas être indéfiniment réduit, car il existe toujours en ce point un certain effort de glissement (§ 221).

Exemple. $Q_1 = 2000^k$, $Q_2 = 1000^k$, $s = 1800^{mm}$, $a_1 = a_2 = 800^{mm}$. *On a* $\frac{P_1}{Q_1} = \frac{1800 - 800 . \frac{1}{2}}{1800 + 800} = \frac{14}{26}$, *par suite,* $P_1 = \frac{7 \cdot 2000}{13} = 1077^k$; *de plus,* $\frac{P_2}{Q_2} = \frac{1800 + 800 + 800 \cdot 3}{1800 + 800} = \frac{50}{26}$, *d'où* $P_2 = \frac{50 \cdot 1000}{26} = 1923^k$; *au moyen de ces valeurs, il est facile de déterminer les dimensions des tourillons et des fuseaux. On a d'ailleurs* $y = 0$ *pour* $x_0 = \frac{800}{\frac{26}{14} - 1} = \frac{800 \cdot 14}{12} = 933^{mm}$; *ce point se trouvant compris dans la longueur du corps de l'arbre, il y a lieu d'appliquer le mode d'approximation indiqué précédemment.*

§ 93.

Application de la graphostatique aux arbres à double charge.

Supposons que les forces données Q_1 et Q_2 agissent normalement à l'axe AD et dans le même sens, comme précédemment (fig. 265). Sur la ligne $Aa\ldots$, perpendiculaire à AD, portons les longueurs $a.1 = Q_1$, $1.2 = Q_2$, du point O, choisi comme pôle, menons les rayons Oa, $O1$, $O2$, prolongeons aO jusqu'à sa rencontre, en b, avec la direction de la force Q_1; par ce point b menons bc parallèle à $1O$ et par le point c, qui se trouve sur la direction de Q_2, cd parallèle à $2O$; joignons enfin le point d au point a. Si, par le point O, dans le polygone des

forces, nous menons $O3$ parallèle à da, $2\,3$ représentera la pression P_2 sur le tourillon D, et $3a$ la pression P_1 sur l'autre tou-

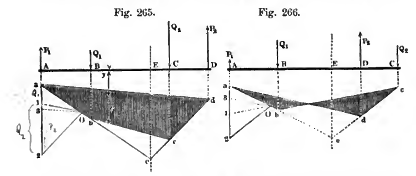


Fig. 265. Fig. 266.

rillon A; $abcd$ est la surface des moments, dont les ordonnées verticales t, servent à déterminer, comme on l'a indiqué précédemment (I, § 90), les diamètres correspondants de l'arbre. Le point d'intersection e des lignes ab et dc prolongées fournit un point, par lequel doit passer la résultante des forces Q_1 et Q_2. Si on commence par déterminer d'abord la ligne Ee, par exemple au moyen de la méthode du § 40, le problème actuel peut se ramener à celui qui a été résolu précédemment (I, § 90) et, dès lors, la direction de la ligne ad peut être choisie d'avance, comme on l'a fait dans ce premier cas.

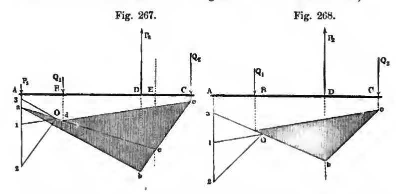
Si l'un des efforts s'exerce en dehors d'un des tourillons, (fig. 266), il peut se rencontrer, sur la ligne élastique, un point pour lequel le moment de flexion soit nul; c'est ce qui a lieu, lorsque la résultante des forces Q_1 et Q_2 tombe entre les appuis A et B (comme dans le problème I. b. § 90). L'effort de glissement, qui existe en ce point et que nous avons mentionné plus haut, se trouve représenté par 1.3.

Lorsque la résultante des forces Q_1 et Q_2 tombe en dehors des deux tourillons, comme dans la fig. 267, ce point de flexion nulle n'existe plus, mais la pression P_1 agit dans le même sens que les forces Q_1 et Q_2; la méthode à suivre, dans ce cas, est d'ailleurs identique à celle que nous venons d'indiquer.

Il peut encore arriver que la résultante tombe directement sur le support D. Dans ce cas, les moments des forces, qui tendent à produire la flexion, sont complètement nuls sur la longueur AB, tandis que, dans l'hypothèse précédente, ils étaient

simplement très-petits; les deux lignes limitant la surface des moments coïncident sur cette longueur AB. Dans ce cas, il

Fig. 267. Fig. 268.



convient de donner simplement au fuseau AB et au tourillon A des dimensions suffisantes pour résister aux efforts accidentels ou aux forces qui ne sont pas comprises dans celles qu'on introduit dans le calcul: ces dimensions peuvent donc être généralement très-faibles. La décomposition des forces isolées en d'autres forces, situées dans les plans extrêmes des moyeux, s'opère comme on l'a indiqué au § 90.

En dehors des différents, cas particuliers, qui viennent d'être examinés, on pourrait en imaginer beaucoup d'autres, par exemple, ceux qui correspondraient à des charges agissant dans des sens opposés, mais comme les exemples précédents suffisent parfaitement pour faire comprendre la marche qu'il convient de suivre, nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

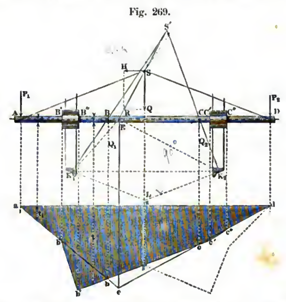
§ 94.

Arbre soumis à deux efforts obliques. Essieu de wagon. Arbre de grue.

Lorsque les forces Q_1 et Q_2, au lieu d'être normales à l'axe, viennent à agir obliquement, la solution graphique du problème continue à présenter sensiblement le même degré de simplicité. Nous choisirons, comme exemple d'application de la méthode, un essieu de wagon, en négligeant les influences accessoires, qui n'ont, en réalité, qu'une faible importance.

En dehors de la charge verticale Q (fig. 269), appliquée au centre de gravité S du wagon, il peut se produire, de temps

Fig. 269.

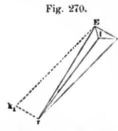


à autre, au même point, une force horizontale H, résultante de la force centrifuge et des vibrations, qui, d'après Scheffler, peut s'élever à 0,4 Q. Ces deux forces ont une résultante R, qui agit obliquement sur l'essieu. Cette force donne naissance à des pressions, à la fois sur les têtes de rails K_1 et K_2 et sur les tourillons A et D. Pour obtenir les composantes sur les rails, il convient de remarquer que, pour le rail K_2, il ne peut y avoir qu'une pression normale au bandage et que, par suite, on doit prendre l'angle $LK_2S' = 90^0$. Aux points d'intersection B et C de l'axe et des directions des pressions exercées sur les rails, ces dernières peuvent se décomposer en forces verticales Q_1 et Q_2 et en forces horizontales, qu'on peut négliger; les efforts obliques, exercés sur les tourillons, peuvent de même être remplacés par des composantes horizontales et les pressions verticales P_1 et P_2; ces dernières permettent de calculer les diamètres d_1 et d_2 et d'obtenir ainsi le résultat qui a le plus d'importance dans la question. Maintenant, par le point d'application E de la résultante R sur l'axe, menons Ec perpendiculaire à

AD et à ad, joignons ea et ed et réunissons par une ligne droite les points b et c, où les lignes précédentes sont rencontrées par les directions de Q_1 et Q_2 prolongées; enfin, par les extrémités B', B'', C', C'', menons des perpendiculaires à ad et joignons $b'b''$, $c'c''$; nous obtenons ainsi le polygone funiculaire $ab'b''c'c''d$ pour le cas actuel. Les ordonnées t de ce polygone servent à déterminer, comme précédemment, les diamètres y de l'arbre, en partant du diamètre d_1 du tourillon et de l'ordonnée t_1 correspondant au collet de ce tourillon.

La direction de la pression $K_1 B$ peut être déterminée par un procédé plus simple que celui qui consiste à faire usage du point S', dont le tracé est souvent incommode. Imaginons qu'on joigne un point quelconque de la résultante R, le point E, par exemple, avec les têtes de rails K_1 et K_2, qu'on décompose cette résultante $R = Er$ (fig. 270) en deux composantes Ek_2 et $k_2r = Ek_1$, suivant les directions EK_2 et EK_1, qu'on mène k_2l horizontal et El parallèle à la direction connue K_2S', les deux longueurs ainsi déterminées, lE et rl, représentent respectivement les efforts exercés en K_2 et K_1 et la seconde donne la direction cherchée; Ek_2 et k_2l sont les forces intérieures, agissant au sommet K_2 du polygone funiculaire et qui doivent être en équilibre avec la pression, de direction connue, K_2S'.

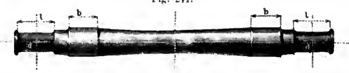
Fig. 270.



Comme la force horizontale H peut être dirigée aussi bien à gauche qu'à droite, il convient de faire usage, pour chacune des moitiés de l'arbre, de la partie du polygone $ass'b''b'$, qui a la plus grande surface; c'est pour ce motif que cette surface se trouve reproduite symétriquement à gauche, en pointillé. En outre, on peut tracer le polygone funiculaire pour la seule charge verticale Q. Ce tracé fournit, pour le corps de l'arbre, une ordonnée plus grande que ss' et c'est celle dont on doit se servir. La forme générale du corps de l'essieu est alors celle d'une surface de révolution, évidée au milieu, telle que celle représentée par la fig. 271, dont on trouve, dans la pratique, de nombreuses reproductions. Les tourillons des essieux de wagons ayant une vitesse de rotation de 250 à 300 tours, par minute, il convient, lorsqu'on les fait en fer forgé, d'adopter le nombre 2 pour le rapport de la longueur au diamètre. Les

collets de ces tourillons jouent, dans les courbes, un rôle assez important, en raison de la force latérale H; il convient, par

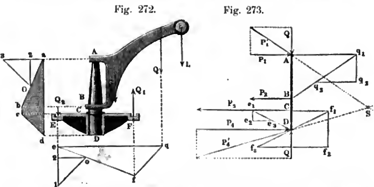
Fig. 271.



suite, de donner à la saillie e de ces collets une hauteur égale à $\frac{d}{7}$ ou même $\frac{d}{6}$, c'est-à-dire de la faire notablement plus forte que dans les tourillons ordinaires.

Les arbres verticaux des grues sont généralement soumis à des efforts obliques, agissant sur plusieurs points, comme nous allons le voir dans les exemples suivants. Une grue de quai, à arbre vertical (fig. 272), est soumise à la charge L et au poids propre G du treuil et du bras, qui se composent pour donner une résultante totale Q sur la colonne (voir l'exemple § 34 et la remarque page 92). En A et B sont des tourillons de rotation et en CD l'arbre se trouve engagé dans un croisillon en fonte, solidement fixé en E et F. Pour déterminer tout d'abord les efforts en ces deux points, traçons le polygone funiculaire efq et le polygone des forces $e\,2\,1\,O$, où $2\,1 = Q$, $1\,e =$ la force Q_1, en F, et $e\,2 =$ la force Q_2, en E. Ces trois forces extérieures, agissant toutes les trois parallèlement à l'axe de l'arbre, nous pouvons faire usage de la méthode de la fig. 259. Si, dans la fig. 273,

Fig. 272. Fig. 273.

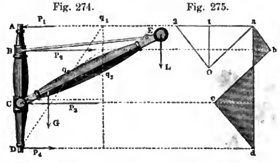


nous menons $q_1 q_2 = Q$, $q_2 q_3$ parallèle à $A q_1$ et perpendiculaire à AB, nous obtiendrons les forces horizontales P_1 et P_2, l'une en

A, l'autre en B. Le tourillon en A doit supporter toute la charge verticale; par conséquent, à la force P_1, en A, vient s'ajouter la force Q pour donner une résultante inclinée P_1'. Menons maintenant Cf_1 perpendiculaire à AC, faisons $f_2 f_1 = Q_1$ et, après avoir joint le point f_1 au point D, tirons $f_2 f_3$ parallèle à Cf_1, la ligne $f_2 f_3$ représente la grandeur d'une force qui, pour le point C, est dirigée de droite à gauche, et, pour le point D, en sens contraire. De même, si on porte, suivant $e_1 e_2$, la force Q_2, qu'on joigne $e_1 D$ et qu'on mène $e_2 e_3$ parallèle à $e_1 C$, cette longueur $e_2 e_3$ représente la grandeur d'une force dont l'action, pour le point C, est encore dirigée de droite à gauche et, pour le point D, en sens inverse. Nous devrons prendre, par conséquent, $P_3 = f_2 f_3 + e_3 e_2$ et $P_4 = e_2 e_3 + f_3 f_2$. La pression verticale de l'arbre est tout entière reportée en D: nous aurons donc à composer en ce point la force verticale $Q = f_2 f_1 - e_1 e_2$ avec P_4, pour obtenir la résultante P'_4 (comme vérification le point d'intersection S de P_1' et de P'_4 doit se trouver sur la résultante de P_2 et P_3).

Si nous négligeons, comme précédemment, la compression de l'arbre, nous pouvons, avec P_1, P_2, P_3, P_4, former le polygone des forces $a\,2\,3\,O$, représenté, à échelle réduite, fig. 272, et obtenir ainsi la surface des moments $a\,b\,c\,d$.

La fig. 274 représente une autre disposition de grue, avec un arbre mobile, sur lequel sont fixés le mécanisme du treuil et la flèche. En supposant donnée de nouveau la position de $Q = L + G$, transportons cette force Q en $q_1\, q_3$, la ligne $A q_1$ étant menée, par le point A, perpendiculairement à l'arbre, et, après



avoir joint q_1 et D, menons, parallèlement à $A q_1$, la ligne $q_3 q_2$, jusqu'à la rencontre de $q_1 D$; $q_3 q_2$ représente alors la force horizontale P_1, en A, et $q_2\, q_3$ la force également horizontale P_4,

en D. Cette dernière se compose avec la force Q pour donner une résultante oblique.

Par une décomposition tout-à-fait analogue de Q, aux points B et C, on obtient les forces horizontales P_2 et P_3, lesquelles sont égales, mais de sens opposés; la dernière se compose avec la réaction Q, pour donner également une résultante oblique. Les quatre forces horizontales, que nous venons d'indiquer pour les points A, B, C, D, présentent une disposition tout-à-fait identique à celle des charges normales de la fig. 259. Nous obtiendrons donc une surface de moments *abcd* (fig. 275) entièrement semblable et qui, par conséquent, entre B et D, présente un point, où le moment de flexion est nul; il en résulte que l'axe de l'arbre doit présenter une double flexion, l'une à droite pour la partie supérieure, l'autre à gauche pour la partie inférieure. Dans le polygone des forces, on a:

$$2a = P_2,\ a2 = P_3,\ 21 = P_4 \text{ et } 12 = P_1.$$

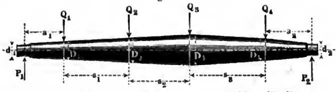
§ 95.

Arbre chargé en un nombre de points égal ou supérieur à trois.

Supposons, ce qui se présente assez fréquemment, qu'un arbre se trouve chargé en quatre points; en désignant par Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 (fig. 276) les différentes charges et par s_1, s_2, s_3 les longueurs de l'arbre, comprises entre les directions de ces forces, on aura:

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{s_1 + s_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right) + s_3\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1}\right) + a_2\left(1 + \frac{Q_2}{Q_1} + \frac{Q_3}{Q_1} + \frac{Q_4}{Q_1}\right)}{a_1 + s_1 + s_2 + s_3 + a_2} \qquad (90)$$

Fig. 276



équation qui, par un changement convenable d'indices, peut donner également la valeur de $\frac{P_2}{Q_2}$; comme moyen de simplification ou de vérification des calculs, on peut faire usage de la relation $P_1 + P_2 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$.

Si on suppose nulles à la fois les deux quantités Q_4 et s_3, on obtient une expression qui se rapporte à un arbre chargé en trois points; si on fait, de plus, $Q_3 = 0$ et $s_2 = 0$, on retombe sur la formule (86) pour un arbre chargé en deux points; enfin pour $Q_2 = 0$ et $s_1 = 0$, on se trouve dans le cas d'un arbre simplement chargé en un point.

Pour les différentes parties du corps de l'arbre, on peut établir des formules analogues à la relation (87); il suffit d'ailleurs, dans la pratique, de réunir par de simples troncs de cônes, les différentes têtes de cet arbre.

Le diamètre de la tête de l'arbre correspondant à Q_4 se détermine par la formule:

$$\frac{D_4}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{a_1 + s_1\left(1 - \frac{Q_1}{P_1}\right) + s_2\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1}\right) + s_3\left(1 - \frac{Q_1}{P_1} - \frac{Q_2}{P_1} - \frac{Q_3}{P_1}\right)}{\left(\frac{l_1}{2}\right)}}$$

Si, dans cette formule, on égale successivement à 0 les quantités s_3, s_2 et s_1, on obtient les valeurs de $\frac{D_3}{d_1}, \frac{D_2}{d_1}, \frac{D_1}{d_1}$.

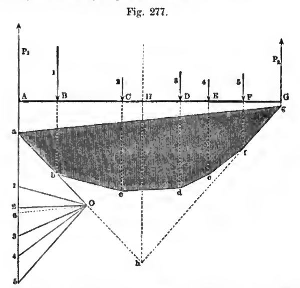
Dans le cas où l'un des fuseaux serait chargé en porte-à-faux, la méthode à suivre peut se déduire facilement de ce qui a été fait précédemment pour des cas analogues; on peut également arriver directement au résultat, en considérant a_1 ou a_2 comme négatif.

Quant à la détermination graphique des forces et des moments, elle peut se faire de la manière suivante: avec les forces données, depuis 1 jusqu'à 5, on forme le polygone des forces, puis, d'après les indications du § 40, le polygone funiculaire *abcdefg*; on trace ensuite, dans le polygone des forces, $O6$ parallèle à ga; 5 6 représente alors la force P_2, en G, et $6a$ la force P_1, en A. Ces forces P_1 et P_2 permettent de calculer les tourillons d_1 et d_2, en A et en G, tandis qu'on peut faire usage, comme précédemment, des ordonnées du polygone funiculaire, pour le calcul des diamètres aux différents points de l'arbre.

Le point d'intersection h des lignes ab et gf prolongées est un point de la direction Hh de la résultante de toutes les forces depuis 1 jusqu'à 5. Si on veut commencer par déterminer la position de cette résultante, au moyen de la composition successive des charges (§ 40), il est très-commode de se donner le

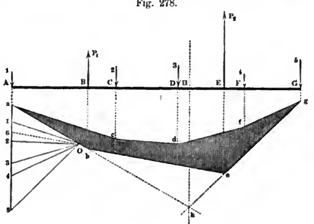
point O tel que ag soit parallèle à AG. On peut aussi d'ailleurs rabattre facilement le polygone funiculaire oblique, trouvé précédemment, sur une ligne parallèle à AG.

Fig. 277.



Si l'arbre a plus d'un fuseau chargé en porte-à-faux, comme on l'a supposé dans la fig. 278, la marche à suivre reste toujours la même; en partant du point a, on construit d'abord le

Fig. 278.



polygone des forces $a\,5\,O$, puis le premier côté du polygone funiculaire $b\,a$ jusqu'à l'aplomb $A\,a$ de la première force, le second côté $a\,c$ jusqu'à la direction $C\,c$ de la seconde force et ainsi de suite, jusqu'au dernier côté $e\,b$, qui ferme le polygone. Les directions du premier côté du polygone et de l'avant-dernier se coupent en un point de la résultante $H\,h$.

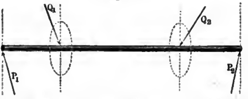
Le problème que nous venons de traiter donne lieu à différents cas particuliers, qu'on obtiendrait en supposant des charges dirigées en sens opposés ou inclinées sur l'arbre. La solution de chacun de ces cas ne peut d'ailleurs présenter aucune difficulté en se reportant aux problèmes du même genre, traités précédemment.

§ 96.

Arbre soumis à des forces situées dans des plans différents.

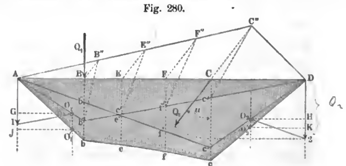
Le calcul analytique des dimensions d'un arbre chargé présente des difficultés notablement supérieures à celles que nous avons rencontrées jusqu'ici, lorsque les forces agissent dans des plans différents (fig. 279); la méthode graphostatique, au contraire,

Fig. 279.



permet d'arriver facilement au résultat. On commence par construire les polygones des forces $A\,O_1\,1$ et $D\,O_2\,2$ (fig. 280), pour Q_1 et Q_2, avec des distances de pôles égales, $G\,O_1 = H\,O_2$, de

Fig. 280.



manière à faire coïncider, en AD, les deux lignes de fermeture des polygones funiculaires $Ab'D$ et $Ac''D$ qu'on trace ensuite; cela fait, on reporte les ordonnées du second de ces polygones sur des ordonnées inclinées $BB'' = Bb''$, $CC'' = Cc''$, etc., qui font avec les ordonnées verticales du premier polygone, et en arrière, un angle μ, précisément égal à celui que font les deux plans passant par l'axe et par chacune des deux forces Q_1 et Q_2. Si on prend ensuite $Bb = B''b'$, $Cc = C''c'$, $Ee = E''e'$, etc., on obtient un polygone funiculaire $AbefcD$, dont les ordonnées verticales (§ 44) fournissent les moments de flexion, nécessaires pour déterminer les dimensions de l'arbre. La ligne $befc$ est une ligne courbe (arc d'hyperbole), tandis que Ab et cD sont de simples lignes droites. Si on mène encore O_1O_1' parallèle à $A1$, O_2O_2' parallèle à $D2$ et que, par les points O_1' et O_2', on trace les lignes $O_1'J$ et $O_2'K$ perpendiculaires à $A1$ et à $D2$, AJ et DK représentent les pressions P_1 et P_2 des tourillons, qui toutes les deux doivent être mesurées à l'échelle adoptée pour les polygones des forces.

B. Arbres à sections de formes complexes.

§ 97.

Section annulaire.

Pour les arbres, dont la section est une couronne circulaire et qui présentent, par conséquent, une forme analogue à celle des tuyaux, on commence par calculer les tourillons, comme tourillons creux, en faisant usage des données du § 79 (f), puis, en conservant, pour la partie creuse, la proportion admise dans ce premier calcul, on détermine, par rapport au diamètre du tourillon creux, toutes les autres dimensions de l'arbre, exactement comme nous l'avons fait avec les tourillons pleins. Le rapport du vide au diamètre extérieur, dont on fait le plus généralement usage, est 0,6.

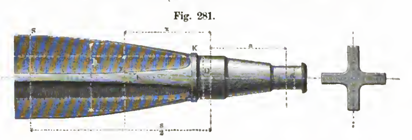
Cette méthode de calcul peut d'ailleurs être remplacée par la suivante: après avoir déterminé toutes les dimensions de l'arbre, en supposant la section circulaire et pleine, on adopte la valeur qu'on juge la plus convenable pour la proportion du vide et on augmente alors les différents diamètres, trouvés précédemment, dans le rapport indiqué par le second membre de la formule (65).

§ 98.

Section en croix. Table.

Pour les arbres en fonte, chargés en plusieurs points, une des formes de sections les plus convenables est la section en croix. Le corps de l'arbre se compose, dans ce cas, de quatre nervures ou ailettes et présente une certaine analogie avec le tourillon à ailettes du § 86. La forme des fuseaux est souvent celle d'un conoïde, comme, par exemple, dans la fig. 281. Pour

Fig. 281.



construire un arbre de cette espèce, on commence par tracer le corps (en pointillé), comme s'il devait être à section circulaire pleine, puis on établit le profil $KS\ldots$ des nervures, en le raccordant, d'un côté, à la tête de l'arbre en K et, de l'autre côté, au renflement (V. § 101) compris entre les deux fuseaux. Dans ce cas, si, pour une section quelconque (x) du corps, on désigne par

y le diamètre de l'arbre idéal à section circulaire pleine,

h et b la hauteur et l'épaisseur des nervures,

on doit déterminer b, de manière à satisfaire à la relation:

$$\frac{y}{h} = \frac{b}{h}\sqrt[3]{\frac{16}{3\pi}}\sqrt[3]{1 - \frac{b}{h} + \left(\frac{b}{h}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (91).$$

Au point de vue du calcul des poids, il est important de connaître le rapport de la surface F_1 de la section en croix à la surface F de la section circulaire; ce rapport est donné par l'expression:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{4}{\pi}\,\frac{b}{h}\left(\frac{h}{y}\right)^2\left(2 - \frac{b}{h}\right) \quad \ldots\ldots \quad (92).$$

La table suivante facilite beaucoup l'usage de ces formules.

$\frac{h}{y}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{h}{y}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F_1}{F}$	$\frac{h}{y}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{F_1}{F}$
2,27	0,05	0,63	1,65	0,13	0,84	1,37	0,22	0,94
2,14	0,06	0,65	1,61	0,14	0,85	1,31	0,25	0,95
2,03	0,07	0,69	1,57	0,15	0,86	1,27	0,27	0,96
1,94	0,08	0,73	1,53	0,16	0,87	1,22	0,30	0,97
1,87	0,09	0,76	1,50	0,17	0,88	1,19	0,33	0,99
1,81	0,10	0,78	1,47	0,18	0,89	1,15	0,36	0,99
1,74	0,11	0,80	1,41	0,19	0,90	1,10	0,40	0,99
1,69	0,12	0,82	1,42	0,20	0,92	1,06	0,45	1,00

Pour obtenir le poids du corps de l'arbre à ailettes, il suffit de multiplier celui de l'arbre idéal à section circulaire, préalablement calculé, par la moyenne arithmétique des différentes valeurs de $\frac{F_1}{F}$.

Exemple. En un certain point de la longueur, le profil de l'arbre à ailettes a une hauteur double du diamètre de l'arbre circulaire idéal; dans ce cas, on voit que, d'après la 2eme colonne et la 3eme ligne de la table, la largeur des nervures b doit être égale à 0,07 de la hauteur. La 3eme colonne indique, en même temps, que la surface de la section en croix n'est que les $\frac{69}{100}$ de celle de la section circulaire correspondante.

§ 99.

Section étoilée. Table.

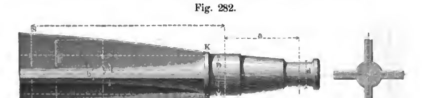
On emploie assez souvent, pour les arbres en fonte, la forme de section représentée par la fig. 282. On commence par tracer, comme précédemment, l'arbre circulaire idéal et le profil des nervures, qui se trouve généralement déterminé par des considérations d'aspect. Cela fait, on peut, pour chaque section, se donner l'épaisseur b des nervures et chercher le diamètre k du noyau, ou, au contraire, se proposer de déterminer b, en se donnant k (en le supposant constant, par exemple, sur toute la longueur de l'arbre). Dans les deux cas, la valeur cherchée doit satisfaire à la relation:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\left(\frac{k}{h}\right)^4 + \frac{16}{3\pi}\frac{b}{h}\left[1 - \left(\frac{k}{h}\right)^3\right]} \quad . \quad . \quad (93)$$

qui a servi à établir la table que nous donnons ci-après.

Comme le noyau, au point *K*, a un diamètre plus faible que celui de la tête de l'arbre et présente, par suite, une

Fig. 282.



résistance moindre, il est tout-à-fait rationnel, comme l'indique la figure, de laisser aux nervures en ce point une certaine saillie sur la tête, afin de compenser cette diminution de résistance; l'établissement de cette saillie ne présente d'ailleurs aucune difficulté, grâce à la présence du collet *K*.

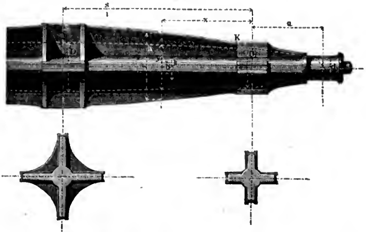
$\frac{b}{h}$	Valeurs de $\frac{h}{y}$, pour $\frac{k}{h}$ =												
	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20
0,05	1,30	1,40	1,50	1,61	1,72	1,84	1,94	2,04	2,15	2,18	2,22	2,26	2,27
0,06	1,30	1,39	1,48	1,58	1,68	1,79	1,87	1,95	2,02	2,07	2,11	2,13	2,14
0,07	1,29	1,38	1,46	1,56	1,65	1,74	1,82	1,89	1,94	1,98	2,00	2,02	2,02
0,08	1,28	1,36	1,45	1,53	1,62	1,70	1,76	1,83	1,87	1,91	1,93	1,93	1,93
0,09	1,27	1,35	1,43	1,51	1,59	1,66	1,72	1,77	1,81	1,84	1,86	1,87	1,87
0,10	1,27	1,34	1,42	1,49	1,56	1,63	1,68	1,72	1,75	1,78	1,80	1,80	1,81
0,11	1,26	1,33	1,40	1,47	1,54	1,60	1,64	1,68	1,71	1,73	1,74	1,75	1,75
0,12	1,25	1,32	1,39	1,45	1,51	1,57	1,61	1,64	1,67	1,68	1,69	1,70	1,70
0,13	1,25	1,31	1,38	1,43	1,49	1,54	1,58	1,61	1,63	1,64	1,65	1,65	1,65
0,14	1,24	1,30	1,36	1,42	1,47	1,51	1,55	1,57	1,59	1,60	1,61	1,61	1,61
0,15	1,23	1,29	1,35	1,40	1,45	1,48	1,52	1,54	1,56	1,57	1,58	1,58	1,58
0,16	1,23	1,28	1,34	1,38	1,43	1,46	1,49	1,52	1,53	1,54	1,55	1,55	1,55
0,17	1,22	1,27	1,33	1,37	1,41	1,45	1,47	1,49	1,50	1,51	1,52	1,52	1,52

Exemple. Pour une certaine section du corps de l'arbre, on a $\frac{h}{y} = 2$ *et* $\frac{k}{y} = 0,6$, *c.-à-d.* $\frac{k}{h} = 0,3$; *on doit, d'après la table, prendre b = 0,07 (colonne 12, ligne 3).*

Dans la fig. 282, où on a supposé *b* constant, on a à déterminer les différentes valeurs de *k*. Dans les cas ordinaires, il est parfaitement suffisant de connaître deux diamètres du noyau

entre deux points d'application des charges (par exemple les diamètres correspondant au tiers et aux deux tiers de sa longueur), et de faire passer par ces points un tronc de cône, qu'on substitue ainsi à la surface représentée par l'équation précédente (conoïde); comme d'ailleurs l'emploi de la table se prête très-facilement à la détermination du profil du noyau, rien n'est plus simple que d'obtenir, si on le désire, un plus grand nombre de points.


Fig. 283.



Dans la fig. 283, qui représente un arbre chargé en trois points, k étant supposé constant, on a à déterminer b, en conservant également au fuseau a une section étoilée. Les têtes, au milieu et aux extrémités, présentent un renflement, destiné à permettre l'établissement des clavettes; la tête du milieu est renforcée par huit petites nervures, indiquées sur l'une des coupes transversales. A l'extrémité de chaque tourillon est fixé un tourillon auxiliaire plus petit, qui est d'un grand secours pour la pose des arbres de cette espèce, lorsqu'ils atteignent un poids considérable.

§ 100.

Arbres à nervures terminées par un rebord. Table.

Pour les arbres qui ont à supporter des charges considérables, on a fréquemment recours à la forme de section, repré-

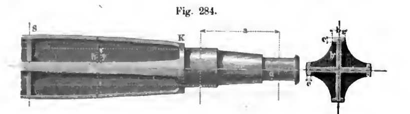
sentée dans les fig. 284 et 285 et qui se compose de nervures en croix, munies de rebords à leurs extrémités. Dans ce cas, comme dans les précédents, après avoir tracé l'arbre circulaire idéal, de diamètre d, on choisit le profil, c'est-à-dire la hauteur h pour chacune des sections. Si nous supposons que, pour chaque section, l'épaisseur e du rebord soit précisément égale à l'épaisseur b de la nervure, nous aurons, dans le cas de la fig. 284, à prendre, pour la largeur b_1 :

$$\frac{b_1}{b} = 1 + \frac{\frac{3\pi}{16}\left(\frac{y}{h}\right)^3 - \frac{b}{h} - \left(\frac{b}{h}\right)^3}{6\left(\frac{b}{h}\right)^2 - 12\left(\frac{b}{h}\right)^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

formule qui a servi à calculer la table suivante.

$\frac{b}{h}$	Valeurs de $\frac{b_1}{b}$, pour $\frac{h}{y}$ =									
	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00
0,05	—	—	—	—	—	7,94	6,17	4,81	3,64	2,75
0,06	—	—	—	—	6,99	5,38	4,13	3,17	2,34	1,07
0,07	—	—	—	6,70	5,12	3,91	3,45	2,24	1,61	1,01
0,08	—	—	6,82	5,16	3,91	2,96	2,22	1,65	1,17	—
0,09	—	—	5,45	4,11	3,10	2,33	1,73	1,01	—	—
0,10	—	6,00	4,48	3,37	2,53	1,89	1,39	—	—	—
0,11	—	5,05	3,77	2,82	2,11	1,57	1,15	—	—	—
0,12	6,56	4,34	3,23	2,42	1,80	1,34	—	—	—	—
0,13	5,73	3,78	2,81	2,10	1,56	1,15	—	—	—	—
0,14	5,06	3,34	2,48	1,85	1,38	1,01	—	—	—	—
0,15	4,53	2,98	2,21	1,65	1,22	—	—	—	—	—
0,16	4,09	2,69	2,00	1,48	1,11	—	—	—	—	—
0,17	3,73	2,45	1,81	1,35	—	—	—	—	—	—

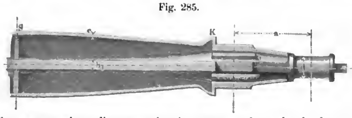
Fig. 284.



Comme en réalité $\frac{b_1}{b}$ ne peut pas descendre au-dessous de 1 et qu'on ne lui fait jamais dépasser 7, les valeurs inscrites dans la table, pour ce rapport, sont comprises entre ces limites. On se borne d'ailleurs à déterminer quelques points, au moyen de cette table, et à les réunir par une ligne continue.

La forme de section de la fig. 284, qui est très-employée par les constructeurs anglais, a l'avantage de n'exiger qu'une assez faible quantité de matière; aussi convient-elle spécialement pour

Fig. 285.



les constructions d'une certaine importance; les rebords de nervures donnent à l'arbre une apparence de force, qui est de nature à faire naître le sentiment de la sécurité.

Dans la forme représentée fig. 285, on a toujours, pour l'épaisseur du rebord, $c = b$, mais sa largeur est constante et égale à $2b$; dans ce cas, l'épaisseur du noyau k doit être variable. Le rapport $\frac{k}{h}$ doit être choisi, de manière à satisfaire à la relation:

$$\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\left(\frac{k}{h}\right)^4 + \frac{16}{3\pi}\left[\frac{b}{h}\left(1 - \frac{k^3}{h^3}\right) + 6\frac{b^2}{h^2} - \left(11 + \frac{k}{h}\right)\frac{b^3}{h^3}\right]} \quad (95).$$

L'emploi de cette formule peut être avantageusement remplacé par la table suivante. Pour ce dernier arbre, comme pour tous les arbres à nervures que nous avons examinés jusqu'ici, on modifie le profil longitudinal, jusqu'à ce qu'on arrive à des lignes qui, dans toutes les positions, présentent un aspect satisfaisant, sans s'écarter toutefois notablement de la forme rigoureuse.

Exemple. Pour une section voisine de la tête de l'arbre, la hauteur du profil $h = 1,5\,y$ *et* $b = \frac{h}{10}$; *pour ces valeurs, qui correspondent à la colonne 8 et à la ligne 7, la ligne 1 fournit* $k = 0,5\,h$.

Dans la disposition de la fig. 285, les rainures pour le clavetage sont ménagées sur des nervures spéciales, intercalées entre les nervures principales, de telle sorte que la tête de l'arbre

présente, en section, la forme d'une croix à huit bras. Les rainures ainsi disposées, qui ont l'avantage d'être accessibles par leurs deux extrémités, sont bien préférables à celles qu'on établissait primitivement sur les nervures principales, en avant des saillies *K*.

$\frac{b}{h}$	Valeurs de $\frac{h}{y}$, pour $\frac{k}{h}$ =												
	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20
0,05	1,28	1,37	1,46	1,56	1,66	1,75	1,84	1,92	1,98	2,04	2,06	2,07	2,08
0,06	1,27	1,34	1,43	1,52	1,58	1,69	1,75	1,82	1,86	1,90	1,93	1,94	1,95
0,07	1,25	1,31	1,40	1,48	1,55	1,65	1,68	1,73	1,77	1,80	1,82	1,82	1,83
0,08	1,23	1,29	1,38	1,44	1,51	1,57	1,62	1,66	1,69	1,71	1,72	1,72	1,73
0,09	1,22	1,27	1,35	1,41	1,47	1,52	1,56	1,59	1,62	1,63	1,64	1,65	1,65
0,10	1,20	1,25	1,32	1,37	1,43	1,47	1,51	1,53	1,55	1,57	1,58	1,59	1,59
0,11	1,19	1,23	1,30	1,34	1,39	1,43	1,46	1,48	1,50	1,50	1,51	1,52	1,52
0,12	1,17	1,21	1,27	1,32	1,35	1,39	1,41	1,43	1,45	1,46	1,47	1,47	1,47
0,13	1,16	1,19	1,25	1,29	1,32	1,35	1,37	1,39	1,40	1,41	1,42	1,42	1,42
0,14	1,14	1,17	1,23	1,26	1,29	1,32	1,34	1,35	1,36	1,36	1,37	1,37	1,37
0,15	1,13	1,15	1,21	1,24	1,27	1,29	1,31	1,32	1,33	1,33	1,34	1,34	1,34
0,16	1,12	1,14	1,19	1,22	1,24	1,26	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,30	1,30
0,17	1,10	1,12	1,17	1,20	1,22	1,24	1,25	1,26	1,26	1,26	1,26	1,27	1,27

§ 101.

Tracé des profils des nervures des arbres.

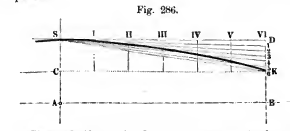
Pour effectuer le tracé des lignes à faible courbure, qui doivent limiter le profil des arbres à nervures ou à ailettes, on peut employer une des méthodes suivantes. Dans les figures correspondant à ces différentes méthodes, *AB* représente l'axe géométrique de l'arbre, *S* le sommet (connu) de la courbe du profil, *K* le point, également donné, où cette même courbe vient s'arrêter sur la tête de l'arbre.

1. *Arc de cercle.* Ce genre de profil n'est admissible que pour les tracés à petite échelle, qui peuvent s'effectuer au moyen de gabarits circulaires.

2. *Parabole* (fig. 286). On mène *SD* et *CK* parallèles à *AB* et on partage *SD* et *DK* en *n* parties égales (six, par exemple); par les points de division I, II, III ... de *SD*, on mène des perpendiculaires à *CK* et on trace, par le point *S*, les

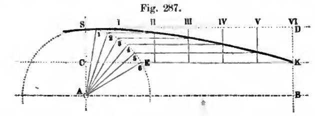
lignes $S1$, $S2$, $S3$ ... qui, par leurs intersections avec les perpendiculaires I, II, III..., fournissent un certain nombre de points de la parabole.

Fig. 286.



3. *Sinusoïde* (fig. 287). On trace, comme précédemment, les lignes SD et CK parallèles à AB; du point A, comme centre, avec AS pour rayon, on décrit un cercle et on divise l'arc SE, compris entre le point S et la ligne CK, en n parties égales

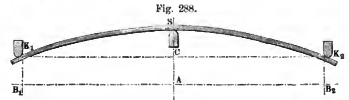
Fig. 287.



(six, par exemple); on fait de même pour la ligne SD et, par les points de division 1, 2, 3 ... on mène des parallèles à AB, qui, par leurs intersections avec les perpendiculaires abaissées sur cette même ligne des points I, II, III ..., fournissent autant de points de la courbe cherchée.

4. *Ligne élastique.* On prend une règle prismatique, à section carrée (fig. 288), qu'on courbe avec beaucoup de soin, en agissant sur elle par pression, aux points K_1, K_2 et S; lorsqu'on

Fig. 288.

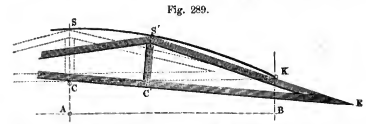


est arrivé à une courbure, dont la flèche CS ait la grandeur voulue, on s'en sert pour tracer la courbe. Dans les constructions

d'une certaine importance, on doit faire usage de règles ayant de 20 à 30^{mm} d'épaisseur, qu'on conserve sous l'eau. Dans les petits tracés sur les planches à dessiner ordinaires, il convient de ne pas en employer d'une épaisseur inférieure à 5^{mm}.

5. *Cardioïde.* La méthode que nous allons indiquer est en usage dans un grand nombre d'usines; elle s'emploie de préférence pour tracer directement la courbe du profil sur la planche même qui est préparée pour former une nervure du modèle de l'arbre. Pour effectuer ce tracé, on commence par préparer un calibre en bois $S'KEC$ (fig. 289), dont les dimensions $C'S' = CS$ et $CE = CK$ sont données par la position des points S et K, qu'il s'agit de relier par une courbe. Après avoir fixé en C et en K deux fortes pointes, on fait mouvoir le calibre, en ayant soin d'appuyer constamment le côté CE contre la pointe C et le côté $S'E$ contre la pointe K; dans ce mouvement, le

Fig. 289.



point S' du calibre décrit un arc de cardioïde, qui remplit parfaitement le but qu'on se propose; en fixant au point S' un crayon en plomb, on peut obtenir directement, comme nous l'avons dit, le tracé de la courbe sur la planche qui doit représenter l'une des nervures dans le modèle.

Pour les tracés à effectuer sur les planches à dessiner ordinaires, le procédé le plus commode consiste à déterminer d'abord un certain nombre de points de la courbe, par l'une des méthodes 2 ou 3, et à la tracer ensuite au moyen d'une règle mince, qu'on courbe de manière à la faire passer par ces différents points.

§ 102.

Arbres en bois.

Dans les roues hydrauliques on rencontre encore un assez grand nombre d'arbres en bois de chêne, dont la section est un polygone régulier. A l'exception des extrémités, qui doivent être

disposées spécialement, d'après le mode de fixation adopté pour les tourillons (V. § 86), ces arbres sont prismatiques et leur diamètre est, par suite, en tous les points, celui qu'exige la section où se produit le maximum de tension. Pour déterminer le diamètre d'un arbre en bois de chêne, on commence par chercher celui de la tête de l'arbre en fonte, également chargé, (V. § 87 à 95) et on multiplie ce dernier par 1,55 (c'est-à-dire par la racine cubique du rapport des coefficients de résistance de la fonte et du bois, qui sont respectivement 7,5 et 2). Le diamètre ainsi obtenu peut, dans certains cas, se trouver trop faible, lorsque, par exemple la tête de l'arbre doit être munie de bras, fixés directement dans le bois; mais il est suffisant lorsque la section reste pleine. Lorsque ce diamètre se trouve inférieur à celui qu'exige la fixation des tourillons, il est nécessaire de l'augmenter et de lui donner, sur toute la longueur de l'arbre, les dimensions que réclame cette fixation. Pour les arbres de roues hydrauliques, le choix à faire entre la fonte et le bois dépend essentiellement des circonstances locales, des prix comparatifs, etc.

Exemple. Un arbre de roue hydraulique, dont la demi-portée est de 2400^{mm}*, supporte une charge telle que ses tourillons en fonte doivent avoir 90*^{mm} *de diamètre et, par suite, 120*^{mm} *de longueur. Conformément aux indications du § 88, il convient de prendre, pour le diamètre de la tête de l'arbre en fonte:* $D = 90 \sqrt[3]{\frac{2400}{60}} = 90 \sqrt[3]{40} = 308^{mm}$. *Pour un arbre en bois, on aurait* $D' = 1 \cdot 55 \cdot 308 = 477^{mm}$.

VI. Arbres de transmission.

§ 103.

Calcul des arbres cylindriques.

Dans la construction des machines, on désigne sous le nom d'arbres de transmission les arbres destinés à transmettre des mouvements de rotation. Pour que ces arbres remplissent convenablement leur but, on doit leur donner des dimensions suffisantes pour que, sous l'action des forces qui produisent la rotation, ils n'éprouvent que des déformations extrêmement faibles. Ordinairement, en dehors des efforts de torsion, les arbres de transmission ont encore à supporter des efforts de flexion, déter-

minés par les poids et les pressions des roues d'engrenages, des poulies, des leviers, etc. établis en leurs différents points. Tout d'abord nous laisserons complètement de côté ce dernier genre d'efforts et nous nous bornerons à l'établissement des formules relatives au calcul des arbres cylindriques pleins, en fer et en fonte.

Si, pour un arbre de cette espèce, on désigne par

P la force qui produit le mouvement de rotation,
R le bras de levier sur lequel elle agit,
N le nombre de chevaux que l'arbre doit transmettre,
n le nombre de tours par minute,
d le diamètre de l'arbre,
L sa longueur, exprimée (exceptionnellement) en mètres,
ϑ^0 l'angle de torsion, en degrés,
$\mathfrak{S}$ la tension, que détermine la torsion, à la circonférence de l'arbre,
G le coefficient de torsion ($^2/_5$ du coefficient d'élasticité),

On doit prendre, en ayant égard uniquement à la résistance:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathfrak{S}} PR} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

et, en tenant compte de la torsion:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi G} \, \frac{1000 \cdot L}{\vartheta^0} \, \frac{360}{2\pi} PR} \quad . \quad . \quad (97).$$

Pour donner à l'arbre le même coefficient de sécurité qu'aux tourillons, il conviendrait, à la rigueur, de prendre pour $\mathfrak{S}$ (V. § 5) les $^4/_5$ seulement de la tension limite admise dans le calcul de ces organes; mais comme, en réalité, l'examen de plusieurs installations soignées conduit à la même valeur pour la tension dans les deux cas, nous pouvons faire $\mathfrak{S} = 6$ pour les arbres en fer et $\mathfrak{S} = 3$ pour la fonte. Ces valeurs, substituées dans la formule (96), donnent, pour les arbres en fer:

$$d = 0{,}95 \sqrt[3]{PR} = 84{,}7 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

pour les arbres en fonte:

$$d = 1{,}19 \sqrt[3]{PR} = 106{,}7 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99).$$

Relativement à la torsion, pour que la transmission s'effectue convenablement, il convient que l'angle de torsion ϑ ne dépasse pas $^1/_4{}^0$, par mètre courant, c'est-à-dire qu'on doit poser $\vartheta^0 = \frac{L}{4}$. On tire alors de la formule (97),

pour les arbres en fer:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{PR} = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

pour les arbres en fonte:

$$d = 4{,}91 \sqrt[4]{PR} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101).$$

Dans ces expressions le quotient $\frac{N}{n}$ se déduit du moment statique PR, à l'aide de la relation:

$$PR = \frac{60 \cdot 75 \cdot 1000}{2\pi} \frac{N}{n} = 716198 \frac{N}{n} \text{ ou } 716200 \frac{N}{n} \quad . \quad (102).$$

C'est au moyen des formules précédentes qu'a été dressée la table que nous donnons ci-après, pour les arbres en fer. De la comparaison des nombres fournis par cette table, il résulte qu'un arbre, tout en présentant une sécurité complètement satisfaisante au point de vue des déformations permanentes, peut cependant n'avoir que des dimensions tout-à-fait insuffisantes au point de vue de la torsion. Supposons, par exemple, qu'un arbre, de 8^m de longueur, soit sollicité à l'une de ses extrémités par une force de 100^k, agissant sur un bras de levier de 500^{mm} et qu'il s'agisse simplement de transmettre ce moment de rotation de 50000^{kmm} à l'autre extrémité; d'après la ligne 2 de la table, il suffirait, pour cela, de donner à l'arbre un diamètre de 35^{mm}. Mais, sur la même ligne, le nombre de la colonne 4, indique que ce moment est environ dix fois plus fort que celui qu'on peut admettre pour la torsion d'un arbre de ce diamètre et, d'après ce que nous avons dit précédemment, le déplacement de deux points des extrémités, situés primitivement sur la même fibre, correspondrait, dans ce cas, à un angle de $10 . 8 . \frac{1}{4} = 20^o$. Comme, d'après ce que nous avons admis, l'angle de torsion, ne doit pas dépasser $\frac{1}{4}{}^o$ par mètre courant, c'est dans la colonne 4 que nous devons chercher le moment qui nous est donné; il ne se trouve pas directement dans cette table, mais il est compris entre les nombres de la 7e et de la 8e ligne; nous devons donc prendre, pour le diamètre, un nombre intermédiaire entre ceux qui, pour ces deux mêmes lignes, se trouvent dans la colonne 1; nous trouvons ainsi 63^{mm} environ pour le diamètre qu'il convient de donner à l'arbre; d'après la colonne 2, au point de vue de la résistance, cet arbre pourrait être soumis à un moment six fois plus considérable.

Pour les arbres d'une faible longueur, où la valeur de ϑ est naturellement toujours très-petite, la considération de l'angle de torsion n'a qu'une importance secondaire. En principe, il conviendrait donc, dans chaque cas particulier, de tenir compte de la longueur de l'arbre, pour déterminer la grandeur de l'angle de torsion qu'on pourrait admettre comme limite.

La table que nous donnons, pour les arbres en fer, peut également servir à déterminer les diamètres des arbres en fonte, à la condition de prendre pour d, dans chaque cas, le nombre correspondant à une valeur double de celle qui est donnée pour PR ou $\frac{N}{n}$.

La charge limite admise pour l'acier étant les $^5/_3$ de celle du fer, il en résulte que, pour obtenir les diamètres d'arbres en acier, il suffit de multiplier ceux que la table donne, pour les arbres en fer, respectivement par $\sqrt[3]{0,6}$ ou 0,84 et $\sqrt[4]{0,6}$ ou 0,88, suivant qu'on les calcule au point de vue de la résistance, ou, au contraire, au point de vue de la torsion.

Remarque. Les arbres, qui sont exposés à de fortes variations de force vive, comme, par exemple, les arbres de laminoirs, de volants, etc., présentent des dimensions notablement supérieures à celles que donneraient les formules précédentes; les arbres de cette espèce constituent une construction spéciale, qui n'est pas soumise aux principes généraux que nous avons admis.

§ 104.

Arbres en fer forgé.

d	Calculés au point de vue de la résistance.		Calculés au point de vue de la torsion. (Arbres moteurs.)	
	PR	$\frac{N}{n}$	PR	$\frac{N}{n}$
30	32 968	0,046	2 776	0,004
35	50 511	0,071	5 142	0,007
40	75 398	0,105	8 773	0,012
45	107 354	0,150	14 053	0,020
50	147 263	0,206	21 418	0,030
55	196 096	0,274	31 359	0,044
60	254 470	0,355	44 413	0,062
65	323 536	0,452	61 173	0,085
70	404 088	0,564	82 280	0,115
75	497 012	0,694	108 430	0,151
80	603 187	0,842	140 367	0,196
85	723 501	1,010	178 888	0,250
90	858 835	1,199	224 842	0,314
95	1010 073	1,411	279 126	0,390
100	1178 100	1,645	342 694	0,478
110	1568 051	2,19	501 738	0,71
120	2035 756	2,84	710 610	0,99
130	2588 286	3,61	978 768	1,37
140	3232 706	4,51	1316 493	1,84
150	3976 088	5,55	1734 888	2,42
160	4825 498	6,74	2245 879	3,14
170	5788 005	8,08	2862 215	4,00
180	6870 679	9,59	3597 465	5,02
190	8080 588	11,28	4466 022	6,24
200	9424 800	13,16	5483 104	7,66
220	12541 231	17,51	8027 813	11,21
240	16286 054	22,74	11369 764	15,88
260	20706 285	28,91	15660 293	21,87
280	25861 651	36,11	21063 892	29,41
300	31808 700	44,41	27758 214	38,76

1er Exemple. Une chaine de grue exerce un effort de 2700k, tangentiellement au tambour sur lequel elle est enroulée et dont le rayon (mesuré jusqu'à l'axe de la chaine) est de 185mm; quel diamètre doit-on donner à l'arbre en fer du tambour pour qu'il puisse transmettre cet effort? Dans ce cas, on a $PR = 2700 \cdot 185 = 499500$ *et, comme on ne doit avoir égard qu'à la résistance, la ligne 10, colonne 2, indique qu'on doit prendre* $d = 75^{mm}$; *cette dimension doit être, en réalité, légèrement augmentée, pour tenir compte de l'effort de flexion, auquel l'arbre se trouve également soumis (V. § 109).*

2e. Exemple. Une turbine doit transmettre un travail de 92 chevaux par l'intermédiaire d'un arbre horizontal, en fer forgé, ayant une vitesse de 114 tours par minute et une longueur de 2m,6. Pour déterminer le diamètre à donner à cet arbre, remarquons qu'ici $\frac{N}{n} = \frac{92}{114} = 0,807$. *Au point de vue de la résistance, il suffirait, d'après la table (colonne 3, lignes 10 et 11), de prendre, pour ce diamètre, 78mm environ. Mais si l'on veut que l'angle de torsion, par mètre de longueur, ne dépasse pas* $^1/_4{}^0$, *ce qui correspond à* $^2/_3{}^0$ *pour la longueur totale, la même table indique (colonne 5, lignes 16 et 17) qu'on doit prendre* $d = 115^{mm}$. *Dans une installation, où les données étaient identiquement les mêmes que pour notre exemple, on a donné à l'arbre intermédiaire un diamètre* $d = 135^{mm}$; *ce qui a eu pour résultat de diminuer encore la valeur que nous avions admise pour l'angle de torsion; une partie de l'augmentation de diamètre peut d'ailleurs être considérée comme correspondant aux efforts de flexion. Avec le diamètre* $d = 115^{mm}$, *l'arbre se trouve présenter une résistance supérieure à celle du premier cas, dans le rapport* $\left(\frac{115}{78}\right)^3$, *ou de 3,18 à 1.*

§ 105.

Arbres de transmission des machines.

Dans les calculs précédents, sur le diamètre des arbres, nous n'avons pas tenu compte des forces qui peuvent tendre à leur donner un mouvement de flexion. En réalité, il existe toujours des forces de cette espèce, excepté dans les cas où le mouvement de rotation est produit par de véritables couples. Pour les arbres de transmission des usines, les forces qui tendent à produire la flexion consistent, dans la plupart des cas, en tensions de courroies et pressions de roues d'engrenages, auxquelles il convient d'ajouter les poids des divers organes. Si on voulait tenir compte exactement de toutes ces forces, on serait conduit à des calculs d'une extrême complication. De plus, il est d'usage, dans la pratique, de ménager sur ces arbres de longues portées, sans changement de diamètre, afin de pouvoir déplacer à volonté les poulies des courroies, qui servent généralement à transmettre le travail. On arrive, pour ces portées, à des

valeurs parfaitement admissibles, en se bornant à les calculer par les formules de torsion (100) ou (101), suivant qu'il s'agit d'arbres en fer ou en fonte. Les arbres ainsi calculés présentant, comme nous l'avons vu, une résistance généralement très-élevée, il en résulte qu'on peut négliger, sans hésitation, les forces de flexion, que nous avons indiquées précédemment et qui ont des valeurs relativement faibles. Pour arriver à diminuer le diamètre, il suffit d'augmenter le nombre n de tours par minute; ce nombre s'élève de 60 et 80 à 120, 140, 200 et même au delà, lorsque la machine à mouvoir doit tourner très-rapidement. Les arbres moteurs verticaux ont généralement une vitesse de rotation plus faible que celle des arbres horizontaux; lorsqu'un arbre vertical traverse plusieurs étages, on le diminue à chacun d'eux d'une quantité correspondant au travail transmis à l'étage inférieur. Les arbres verticaux de cette espèce s'exécutent assez souvent en fonte; on emploie également cette matière pour les longues transmissions horizontales, qui n'ont à transmettre aucun travail sur leur parcours.

Dans la pratique, la détermination des diamètres des arbres présente d'assez graves contradictions. Ainsi, certains arbres, pour lequels la solidité est une condition essentielle, se trouvent soumis à des tensions très-élevées, comme, par exemple, les arbres à manivelles des locomotives, pour lesquels la tension s'élève jusqu'à 9 ou 10^k, et les arbres d'hélices des navires à vapeur, où elle peut aller de 5 à 6^k. Dans un grand nombre d'usines, au contraire, on rencontre des arbres de transmission qui ont à supporter une pression très-faible (ce qui tient le plus souvent à ce qu'on les a calculés, avec raison d'ailleurs, en ayant égard à la torsion); nous devons ajouter, il est vrai, que, dans d'autres usines, les mêmes principes ne se trouvent pas observés et que les arbres, en raison de la faiblesse relative de leurs diamètres, subissent des torsions très-considérables.

L'examen comparatif des arbres de transmission, dans les différentes installations, présente, du reste, d'assez grandes difficultés, en raison de l'incertitude qui existe généralement sur le travail réellement transmis par un arbre et qui n'a souvent aucune relation avec le travail nominal, pour la transmission duquel cet arbre a été primitivement établi. Nous nous bornerons donc à faire remarquer que l'emploi des formules, précédemment données pour la torsion, conduit à des valeurs qui, légèrement augmentées

pour les arbres d'une très-grande longueur, présentent une concordance très-satisfaisante avec celles qu'on peut déduire de l'examen d'un grand nombre d'installations.

Quelques exemples rendront plus intelligibles les remarques qui précèdent et qui, jointes à celles du paragraphe précédent, présentent une assez grande utilité pour le constructeur.

1er. Exemple. Dans un grand navire de guerre, dont les machines ont été exécutées à l'usine d'Indret, l'arbre de l'hélice est commandé par deux pistons à vapeur, qui exercent une pression de 80,000k sur deux manivelles, de 550mm de longueur, calées à angle droit. Entre la partie coudée et l'hélice, cet arbre présente une longueur de 22m et un diamètre de 380mm, Si on calcule cet arbre, en ayant égard simplement à la résistance, comme ici $PR = 2\sqrt{1/2} \cdot 80000 \cdot 550 = 62216000^{k \cdot mm}$, *on doit prendre, d'après la formule (98),* $d = 0{,}95\sqrt[3]{62216000} = 376^{mm},4$, *valeur qui se rapproche beaucoup de celle de l'exécution et qui correspond à une tension maximum de 6k à la circonférence. Si on voulait, au contraire, s'imposer la condition que l'angle de torsion ne dépassât pas* $^1/_4{}^\circ$ *par mètre, soit, pour toute la longueur,* $^{22}/_4{}^\circ$, *on devrait, d'après la formule (100), prendre* $d = 4{,}13\sqrt[4]{62216000} = 367^{mm}$, *valeur légèrement inférieure à celle que donne la considération de la résistance. Avec la valeur admise pour l'exécution, la valeur de l'angle total de torsion doit donc être légèrement au-dessous de* $5^{o1}/_2$.

2e. Exemple. Dans la filature de Saltair, un arbre vertical en fonte, faisant 92 tours par minute, doit transmettre un travail de 300 chevaux; son diamètre est de 10 pouces anglais ou 254mm. En calculant cet arbre d'après la formule de torsion (101), nous trouverions $d = 143\sqrt[4]{\frac{300}{92}} = 192^{mm},2$, *valeur qui n'est que les* $^3/_4$ *de celle qu'on a adoptée pour l'exécution. Tous les autres arbres de l'usine sont établis dans les mêmes conditions de résistance que l'arbre principal.*

3e Exemple. Dans un moulin, établi sur une chûte du Rhin, un arbre, en fer forgé, de 68m de longueur, doit transmettre aux meules un travail de 120 chevaux, fourni par une turbine. Le nombre de tours de cet arbre est de 95 par minute, par suite $\frac{N}{n} = \frac{120}{95} = 1{,}263$. *En n'ayant égard qu'à la torsion, on devrait prendre d = 126mm (colonne 5, lignes 17 et 18), tandis qu'en ne tenant compte que de la résistance, la même table donne d = 92mm (colonne 3, lignes 13 et 14). Le constructeur a donné, en réalité, 96mm aux tourillons, qui sont au nombre de 32, et 100m au corps de l'arbre. Le maximum de tension correspondant est de 5k,2 à la circonférence des tourillons et de 4k,6 seulement pour le corps principal. Le constructeur de l'usine de Saltair (1) aurait donné à cet arbre un diamètre de 200mm au moins, correspondant à une résistance environ huit fois plus grande que celle qui a été adoptée en réalité.*

(1) *Fairbairn, qui, pour tous les cas analogues, a proposé l'emploi de la formule* $d = 160\sqrt[3]{\frac{N}{n}}$.

4° *Exemple. Dans la filature du Logelbach, un arbre en fonte de 210mm de diamètre, dont la vitesse de rotation est de 27 tours par minute, sert à transmettre un travail de 140 chevaux (mesuré au frein). Le rapport* $\frac{N}{n}$ *est alors* $\frac{140}{27} = 5{,}19$. *Comme il s'agit ici d'un arbre en fonte, nous devons doubler la valeur de ce rapport et nous trouvons ainsi que la valeur de d est comprise entre 200 et 220 (colonne 5, lignes 25 et 26); un calcul plus exact donne* $d = 225^{mm}$, *valeur qui est très-sensiblement celle qu'on a adoptée pour l'exécution. En tenant compte simplement de la résistance, on aurait trouvé, d'après la même table,* $d = 185^{mm}$ *(colonne 3, lignes 23 et 24).*

5°. *Exemple. Le même établissement possède une autre transmission en fonte de* $25^m{,}5$ *de longueur, qui, avec une vitesse de 50 tours par minute, doit transmettre un travail de 270 chevaux (mesuré au frein); ce qui donne 5,4 pour le quotient* $\frac{N}{n}$. *Les tourillons de cette transmission ont un diamètre de* 175^{mm}; *quant au corps de l'arbre, qui est légèrement renflé, il présente en section une forme analogue à celle de la fig. 282; on peut le supposer remplacé par un corps cylindrique, de* 215^{mm} *de diamètre, qui possède approximativement la même résistance. Si on cherche dans la table le diamètre à donner aux tourillons, en ayant égard simplement à la résistance, il convient, comme précédemment, de doubler le rapport* $\frac{N}{n}$, *et on trouve alors un nombre compris entre 180 et 190 ou, plus exactement,* 187^{mm}, *valeur supérieure à celle qu'on a admise en réalité. A ce dernier diamètre, qui est de* 175^{mm}, *correspond une tension* $\mathfrak{S} = 3^k{,}67$. *Pour le corps de l'arbre, comme sa longueur est très-grande, il convient de déterminer son diamètre par la formule de la torsion et de le chercher dans la colonne 5, pour une valeur de* $\frac{N}{n}$ *égale à* $2 \cdot 5{,}4 = 10{,}8$. *On trouve ainsi que d est compris entre 200 et 220; si on le calcule plus exactement par la formule (101), on arrive à* $d = 143\sqrt[4]{5{,}4} = 143 \cdot 1{,}52 = 217^{mm}$, *valeur qui coïncide très-sensiblement avec celle qu'on a admise en exécution.*

§ 106.

Calcul de l'angle de torsion d'un arbre.

Dans un arbre cylindrique, de diamètre d, qui, sur toute sa longueur L, est soumis à un moment de rotation PR, l'angle de torsion, pour une matière dont le coefficient d'élasticité de torsion est G, a pour valeur, d'après le § 13, n° I:

$$\vartheta^0 = \frac{32.360}{2\pi^2} \frac{PR}{d^4} \frac{1000\,L}{G} = \frac{180\,\mathfrak{S}}{\pi G} \frac{1000\,L}{0{,}5\,d} \quad . \quad . \quad (103)$$

formule qui, pour le fer forgé, dont le coefficient $G = 8000$, donne:

$$\vartheta^0 = 72{,}95 \frac{PRL}{d^4} = 14{,}32\,\mathfrak{S} \frac{L}{d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104).$$

et, pour la fonte, une valeur double, soit:

$$\vartheta^0 = 145{,}9 \frac{P R L}{d^4} = 28{,}65\, \mathfrak{S} \frac{L}{d} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \qquad (105).$$

Ces formules, dans lesquelles L représente la longueur de l'arbre, exprimée en mètres, et $\mathfrak{S}$ la tension sur le contour de cet arbre, permettent, comme on le voit, de calculer facilement l'angle ϑ, pour une valeur connue de $\mathfrak{S}$. On ne doit pas perdre de vue que $\mathfrak{S}$ et d dépendent l'un de l'autre et que, par suite, si on adopte pour $\mathfrak{S}$, par exemple, une certaine valeur, on devra, pour appliquer l'une des formules précédentes, commencer par déterminer la valeur correspondante de d.

Lorsque la transmission du moment de torsion s'opère en différents points, répartis sur la longueur de l'arbre, on peut encore faire usage des formules précédentes (V. § 13, P. 42 et 43), à la condition de prendre pour L les valeurs suivantes:

a. la longueur entière de l'arbre (en mètres), lorsque le travail reçu à l'une des extrémités est transmis entièrement par l'autre;

b. la demi-longueur de l'arbre, lorsque la transmission du travail se répartit uniformément sur toute la longueur, ce qui a ordinairement lieu pour les arbres d'une certaine importance;

c. le tiers de la longueur de l'arbre, lorsque le travail transmis décroit uniformément depuis l'extrémité où il est reçu par cet arbre jusqu'à l'autre extrémité (V. n° III, § 13); ce mode de répartition du travail se trouve souvent réalisé, d'une manière très-satisfaisante, dans les usines où il existe des appareils exigeant des efforts différents;

d. d'une manière générale la valeur de l'abscisse du point d'application de la résultante des diverses résistances à vaincre, lorsque ces résistances sont réparties sur l'arbre d'une manière quelconque (V. n° IV, § 13). Pour déterminer ce point, on multiplie chacun des moments résistants, ou le travail correspondant en chevaux, par la distance du point d'application de la résistance à l'origine de l'arbre, on ajoute ces différents produits et on divise la somme obtenue par le travail total à transmettre.

Nous allons prendre, comme exemples d'application, quelques-uns des arbres calculés dans le paragraphe précédent.

1er Exemple. Pour l'arbre d'hélice du navire d'Indret (1er Ex. § 105), $\mathfrak{S} = 5{,}77$, $d = 380$ et $L = 22$; l'angle de torsion de cet arbre est donc, au maximum, d'après la formule (104), $\frac{14{,}32 \cdot 5{,}77 \cdot 22}{380} = 4^{\circ}\,{}^{7}/_{8}$ *et il se réduit*

aux $^7/_{10}$ de cette valeur, soit $3^{\circ}\,^1/_3$, quand l'une des manivelles est à un point mort.

2e Exemple. L'arbre de l'exemple 3 n'a aucun travail à transmettre en des points intermédiaires; il repose sur 32 coussinets, dont la longueur peut être évaluée, pour chacun, à 100mm et sa torsion, dans ces coussinets, est relativement plus considérable que pour le corps lui-même. D'après la formule (104), l'angle de torsion a pour expression: $\vartheta = 14 \cdot 32 \left[\frac{32 \cdot 0{,}1 \cdot 5{,}2}{96} + \frac{(68 - 3 \cdot 2) 4 \cdot 6}{100}\right] = 14{,}32\ (0{,}173 + 2{,}981) = 45^{\circ}\,^1/_3$. *Une torsion de cette importance doit avoir pour résultat des variations assez fortes dans le travail transmis et elle ne serait pas admissible pour une fabrication comportant une très-grande précision.*

3e Exemple. En donnant à ce même arbre, conformément à la règle proposée par Fairbairn, un diamètre de 200mm et en remarquant que $\frac{N}{n} = 1{,}263$, *on aurait, d'après la première expression de* ϑ° *(104),* $\vartheta = \frac{72 \cdot 95 \cdot 716200 \cdot 1{,}263 \cdot 68}{200^4} = 3^{\circ}{,}87$.

4e Exemple. Un arbre en fer forgé, de 50m de longueur et d'un diamètre constant, doit transmettre un travail total de 70 chevaux à la vitesse de 100 tours par minute; on suppose de plus ce travail réparti à peu-près uniformément sur toute la longueur. En cherchant d'abord la valeur à donner au diamètre, on trouve (colonne 5, ligne 16) $d = 110^{mm}$. *Pour déterminer l'angle de torsion, on doit prendre, pour L, la demi-longueur de l'arbre seulement, et on a, par conséquent:* $\vartheta = \frac{72{,}95 \cdot 716200 \cdot 0{,}7 \cdot 25}{110^4} = 6^{\circ}45$ *ou* $6^{\circ}\,^1/_2$. *Directement, on obtient* $\vartheta = 6^{\circ}\,^1/_4$, *en posant* $L = 25$ *et* $\vartheta^{\circ} = \frac{L}{4}$, *cette dernière expression étant celle que nous avons admise pour l'établissement de la formule (100).*

Si, dans un cas déterminé, la torsion, calculée comme nous venons de l'indiquer, paraissait trop considérable, il suffirait d'augmenter le diamètre; comme ce diamètre entre dans la formule à la 4ème puissance, il suffit d'une augmentation assez faible pour produire une diminution importante de l'angle de torsion.

5e Exemple. Si on s'imposait la condition que l'arbre de l'exemple précédent n'éprouvât qu'une torsion moitié de celle que nous avons trouvée, il faudrait multiplier le diamètre obtenu par $\sqrt[4]{2}$ *ou par 1,189; on devrait donc prendre* $d = 110 \cdot 1{,}189 = 130^{mm}$.

§ 107.

Tourillons de rotation des arbres.

Les tourillons des arbres de transmission sont situés, soit aux extrémités, soit en des points intermédiaires; dans le premier

cas, il convient de les calcnler comme les tourillons frontanx, dans le second cas, qui est le plus ordinaire, la longuenr se détermine d'après les indications du § 82. Pour les transmissions intermédiaires des appareils d'usines et ponr un grand nombre d'autres arbres, il est d'ailleurs parfaitement inutile de chercher à déterminer la longueur l des tourillons par un calcul spécial. Lorsque la longuenr l du tourillon ne se trouve pas limitée par des circonstances spéciales (comme, par exemple, celles qu'on rencontre dans les locomotives), on peut se borner à prendre $l = \frac{3}{2} d$ (V. les chaises, ch. VIII); une longuenr plus grande a simplement pour résultat de diminuer l'usure. A ce dernier point de vue, il convient, d'ailleurs, d'établir une distinction entre les tourillons intermédiaires et les tourillons frontaux, car, dans ces derniers, une augmentation de longueur exige en même temps un accroissement de diamètre.

Pour les transmissions qui doivent se fixer au plancher, on emploie, de plus en plus, depuis quelques années, des chaises à coussinets articnlés, qu'on peut régler de manière à ce qu'ils embrassent exactement les tourillons. Dans cette disposition, on n'a pas à redouter les inconvénients du grippement, car on peut prendre $\frac{l}{d}$ égal à 2 ou 3 et aller même au delà. (V. le palier de Sellers ch. VIII.)

§ 108.

Sections composées. Arbres en bois.

Pour déterminer les dimensions des arbres à sections composées (sections annulaires, en croix, etc.), on commence par calculer le diamètre d d'un arbre plein cylindrique (formé de la même matière) et de ce diamètre d on dédnit tons les éléments cherchés, en opérant exactement de la même manière que pour les arbres chargés transversalement (§§ 97 à 100). Pour les arbres en bois (chêne), le diamètre D du cercle, inscrit dans la section polygonale, doit être pris au moins égal à 1,75 du diamètre de l'arbre en fonte équivalent. En admettant cette dernière valeur, qui est précisément la racine quatrième du rapport $\frac{10000}{1100}$ des coefficients d'élasticité de la fonte et du bois, l'angle de

torsion doit être le même pour les deux arbres. Du reste, comme nous l'avons déjà fait observer, l'usage des arbres en bois est très-limité.

§ 109.

Arbres chargés.

Sous la désignation d'arbres chargés, nous comprenons ici tous les arbres de transmission qui, en dehors des efforts de torsion, se trouvent soumis à des efforts de flexion. Ainsi que nous l'avons fait remarquer précédemment, presque tous les arbres rentrent, à la rigueur, dans cette catégorie; mais, pour un grand nombre d'entre eux, on peut, sans inconvénient, ne pas tenir compte de la tendance à la flexion. Dans les cas où les efforts de flexion ont une importance trop considérable, pour qu'il soit permis de les négliger, on se trouve conduit à des calculs de résistance composée. Pour arriver au résultat de la manière la plus simple et la plus commode, il convient de transformer les deux moments statiques de torsion et de flexion en un moment fléchissant idéal, et de calculer, dès lors, l'arbre donné, en le supposant soumis à l'action de ce moment idéal. Les formules de transformation ont été données précédemment, § 18:

Si on désigne par

M_t, le moment de torsion pour une section,

M_f, le moment de flexion pour la même section,

le moment fléchissant idéal, susceptible de les remplacer tous les deux, a pour expression:

$$(M_f)_i = {}^3/_8\, M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f^2 + M_t^2} \quad . \quad . \quad (106).$$

Pour les calculs numériques, on peut, au moyen du théorème de Poncelet, remplacer cette formule par les expressions approximatives suivantes:

lorsque M_f est $> M_t$,

$$(M_f)_i = 0{,}975\, M_f + 0{,}25\, M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

lorsque M_f est $< M_t$

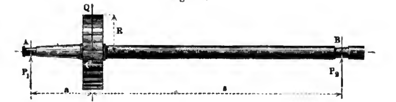
$$(M_f)_i = 0{,}625\, M_f + 0{,}6\, M_t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108).$$

Nous allons appliquer successivement à un exemple la méthode analytique et les procédés de la graphostatique.

1. *Méthode analytique.* L'arbre ABC, représenté fig. 290, porte, en C, une roue dentée R, à la circonférence de laquelle

agit tangentiellement la force Q; le corps de l'arbre CB se trouve alors sollicité à la torsion par le moment $M_t = QR$; cette force Q tend également à faire fléchir l'axe et donne lieu, dans les tourillons A et B, aux réactions $P_1 = Q\frac{s}{a+s}$ et $P_2 = Q\frac{a}{a+s}$.

Fig. 290.



La section la plus exposée est en C, puisqu'en ce point les deux moments fléchissants atteignent leur maximum $M_f = P_1 \cdot a = P_2 \cdot s$; c'est donc à cette section qu'on doit, avant tout, appliquer les calculs précédents.

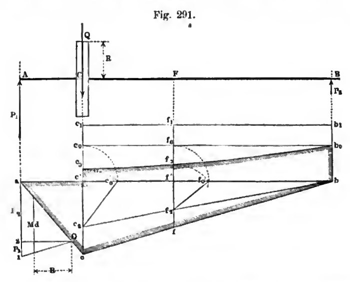
Exemple. En supposant $Q = 2500^k$, $R = 300^{mm}$, $a = 500^{mm}$, $s = 2000^{mm}$, *on trouve d'abord:* $P_1 = \frac{2000}{2500} \cdot Q = 0{,}8 \cdot Q = 2000^k$ *et* $P_2 = \frac{500}{2500} Q = 0{,}2 \cdot Q = 500^k$. *On a, de plus:* $M_t = 2500 \cdot 300 = 750000$ *et* $M_f = 2000 \cdot 500 = 1000000$. *Comme* M_f *est ici plus grand que* M_t, *on doit faire usage de la formule (107) et on obtient ainsi:* $(M_f)_i = 0{,}975 \cdot 1000000 + 0{,}25 \cdot 750000 = 1162500^{k \cdot mm}$, *expression qui permet de calculer directement le diamètre de la tête de l'arbre en* C. *Pour un arbre en fonte, à section circulaire en* C, *le diamètre* D *se déduit de la formule:* $(M_f)_i = \mathfrak{S}\frac{\pi}{32}D^3$, *qui, pour* $\mathfrak{S} = 3^k$, *donne:* $D = \sqrt[3]{\frac{1162500 \cdot 32}{3\pi}} = 158^{mm}$. *Le diamètre du tourillon en* A *s'obtient à l'aide de la table du § 80; on trouve ainsi* $d_1 = 70^{mm}$ *(colonne 3, ligne 11). Le tourillon intermédiaire en* B *est donné par la table du § 104; en prenant, pour le moment de torsion, une valeur double de celle que nous avons calculée, puisqu'il s'agit d'un arbre en fonte, on a approximativement* $d_2 = 110^{mm}$ *(colonne 2, ligne 16). En opérant ainsi, on ne tient compte que de la résistance, sans avoir égard à l'angle de torsion.*

II. *Procédé graphostatique.* Pour traiter la même question par la graphostatique, on commence par tracer, fig. 291, pour le moment fléchissant, le polygone funiculaire abc, dont la ligne de fermeture est horizontale, puis le polygone des forces $a10$; on obtient ainsi les réactions P_1 et P_2 et, en acc', la surface des moments pour le fuseau AC.

Cela fait, pour déterminer le moment M_t, il suffit de mener, dans le polygone des forces, à une distance R du pôle O, une

ordonnée verticale, qui est précisément égale à M_t. Si nous portons cette ordonnée en $c'c_1$ et bb_1 et que, sur ces lignes, nous

Fig. 291.



prenions $c'c_0 = bb_0 = {}^5/_8\, c'c_1$, $c'c_0b_0b$ représentera le rectangle de torsion pour la longueur CB de l'arbre. Il nous reste maintenant à effectuer la composition des moments de flexion et de torsion, d'après la formule (106). A cet effet, prenons $cc_2 = {}^3/_8\, cc'$ et menons la droite bc_2; pour un point quelconque du polygone, f, par exemple, on aura $ff_2 = {}^3/_8\, ff'$. Si on rabat $c'c_0$ sur ab, en $c'c'_0$, dans le triangle rectangle $c_2c'c'_0$, l'hypothénuse $c_2c'_0 = \sqrt{({}^5/_8\, cc')^2 + ({}^5/_8\, c'c_1)^2}$ et, par suite, la somme $cc_2 + c_2c'_0 = cc_2 + c_2c_3$ représente le moment cherché $(M_f)_i$ pour la section C; de même $ff_2 + f_2f'_0 = ff_2 + f_2f_3$ donne le moment $(M_f)_i$ pour le point F. La ligne $c_3f_3b_0$ est une courbe (hyperbole) qui, dans le cas actuel, peut être remplacée, avec une approximation suffisante, par la ligne droite c_3b_0. Le polygone $acbb_0c_3c'$, que nous venons d'obtenir, permet de déterminer les dimensions des arbres chargés, en opérant comme nous l'avons fait précédemment (V. § 90 et suivants).

Nous donnerons plus loin d'autres exemples de la composition des moments pour les axes de leviers et de manivelles (ch. XIII et XIV).

VII. Assemblages ou accouplements d'arbres.

§ 110.

Division des accouplements.

On désigne, sous le nom d'*accouplements*, les dispositifs qu'on emploie pour relier entre elles les différentes parties des arbres de transmission et assurer ainsi la communication du mouvement de rotation de l'une à l'autre.

On distingue plusieurs espèces d'accouplements:

1°, les accouplements fixes,

2°, les accouplements mobiles,

3°, les accouplements à débrayages.

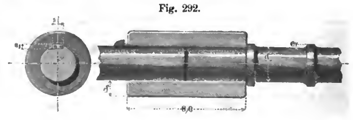
Les accouplements fixes constituent le mode de liaison ordinaire des arbres qui doivent conserver une position invariable, les uns par rapport aux autres, en tournant autour du même axe géométrique. Les accouplements mobiles sont destinés à permettre, entre certaines limites, une variation dans la position relative des arbres qu'ils réunissent les uns aux autres. Enfin le dernier mode d'accouplement permet de produire à volonté, pendant la marche, la réunion ou la séparation des deux arbres entre lesquels il est établi. Nous allons indiquer successivement les principales formes de ces trois genres d'assemblages.

§ 111.

I. Accouplements fixes.

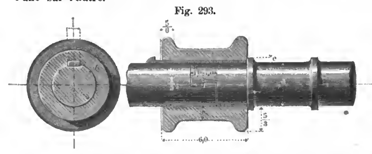
Les accouplements fixes sont formés d'une pièce unique ou de deux pièces. La première espèce comprend les accouplements par manchons, représentés par les fig. 292 et 293.

Fig. 292.



Le manchon entoure entièrement les extrémités des arbres à relier, qui, dans la seconde disposition, sont, de plus, entaillées l'une sur l'autre.

Fig. 293.



Dans ces accouplements, comme dans tous ceux que nous donnerons ci-après, la dimension prise pour unité est l'épaisseur δ du manchon, qu'on détermine par la relation:

$$\delta = 5 + \frac{d}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

où d désigne le diamètre de l'arbre, supposé en fer forgé. Pour un arbre en fonte, on commence par chercher le diamètre de l'arbre en fer équivalent et, en le substituant dans la formule précédente, on obtient l'épaisseur δ, qui permet de déterminer les autres éléments de l'accouplement, au moyen des rapports indiqués sur les figures. Les dimensions de la clavette sont données par la formule (81), relative aux clavettes de torsion (§ 88). Depuis quelque temps, on prend, de plus en plus, la précaution de recouvrir le nez de la clavette, au moyen d'une calotte spéciale, fixée sur l'arbre; on évite ainsi complètement les dangers qu'entrainait, pour les ouvriers, la saillie de la clavette, lorsqu'elle venait accrocher leurs vêtements.

A l'intérieur du manchon, les deux extrémités de l'arbre se trouvent aussi quelquefois reliées par un assemblage en forme de queue d'aronde, fig. 294, mais, le plus souvent, on se borne à un simple recouvrement, fig. 295. Les dispositifs des fig. 293

Fig. 294. Fig. 295.

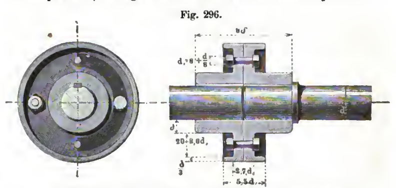


et 294 présentent, par rapport au dernier, l'avantage d'assurer la liaison des arbres dans le sens de la longueur, en même temps

qu'ils permettent de conserver, sur les extrémités, les traces des pointes du tour.

La fig. 296 représente un assemblage formé de deux pièces; cet accouplement a l'avantage de ne présenter aucune partie saillante; la clavette se trouve recouverte entièrement par les moyeux des plateaux et les têtes, ainsi que les écrous des boulons d'assemblage, se trouvent masquées par les nervures circulaires des plateaux, ménagées normalement aux surfaces de jonction.

Fig. 296.



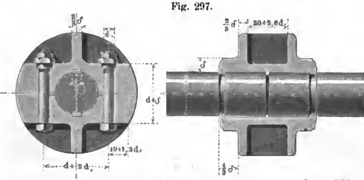
Le nombre i des boulons est donné par l'expression $i = 2 + \frac{d}{30}$. En prenant, pour le diamètre extérieur des filets, $d_1 = 8 + \frac{d}{8}$, on obtient des boulons qui possèdent une résistance suffisante, lors même que d aurait été calculé par la formule (98), c'est-à-dire sans tenir compte de l'angle de torsion. Il en résulte qu'ils doivent présenter une sécurité relativement considérable, lorsque d se trouve déterminé par la formule (100), c'est-à-dire en ayant égard à la torsion; dans les deux cas, d'ailleurs, le diamètre d se rapporte à des arbres en fer forgé.

L'accouplement par plateaux, qui est depuis longtemps employé, pour les grandes transmissions d'usines, en Angleterre et en Allemagne, tend de plus en plus à se répandre en France.

La fig. 297 représente un mode d'accouplement, composé d'une enveloppe, divisée en deux parties, dont la surface de jonction est un plan, passant par l'axe commun des deux arbres à relier. Cet accouplement, comme le précédent, a l'avantage de ne présenter aucune partie saillante, les deux clavettes longitudinales se trouvant entièrement recouvertes par les parties

en contact avec les arbres, tandis que les têtes et les écrous des boulons d'assemblage se trouvent masqués par les nervures

Fig. 297.



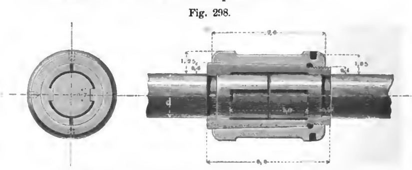
circulaires qui existent de chaque côté. Lorsque ce dispositif est destiné à assurer également la liaison des arbres, dans le sens de la longueur, il convient de pratiquer, sur chacun de ces arbres, une légère rainure, dans laquelle vient s'engager un rebord, ménagé à l'extrémité correspondante de l'enveloppe. Au point de vue de la résistance, l'établissement de la rainure ne présente pas d'inconvénient sérieux, lorsque le diamètre d de l'arbre a été déterminé, en ayant égard à la torsion, c'est-à-dire par la formule (100); on peut, d'ailleurs, lui donner une profondeur assez faible et on ne s'écarte pas beaucoup, en général, de la valeur $1^{mm},5 + \frac{d}{100}$. Toutes les fois qu'il n'y a aucun intérêt à assurer la liaison des arbres, dans le sens de la longueur, on supprime les rainures. Lorsqu'on juge convenable de munir les boulons d'assemblage de contre-écrous, il convient de noyer, sur la moitié de leur hauteur, les écrous eux-mêmes, comme l'indique la figure. Quant au nombre i des boulons, il est, suivant les cas, de 2, 4 ou 6 et rarement plus. Le diamètre extérieur des filets se détermine par les formules suivantes:

pour $i = 2$		4	6 et plus.
$d_, =$	$10 + \frac{d}{6}$	$9 + \frac{d}{7}$	$8 + \frac{d}{8}$.

Exemple. Pour une transmission, dont le diamètre est de 60^{mm}, le diamètre des boulons d'assemblage, si on n'en emploie que deux, doit être $d_1 = 10 + \frac{60}{6} = 20^{mm}$; pour quatre, il serait $d_1 = 9 + \frac{60}{7}$, ou 18^{mm} et, pour six, $d_1 = 8 + \frac{60}{8}$ ou 16^{mm}.

La fig. 298 représente un autre genre d'accouplement, à enveloppe coniqne, imaginé par l'auteur. Dans cette dispositiou, la liaison des deux pièces de l'enveloppe, dans le sens transversal, est assurée par une elavette annnlaire, qui les recouvre, et les saillies extérieures sont complètement évitées.

Fig. 298.



Les deux moitiés de l'enveloppe sont munies, à l'intérieur, de parties saillantes, venues de fonte avec elles et dressées avec soin, qui s'ajustent exactement dans des rainnres correspondantes, ménagées aux extrémités des arbres. D'après les nombres proportionnels, inserits sur la figure et qni, comme précédemment, se rapportent au module $\delta = 5 + \frac{d}{3}$, l'inclinaison du côue est, ponr chaque côté, de $\frac{0,2}{8}$ on $1/40$, c'est-à-dire celle qu'on admet pour les clavettes simples qui doivent rester à poste fixe. Dans les arbres exposés à des chocs, pour prévenir tont déplacement, la partie la plns mince de l'enveloppe est munie d'un filet qui s'engage dans une partie également filetée du manchou de recouvrement. Le bourrelet de ce manchon-clavette porte quatre trous, dans lesqnels on introduit une clef, qui permet de le serrer complètement à fond.

Pour les arbres où on n'a pas à redouter l'effet des chocs, le filet peut être supprimé et remplacé par deux vis de pression, en acier, à tête noyée dans le manchon. Enfin, lorsque les différentes parties assemblées n'ont aucune tendance à se déplacer longitudinalement, les unes par rapport aux autres, on peut également supprimer les rainures. Dans les accouplements d'une certaine importance, correspondant à des valenrs de d supérieures à 60^{mm}, on peut, pour diminuer le travail du tournage et de

l'alésage, ménager des portées, à l'intérieur du manchon et à l'extérieur des deux parties de l'enveloppe.

Nous avons supposé jusqu'ici que les arbres à relier étaient en fer forgé et les nombres proportionnels, inscrits sur les figures, se rapportent à cette hypothèse. Pour les arbres en fonte, on peut se borner à prendre, pour les dimensions des différents éléments, une fois et demie celles qui correspondent aux arbres en fer équivalents. Mais, si on tient à procéder avec plus de rigueur et à économiser le plus possible la matière, on commence par déterminer, dans chaque cas particulier, le diamètre idéal de l'arbre par la formule (99) et on prend la valeur de d, ainsi obtenue, comme point de départ du calcul des dimensions.

II. Accouplements mobiles.

§ 112.

Des différents modes de mobilité des accouplements.

Dans la transmission d'un mouvement de rotation, un accouplement peut permettre trois genres de déplacements différents:

a) un déplacement longitudinal ou suivant la direction des axes,
b) un déplacement transversal ou perpendiculaire au premier,
c) un déplacement correspondant à une variation de l'angle des axes.

Il est bien évident, d'ailleurs, qu'on peut avoir à réaliser, en même temps, deux de ces mouvements ou même tous les trois.

Dans le premier cas, les axes géométriques des arbres coïncident, dans le second, ils sont parallèles et, dans le troisième, ils se coupent; dans le mouvement résultant de la composition de b) et de c), ces axes se croisent, sans être dans un même plan. Ces différents genres de déplacements se trouvent tous réalisés dans la pratique.

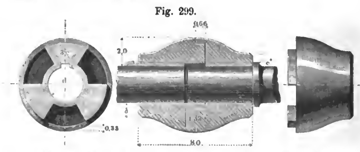
§ 113.

Accouplements mobiles longitudinalement et transversalement.

Pour permettre un déplacement, dans le sens de la longueur des axes, il suffit de transmettre le mouvement de rotation d'un arbre à l'autre, au moyen d'organes de forme prisma-

tiqne. Comme exemple de la disposition qn'on pent employer, dans ce cas, nons citerons le manchon à griffes de Sharp, fig. 299. Ce manchon, qui se compose de deux parties, ne permet que de faibles déplacements, pendant lesquels les secteurs en prise portent plns on moins les uns sur les autres. Comme il permet également une légère variation de l'angle des axes, son emploi présente certains avantages pour les transmissions dans lesquelles on ne peut pas compter complètement sur la position des snpports. Tout récemment, dans différentes installations, on a adopté, pour cet acconplement, une disposition nouvelle, qni rend sa construction très-simple; on a complètement supprimé le recouvrement des griffes, de telle sorte qn'on pent utiliser l'nne des moitiés pour fondre la seconde.

Fig. 299.



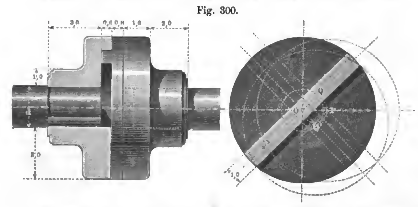
Dans les navires à hélice, où on veut se ménager la possibilité de soulever cet organe, on munit l'arbre de couche d'un acconplement, disposé de manière à permettre un déplacement longitudinal snffisant ponr qu'on puisse retirer, du moyen de l'hélice, l'extrémité de l'arbre qui, dans cette pénétration, présente une forme pyramidale (1).

Comme exemple d'acconplement mobile dans le sens transversal, nous citerons le joint d'Oldham (fig. 300), qui se compose de trois plateaux, dont deux sont calés snr les extrémités des arbres; le troisième porte, sur ses faces, denx languettes prismatiques, inclinées, l'une snr l'antre, de 90°, et dont chacune s'engage dans une rainure, ménagée snr le plateau qui est sitné du même côté. Lorsqne les axes des denx arbres coïncident, de telle sorte qne lenrs projections normales se confondent en un même point,

(1) Pour les dessins de ce dispositif, spécial aux navires à hélice, nous renverrons au Vignole des mécaniciens d'Armengaud et aux appareils à vapeur de navigation de Ledieu.

O, par exemple, les languettes et les rainures agissent, sans glisser, comme de véritables griffes. Mais si l'on imagine que l'un des axes, tout en restant parallèle à lui-même, s'éloigne de O, pour venir se projeter, par exemple, en P, le centre du disque à languettes arrive en Q et, pendant le mouvement de rotation des arbres, se déplace sur le cercle $OQPQ'$, dont le diamètre OP est précisement égal à la distance des axes; pour chaque tour des arbres, il parcourt ce cercle deux fois. Les

Fig. 300.



autres points de ce disque décrivent des cardioïdes. La transmission du mouvement, d'un arbre à l'autre (1), s'effectue d'une manière uniforme. Le module adopté pour les nombres proportionnels, inscrits sur la figure, est ici, comme précédemment, la quantité $\delta = 5 + \frac{d}{3}$.

Les autres modes d'accouplement, qui, comme le précédent, permettent une certaine mobilité dans le sens transversal, sont très-peu employés et nous ne nous y arrêterons pas.

§ 114.

Accouplements articulés.

Le plus répandu de tous les organes mobiles, destinés à relier des arbres, est l'accouplement à articulations en croix,

(1) Le joint d'Oldham a été aussi employé en Angleterre, dans un navire à vapeur, comme moyen de liaison entre les arbres des manivelles de deux machines couplées (V. Engineer, 1866. P. 171).

qu'on désigne sous les différents noms de joint universel, joint de Hooke, ou mieux encore de joint à la Cardan. (1) Ce mécanisme, qui permet une variation de l'angle des axes, entre certaines limites, se compose de trois pièces, dont deux sont fixées sur les extrémités des arbres à relier; la troisième, dans la disposition la plus généralement adoptée, est un croisillon, dont chaque bras se termine par un tourillon. Chaque couple de tourillons s'engage dans l'une des deux premières pièces. La transmission du mouvement ne s'effectue pas d'une manière uniforme; en désignant par α l'angle des axes des deux arbres, les angles de rotation ω et ω_1 de l'arbre moteur et de l'arbre mené sont reliés par l'équation:

$$\frac{tg\,\omega_1}{tg\,\omega} = \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (110)$$

le mouvement est donc périodiquement varié et la longueur de la période est de 180°. On a déduit de la formule les valeurs suivantes pour ω_1.

ω	$\alpha = 10°$	20°	30°	40°
30°	29°38	28°29	26°34	23°51
45°	44°34	43°12	40°54	37°27
60°	59°34	58°26	56°22	53°04
90°	90°	90°	90°	90°
120°	120°26	121°34	123°38	126°56
135°	135°26	136°48	139°06	142°33
150°	150°22	151°31	153°26	156°01
180°	180°	180°	180°	180°

Ce tableau montre que, pour de faibles valeurs de α, les différences entre ω et ω_1 sont peu importantes. Entre les vitesses angulaires w et w_1 existe la relation:

$$\frac{w_1}{w} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\omega\,\sin^2\alpha} \quad . \; . \; . \; . \quad (111).$$

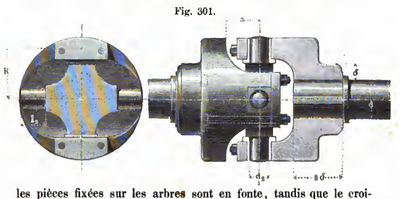
Le maximum du rapport correspond à $\sin\omega = 1$ et a pour valeur $\frac{1}{\cos\alpha}$, tandis que le minimum est $\cos\alpha$, pour

(1) L'inventeur des articulations en croix est l'italien Cardan (1501 à 1576); l'anglais Hooke (1635 à 1703) a simplement eu l'idée d'appliquer ce mécanisme à l'accouplement des arbres.

$\sin \omega = o$ (1). Lorsque les deux arbres ont des forces vives peu considérables et que l'angle α est petit, les variations de vitesse sont assez faibles et peuvent être négligées; mais il n'en est plus de même, lorsqu'il s'agit d'arbres très-inclinés l'un sur l'autre, présentant des masses relativement considérables, animées d'une grande vitesse.

Les dispositions, employées pour les joints à articulations en croix, sont extrêmement variées; nous allons indiquer successivement les plus importantes. Dans le dispositif de la fig. 301,

Fig. 301.



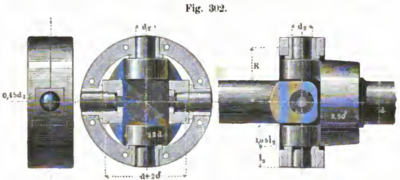
les pièces fixées sur les arbres sont en fonte, tandis que le croisillon intermédiaire est en fer forgé. Comme le rapport de la longueur R des bras (distance du centre du croisillon au milieu d'un tourillon) au diamètre d des arbres est très-variable, nous n'avons pas pu reporter, sur la figure, les dimensions proportionnelles pour les différentes parties. Le diamètre d_2 d'un tourillon peut se calculer, au moyen d'une des formules indiquées précédemment, en remarquant que, pour une valeur (PR) du moment de rotation des arbres, la pression P_2 sur le tourillon est représentée, avec une exactitude suffisante, par $\frac{1}{2}\frac{(PR)}{R}$. La distance, désignée par a, doit recevoir une valeur d'autant plus grande que l'angle d'inclinaison α est lui-même plus considérable. Dans la disposition représentée sur la figure, l'angle α est supposé très-petit. Les axes des rainures, destinées à recevoir les coussinets des tourillons, doivent être établis, comme l'indique

(1) Les valeurs de ω sont comptées de telle sorte que $\omega = o$, lorsque l'axe des tourillons transversaux de l'arbre mené se trouve dans le plan d'inclinaison des axes des deux arbres.

la figure, dans un plan perpendiculaire à celui des axes des arbres; lorsque cette condition n'est pas observée, on est exposé à ce que l'usure se produise d'une manière très-irrégulière pour les différents tourillons. Sur la figure, les coussinets sont supposés formés d'une seule pièce; dans ce cas, après avoir vérifié que la surface extérieure de chacun d'eux est parfaitement ajustée sur la rainure correspondante, on les rapporte sur le croisillon, qu'on place dans sa position définitive et on les recouvre ensuite avec les couvercles à boulons, destinés à les maintenir.

Le joint à articulations croisées joue un rôle important dans un grand nombre de navires à hélice, où on l'utilise pour donner à l'arbre de couche une certaine flexibilité, qui lui permette de se prêter suffisamment aux déformations qu'éprouve la carcasse du navire. Avec des machines d'une grande puissance, l'arbre de couche est ordinairement muni de deux joints articulés et souvent même d'un plus grand nombre. La fig. 302 représente un joint de ce genre, dont les trois parties sont en fer forgé;

Fig. 302.

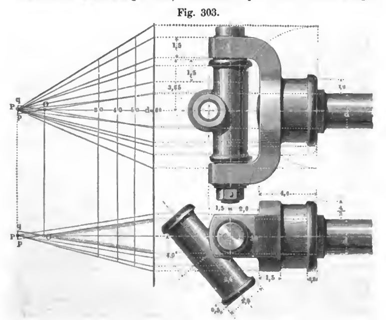


l'une de ces parties fait corps, en réalité, avec l'arbre. La pièce intermédiaire, qui se compose de deux parties annulaires semblables, renferme les coussinets des tourillons (contrairement à ce qui existe dans la disposition précédente), tandis que les deux autres pièces portent les tourillons, qui sont en fer forgé et assemblés d'une manière spéciale. Comme, dans toutes les circonstances, l'angle α reste nécessairement très-petit et que, par suite, on doit supposer une usure très-faible, les coussinets ne sont pas fendus. Pour la même raison, les fourchettes des tourillons n'ont que très-peu de jeu, l'une par rapport à l'autre. La longueur l_2 du tourillon ne s'écarte pas beaucoup du diamètre

et varie de 1 à 1,25 d_2 ; toutes ces dispositions ont principalement pour but de réduire les dimensions de l'accouplement et de rendre, par suite, R aussi petit que possible.

La fig. 303 représente une troisième disposition d'accouplement à croisillon articulé. Dans ce cas, les tourillons transversaux sont de véritables boulons, qui peuvent tourner, à la fois, dans la pièce intermédiaire et dans les pièces fixées sur les extrémités des arbres. Pour rendre la construction plus simple, les axes de ces boulons ne sont pas dans le même plan; ils se trouvent écartés d'une quantité légèrement supérieure à leur diamètre. Par suite de cet écartement, la transmission du mouvement n'est plus identique pour les deux périodes d'un tour entier des arbres. Mais, pour un faible écartement des boulons et pour les installations qui n'exigent pas une très-grande précision, on peut, sans inconvénient, ne pas tenir compte de cette différence. La disposition, représentée sur la figure, est fréquemment employée dans les machines agricoles, notamment pour relier les manèges

Fig. 303.



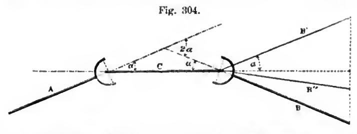
à chevaux aux appareils qu'ils doivent faire mouvoir. Dans le tracé de l'échelle de proportion, que nous donnons ici (v. § 59),

le module adopté est $\delta = 5 + \frac{d}{3}$, d représentant, comme précédemment, le diamètre de l'arbre. Le pôle P, qui sert à la détermination des différentes dimensions, doit, par suite, correspondre au point pour lequel on a $5 + \frac{d}{3} = 0$, c'est-à-dire à $d = -15^{mm}$. Comme l'échelle de la figure est de $^1/_5$, il en résulte qu'on doit faire $pq = -d = 3^{mm}$.

Les variations de vitesse, qu'entraîne dans la transmission de mouvement l'emploi du joint articulé, et qui sont exprimées par la formule (110), présentent, dans un grand nombre de cas, des inconvénients sérieux; il est évident qu'elles ne sont pas admissibles toutes les fois qu'on a besoin d'une exactitude géométrique (comme pour les mouvements des grandes horloges), ou qu'on a à tenir compte des forces vives de masses animées d'un mouvement rapide (comme dans les machines à battre, etc.). Dans tous les cas de ce genre, il est toujours possible d'éviter le défaut que nous venons de signaler, en installant un double joint articulé, c'est-à-dire en disposant convenablement deux accouplements simples de même forme.

A cet effet, on réunit l'arbre moteur A (fig. 304) à l'arbre mené B par l'intermédiaire d'un troisième arbre C, dont l'inclinaison est la même sur chacun des deux premiers; en disposant

Fig. 304.

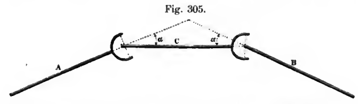


de la même manière les deux joints articulés d'assemblage, le mouvement se transmet uniformément de A à B. Avec cette disposition, l'arbre mené peut occuper des positions très-différentes par rapport à A, la position B, par exemple, avec un angle d'inclinaison sur A égal à 2α, ou la position B', parallèle à A, ou encore (ce qui généralement ne paraît pas être connu) la position B'', située sur la surface d'un cône de révolution, décrit autour de l'axe intermédiaire C, et dont le demi-angle

au sommet est α. Les joints articulés se trouvent convenablement disposés, lorsque les tourillons transversaux, appartenant aux axes A et B, viennent se placer au même instant dans les deux plans que forme l'axe C avec les axes A et B. Pour les positions B et B' de l'axe de l'arbre mené, ces deux plans coïncident, mais il n'en est pas de même pour les autres positions que cet axe peut occuper sur le cône. Dans ce dernier cas, les deux axes A et B sont croisés l'un par rapport à l'autre (v. ch. X).

Si les croisillons articulés ne sont pas disposés de la même manière pour A et B, si, par exemple, on suppose que l'un d'eux ait tourné par rapport à l'autre de 90°, comme l'indique la fig. 305, les variations de vitesse, non seulement ne sont pas

Fig. 305.



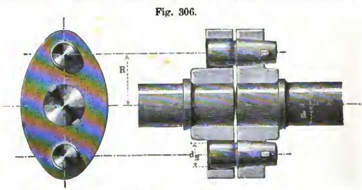
évitées, mais encore peuvent se trouver, dans certaines conditions, notablement augmentées; dans le cas dont il s'agit, on a, en effet: $tg\,\omega_1 = tg\,\omega\,\cos^2\alpha$, ω et ω_1 correspondant respectivement à A et à B. Si on suppose $\alpha = 30°$, pour $\omega = 45°$, on a: $tg\,\omega_1 = (\frac{1}{2}\sqrt{3})^2 = 0{,}75$, c'est-à-dire $\omega_1 = 36°{,}54$, au lieu de $40°{,}54$, qu'indique la table que nous avons donnée précédemment, pour le cas d'un accouplement simple. Il importe de ne pas perdre de vue cette cause importante de variation de vitesse.

Les accouplements ordinaires de laminoirs, sous une forme très-imparfaite, rentrent dans la classe des joints articulés; les croisillons à tourillons se trouvent remplacés par des bourrelets arrondis, qui servent de prisonniers; dans les installations plus soignées, comme celles de Schaltenbrand, par exemple, on retrouve l'emploi de tourillons en croix; les axes de ces tourillons ne se rencontrent pas et présentent un certain écartement, comme dans la disposition de la fig. 303; la pièce intermédiaire de cet accouplement a, par suite, une forme analogue à celle de la pièce à double douille représentée par cette même figure. En disposant l'arbre intermédiaire de manière à ce qu'il puisse se déplacer longitudinalement, les accouplements de ce genre, même grossièrement exécutés, assurent une transmission uniforme du mou-

vement, puisqu'ils rentrent, en définitive, dans la disposition ACB' de la fig. 304. Ici, comme précédemment, pour obtenir ce résultat, il importe ne pas donner aux accouplements la position que représente la fig. 305 et dont nous avons signalé les inconvénients.

Pour les hélices des vaisseaux à vapeur, où les variations des angles des diverses parties de l'arbre de couche sont peu considérables, on peut employer un mode d'accouplement très-simple, qui se trouve représenté par la fig. 306. Cet accouplement, qui exige forcément un palier à chacune des extrémités

Fig. 306.



des parties d'arbres qu'il est destiné à relier, permet une certaine mobilité, analogue à celle que donne le croisillon articulé et qui, dans un grand nombre de cas, peut être considérée comme suffisante. (1)

III. Manchons d'embrayage et de débrayage.

§ 115.

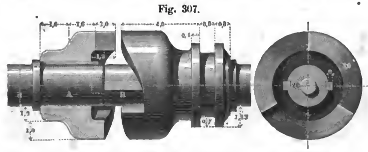
Manchons à dents.

Le manchon de débrayage le plus ancien et dont l'usage est encore très-répandu est le manchon à dents, que représente la fig. 307.

(1) Une disposition plus compliquée, mais qui, par suite de ses propriétés, présente un grand intérêt au point de vue de la transmission du mouvement est celle qui a été proposée, pour les arbres d'hélices des navires à vapeur, par Otto Dingler (v. Dingler, P. J. 1866, P. 197); cet accouplement, qui est à articulations, permet, en même temps, des déplacements longitudinaux et transversaux.

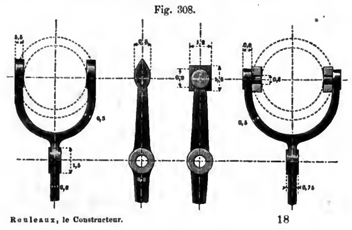
Les deux extrémités *A* et *B* des arbres sont réunies par un petit tourillon, qui est simplement destiné à assurer la coïn-

Fig. 307.



cidence de leurs axes; l'arbre *B* porte deux languettes fixes, suivant lesquelles peut glisser une pièce, munie de rainures correspondantes; le mouvement de cette pièce, dans un sens ou dans l'autre, permet, comme il est facile de le comprendre, d'établir ou de supprimer, à volonté, la liaison des deux arbres. Le module adopté pour les dimensions des deux pièces du manchon est ici encore: $\delta = 5 + \frac{d}{3}$; le nombre des dents se détermine, d'une manière satisfaisante, par la formule $z = 1 + \frac{d}{40}$. Le mouvement, dans les deux sens, est produit par un levier, dont les extrémités s'engagent dans une rainure circulaire, pratiquée sur le moyeu de la partie du manchon qui correspond à l'arbre *B*. La fig. 308 indique deux dispositions qu'on peut

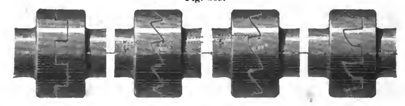
Fig. 308.



adopter pour les leviers de ce genre. Quant au module des dimensions, il est le même que précédemment.

Les dents des manchons peuvent recevoir différentes formes. La fig. 309 donne les tracés de celles qui sont le plus fréquem-

Fig. 309.



ment employées. Avec la première disposition, le mouvement de rotation peut se transmettre également bien dans les deux sens, mais l'embrayage ne peut guère s'effectuer, pendant la marche, que dans le cas d'un mouvement très-lent. La seconde forme, au contraire, qui permet d'embrayer pendant la marche, même avec un arbre à rotation rapide, ne peut transmettre le mouvement que dans un sens; les surfaces des dents, sur lesquelles s'exerce la pression, sont légèrement inclinées sur la normale à la direction du mouvement; cette inclinaison, qui a pour but de rendre le débrayage plus facile, est d'ailleurs trop faible pour mettre en question la sécurité de l'embrayage, lorsqu'il existe. Dans la troisième disposition, les dents sont renforcées à la pointe, afin d'éviter les chances de rupture d'une ou plusieurs de ces dents, sous l'action des chocs qui peuvent se produire, lorsqu'on embraye pendant la marche; cette forme de dents est celle qui a été indiquée précédemment pour le manchon de la fig. 307. La quatrième forme de dents présente, comme les deux précédentes, l'avantage de rendre l'embrayage facile, en même temps qu'elle permet, comme la première, de transmettre le mouvement dans les deux sens. Les machines de filatures fournissent de nombreux exemples d'accouplements par manchons à dents; comme ces manchons ont, en général, une très-grande vitesse de rotation et que leurs dents sont très-fines, il en résulte qu'ils doivent être établis avec une très-grande précision.

Dans les vaisseaux à vapeur où la transmission n'est pas disposée pour permettre le soulèvement de l'hélice, il est indispensable que cet organe puisse tourner à vide, lorsqu'on veut

marcher simplement à la voile; on arrive à ce résultat, en le reliant à l'arbre de couche par un manchon de débrayage. On emploie, dans ce cas, des manchons à dents de grandes dimensions, ou des manchons à tourillons prisonniers, dont le nombre varie de 4 à 6.

§ 116.

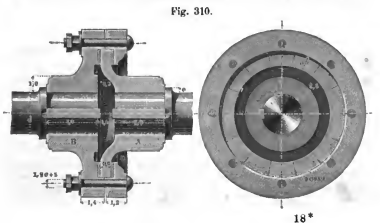
Manchons à friction.

Les manchons, dont les deux parties ne sont maintenues solidaires l'une de l'autre que par le frottement développé entre leurs surfaces de contact, conviennent spécialement pour le débrayage. Avec les dispositifs de ce genre, en effet, le mouvement cesse de se transmettre, lorsque la force, qui produit le frottement, vient simplement à diminuer d'une certaine quantité, tandis que l'embrayage se produit sans chocs, la partie conduite n'arrivant que par accélérations successives à sa vitesse définitive.

En donnant aux manchons à friction des diamètres suffisamment considérables, on peut arriver à leur faire transmettre des moments de rotation d'une grandeur quelconque.

La fig. 310 représente un manchon à friction, qui est employé comme manchon de sûreté; l'anneau de la partie A s'engage dans une rainure, doublée de bois, de la partie B et le serrage est déterminé de manière à ce que le frottement, produit entre les surfaces de contact, corresponde à une valeur donnée de l'effort à transmettre; il en résulte que le débrayage se produit de lui-même, lorsque cette valeur vient à être dépassée.

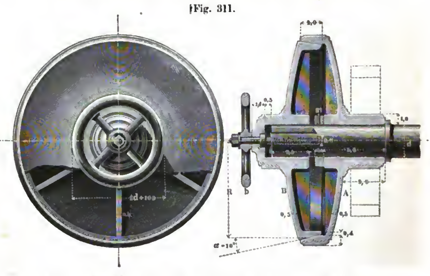
Fig. 310.



Ramsbotton a employé ce genre de manchons pour des laminoirs (1). Le module des dimensions indiquées sur la figure est $\delta = 5 + \frac{d}{3}$.

Le manchon à cônes présente, dans les applications, une très-grande variété de formes. Dans le dispositif, que donne la fig. 311, la partie A du manchon, destinée à transmettre le mouvement, est supposée folle sur l'arbre qui la porte et elle peut recevoir un mouvement de rotation, par l'intermédiaire d'une roue dentée, calée sur son moyeu et représentée en pointillé sur la figure; la seconde partie B du manchon peut glisser sur

Fig. 311.



l'arbre, mais sans tourner sur lui; en supposant la couronne conique, qui la termine, suffisamment pressée contre la couronne intérieure de A, le mouvement d'entrainement se produit. La pression de ces deux surfaces s'obtient à l'aide d'une vis et de la manivelle à volant b. Dans certaines dispositions, le sens de rotation de B coïncide avec celui de la roue b, quand cette dernière agit pour produire la pression, ce qu'il est toujours

(1) V. Engineer, Janvier 1866, P. 44, et le Génie industriel, 32e vol. P. 101; la forme la plus ancienne de ce genre de manchon est indiquée dans les œuvres de Salzenberg (P. 173), où on trouve également la description d'autres dispositions.

facile d'obtenir, en choisissant, suivant les cas, une vis à droite ou une vis à gauche; dans ce cas, il suffit de fixer la roue b, pour maintenir l'arbre au repos, et de la mettre en marche, dans le sens du mouvement, pour produire l'embrayage. En désignant par R le rayon moyen du cône, par α l'angle d'inclinaison, la pression Q à exercer suivant l'axe, pour transmettre un effort P, supposé agir à la distance R, est donnée par l'expression:

$$Q = \frac{P \sin \alpha}{f} = \frac{(P\,R)}{R} \frac{\sin \alpha}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

dans laquelle f représente le coefficient du frottement, qui s'exerce entre les surfaces des cônes, et (PR) le moment statique qui doit être transmis par l'arbre. Pour que le débrayage puisse s'effectuer facilement, il importe de ne pas prendre α inférieur à 10°; f, pour le frottement de fer sur fer, peut être évalué à 0,15. Afin de diminuer P et, par suite, aussi Q, on donne à R une assez grande valeur, comprise, par exemple, entre $3d$ et $6d$.

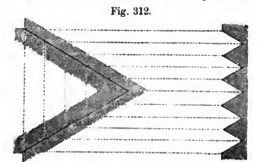
L'effort à exercer se trouve, d'ailleurs, notablement réduit par l'emploi de la vis et du volant; en désignant par s le pas de cette vis et par b le rayon du volant, le coefficient de réduction, en tenant compte du frottement de la vis, est représenté par $2 \cdot \frac{s}{2\pi b}$ ou $\frac{s}{\pi b}$; l'effort à exercer tangentiellement au volant est, par conséquent, $q = \frac{s}{\pi b} Q$; cette expression montre qu'il peut être réduit à une valeur très-faible.

Exemple. Un arbre de transmission, en fer forgé, dont le diamètre $d = 50^{mm}$ et dont la vitesse de rotation est de 50 tours par minute, transmet, d'après la table du § 104 (colonne 5, ligne 5), un travail de $0{,}030 \cdot 50 = 1^{ch},5$, ou un moment statique (PR) égal à $21418^{k \cdot mm}$. En supposant cet arbre muni d'un manchon à cônes, dont le rayon moyen soit égal à $5d$ ou 250^{mm}, l'effort Q, nécessaire pour produire l'embrayage, sera, d'après la formule (112), $Q = \frac{21418}{250} \frac{\sin \alpha}{f}$, ce qui, pour $\alpha = 10°$, $f = 0{,}15$, donne $Q = \frac{85{,}9 \cdot 0{,}1736}{0{,}15}$ ou 100^{k}. D'après les nombres proportionnels inscrits sur la figure, le rayon du volant doit être pris égal à $\frac{100+100}{2} = 100^{mm}$. En donnant à la vis un pas de 6^{mm}, l'effort, qu'on doit exercer à la circonférence de ce volant, pour amener l'embrayage, est $q = \frac{6 \cdot 100}{\pi \cdot 100} = 1^{k},9$, soit 2^{k}.

Toutes les fois que le travail à transmettre n'est pas trop considérable, on emploie avec avantage le manchon à cônes,

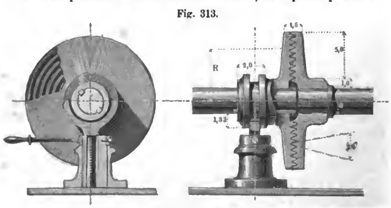
tel que nous venons de le décrire ou avec une disposition analogue. (1) On peut munir les deux parties du manchon d'un tronc de cône creux et d'un tronc de cône plein ou encore d'une série de troncs de cônes, d'une faible portée, comme l'indique la fig. 312. Dans ce dernier cas, les deux parties du manchon

Fig. 312.



se transforment, en réalité, en deux plateaux à cannelures annulaires, dont la réunion constitue le manchon à disques cannelés, représenté par la fig. 313. Ce manchon, comme les manchons à dents, a l'inconvénient d'être exposé aux chocs. Le calcul de l'effort à exercer, pour produire l'embrayage, se fait d'ailleurs comme nous l'avons indiqué pour le manchon précédent, à la condition toutefois de prendre pour R, non pas le rayon extérieur, mais simplement celui de la circonférence, à laquelle peut être

Fig. 313.



(1) On trouve de nombreux exemples d'applications du manchon à cônes dans les machines employées pour le creusement de l'isthme de Suez (v. Armengaud, Publ. ind. vol. 17. Pl. 9).

supposée appliquée la résultante des actions des surfaces frottantes; ce cercle se tronve à nne distance du bord extérieur des disques, qn'on pent prendre, avec une exactitude suffisante, égale à $^1/_3$ de la largenr de la partie cannelée. Le levier de débrayage n'ayant à produire qu'nn mouvement de faible amplitude, pent se terminer par un axe, mnni d'un crenx excentrique, qui reçoit le tourillon de la fourche de débrayage, comme le représente la figure.

Lorsqn'on emploie un manchon à cônes, de l'nne des formes précédentes, pour réunir on séparer, de temps à autre, des arbres d'une grande puissance, l'effort Q, qu'il est nécessaire d'exercer, peut tendre à déplacer l'arbre mené, dans le sens de la longueur, et à presser fortement, par exemple, les collets de cet arbre contre les conssinets des paliers. Lorsque cet effort Q est obtenn au moyen d'nn levier, dont l'axe de rotation est fixé dans un support isolé, comme dans la disposition de la fig. 313, il se prodnit, pendant la marche, snr le rebord de la gorge, un frottement de glissement correspondant à l'effort Q; lorsque cet effort, au contraire, est produit par un écrou disposé sur l'arbre moteur lui-même, il détermine sur le collet de cet arbre nne pression, analogue à celle que nous venons d'indiquer pour l'arbre mené. Pour un diamètre d'arbre de 100^{mm}, un calenl, semblable à celui de l'exemple précédent, en prenant $R = 6 \cdot d = 600^{mm}$, donne, pour la pression snivant l'axe: $Q = \frac{343720 \cdot 0{,}174}{600 \cdot 0{,}15} = 665^k$, c'est-à-dire nne valeur assez forte pour amener une usure considérable.

Cet inconvénient se trouverait complètement évité, si la force Q tendait à rapprocher les denx arbres, an lieu de les éloigner. Cette condition est réalisée dans le manchon à disqnes cannelés, proposé par l'anteur et représenté dans la fig. 314.

En coupe, le rebord de la pièce A présente la forme d'nn crochet, dont la petite branche vient reconvrir l'extrémité de la pièce B. La petite rone à main a agit absolument comme celle de la fig. 311; en principe, la construction de la vis reliée à cette roue est également la même qne celle de la vis dn dispositif représenté par cette figure; toutefois elle a des dimensions beaucoup plus considérables, parce que le filet doit forcément être établi sur un cylindre creux, entonrant l'arbre, et que l'écrou est extérieur, tandis que, dans le premier cas, il est taraudé dans l'épaisseur de l'arbre lui-même. Le manchon ne présente aucune

partie saillante, ce qui constitue, comme nous l'avons déjà dit, un avantage sérieux. Les biseaux des cannelures sont abattus,

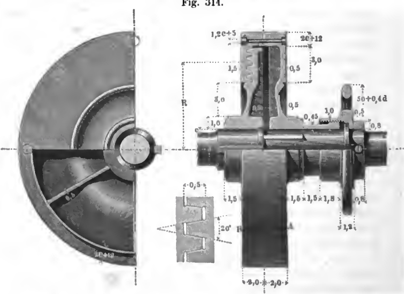


Fig. 314.

ainsi que l'indique le tracé accessoire de la figure, afin que les disques puissent se rapprocher l'un de l'autre, au fur et à mesure que l'usure se produit. Le module, adopté pour les nombres proportionnels inscrits sur la figure, est ici encore l'unité $\delta = 5 + \frac{d}{3}$.

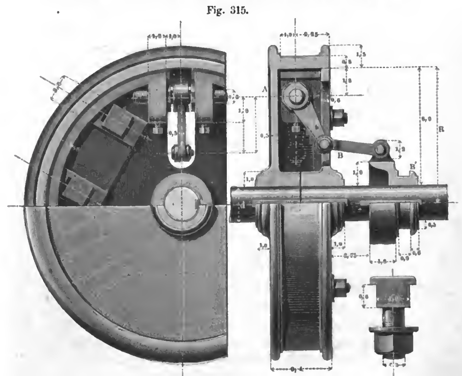
On trouve également, pour les manchons à simples cônes, des dispositions dans lesquelles la force Q tend à rapprocher les arbres (1).

La fig. 315 représente le manchon cylindrique de Kœchlin. Dans ce dispositif, les surfaces qui, par leur frottement, doivent produire l'embrayage, forment toutes les deux des cylindres. Sur la partie cylindrique creuse de la pièce A viennent s'appliquer trois mâchoires, également cylindriques, dont chacune peut se déplacer normalement à la circonférence. Ces mâchoires sont munies à l'extérieur d'une garniture en bronze, qui a le double

(1) Des dispositions de ce genre se rencontrent dans la salle des machines du conservatoire des Arts-et-métiers de Paris.

avantage de donner un frottement d'une certaine douceur et de pouvoir se remplacer, lorsque l'usure produite devient trop considérable. La pression de chacune de ces mâchoires contre la surface intérieure de A s'obtient en agissant sur la pièce mobile B', laquelle, par l'intermédiaire du levier b, fait tourner la vis reliée à ce levier et qui est munie de deux filets de sens contraires. Par suite de ce mouvement, les mâchoires se déplacent, normalement à la surface cylindrique de A, en vertu du glissement de leurs rainures sur les guides, représentés en coupe, à droite de la figure principale. En réglant convenablement la position des écrous mobiles de la vis à double filet, à l'aide des petites vis de pression, indiquées sur le dessin, on peut arriver, pour les mâchoires, à une position telle qu'il suffise d'un déplacement de 1^{mm} environ (2^{mm} dans les grands manchons), pour produire l'embrayage ou le débrayage. On n'a pas à redouter, dans ce cas, comme avec les manchons à cônes, un serrage

Fig. 315.



trop prononcé ou un coincement, car la réactiou que fournit, en chaque point, la paroi du cylindre A, en vertu de sou élasticité, est précisément dirigée dans le même sens que le mouvement qui correspond au débrayage et tend, par suite, à le faciliter. L'emploi de la vis offre ici, comme dans le dispositif de la fig. 311, l'avantage que le débrayage ne peut pas se produire de lui-même et que, par conséquent, il n'est pas nécessaire de continuer à exercer la pression Q snr B', lorsque l'embrayage existe. Il est évident d'ailleurs que, pour obtenir ce résultat, il est essentiel de donner au filet de la vis une inclinaison dont l'angle soit inférieur à l'angle de frottement.

En désignant par s eette inclinaison (ou le pas), par b la longueur du levier, par f le coefficient de frottement sur les mâchoires, l'effort Q à exercer, pour transmettre le moment (PR), est, en tenant compte du frottement de la vis, $Q = 2 \cdot \frac{s}{2\pi b} \frac{P}{f}$

ou

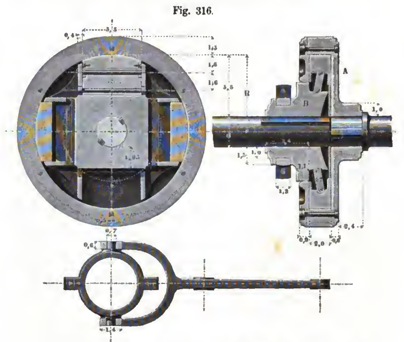
$$Q = \frac{s}{\pi b} \frac{(PR)}{f \cdot R} \quad \ldots \ldots \quad (113)$$

valeur qui, ainsi que nous l'avons vu dans l'exemple précédent, peut être rendue très-petite. Si on suppose, comme nous l'avons fait, que B soit la partie menée, il ne se produit, pendant l'arrêt de cette partie, aucun glissement sur B'. Pour les manchons placés verticalement, l'effort Q peut être produit par la chute d'un poids; on obtient ainsi un embrayage progressif et d'une grande douceur. Par suite de la disposition même des organes, on s'est trouvé forcément conduit, dans le manchon de Kœchlin, à donner à R une valeur assez considérable; la valeur de P est, par suite, d'autant plus faible et c'est là un avantage sérieux, qui n'a pas peu contribué au succès qu'a obtenu ce manchon, dès son apparition. Le premier appareil construit par Kœchlin était destiné à la transmission d'un travail de 30 chevaux (1). Les nombres proportionnels, indiqués sur la figure, correspondent à un minimum de R; mais il n'y a aucun inconvénient à augmenter cette valeur, lorsqu'on le juge nécessaire. Le module, adopté pour ces nombres, est toujours $\delta = 5 + \frac{d}{3}$. Bodmer a donné au manchon cylindrique une forme à la fois très-gracieuse et très-simple (2); des dispositions analogues sont employées

(1) Bulletin de la société industrielle de Mulhouse, 1854. P. 138.
(2) Fairbairn, Mills et Millworks. Vol. II. P. 92.

avec succès dans les moulins (1). Dans certains manchons cylindriques, la pression des mâchoires contre la surface intérieure s'obtient au moyen de leviers à articulations. La fig. 316 représente ce mode de commande, tel qu'il a été employé par Fossey (2), dans une machine destinée à frapper les monnaies.

Fig. 316.



Dans ce manchon, dont toutes les parties sont très-ramassées, les mâchoires, ou sabots, sont au nombre de quatre, sans garniture en bronze. Les bras des leviers à articulations, ou des genouillères, ont la même largeur que les mâchoires et sont munis de tourillons demi-cylindriques, au moyen desquels se transmet la pression destinée à produire l'embrayage; pour le mouvement en sens inverse du manchon mobile, les sabots sont munis de boulons d'un faible diamètre, qui régnent également sur toute leur largeur. En désignant par α l'angle que forment les bras des leviers avec la normale à la direction des axes des

(1) Uhland, Prakt. Masch.-Constr. 1869. P. 97.
(2) Armengaud, Publication industrielle, Vol. XVII, Pl. 10.

arbres et en conservant les notations précédentes, l'effort Q, qu'il est nécessaire d'exercer pour produire l'embrayage, est donné par l'expression:

$$Q = \frac{P tg\,\alpha}{f} = \frac{(PR)}{R}\frac{tg\,\alpha}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114).$$

Comme, avec ce manchon, on n'a pas à redouter de coincement, l'angle α peut être pris notablement au-dessous de la limite que nous avons indiquée pour l'angle des cônes du manchon de la fig. 311. En admettant, comme on le fait, des valeurs de α comprises entre 1° et 2°, on arrive, pour le coefficient de Q, à des valeurs relativement faibles. Ainsi, par exemple, pour $\alpha = 1^{\circ}\,{}^{3}/_{4}$, on trouve $\frac{Q}{P} = \frac{0{,}030}{0{,}150} = \frac{1}{5}$.

Garand a construit des manchons cylindriques, dans lesquels il a conservé les leviers à articulations (1). Jackson et d'autres constructeurs ont adopté des dispositions dans lesquelles le serrage des mâchoires s'effectue à l'aide d'une pression hydraulique(2). Schürmann a remplacé le frottement des mâchoires rigides par celui d'une sangle, soumise à une pression dirigée de dedans en dehors (3); dans le dispositif de Napier, la sangle est conservée et agit par tension (4). Dans ces derniers temps, on a fait de nombreuses applications du manchon cylindrique; quelques dispositions nouvelles ont été essayées, mais, dans la plupart des cas, on a de préférence adopté celles dont le fonctionnement avait été reconnu satisfaisant pour des périodes de marche suffisamment prolongées.

§ 117.

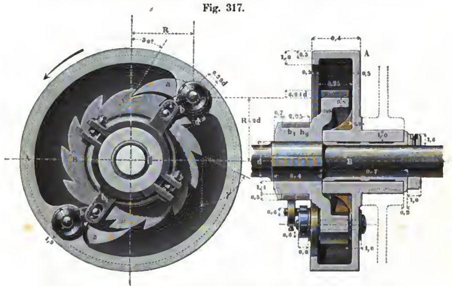
Manchons d'accouplement pour machines motrices.

Lorsque deux machines motrices doivent agir sur un même arbre de couche, le mouvement, pour chacune de ces deux machines, ou pour l'une d'elles, au moins, se transmet par l'intermédiaire d'un manchon, qui se débraye de lui-même, lorsque la machine à laquelle il correspond vient à s'arrêter, tandis que l'autre machine continue à tourner, et qui s'embraye également de lui-même, lorsque la première machine se remet en marche.

(1) Dingler, Journal polytechnique. Vol. 149, P. 22.
(2) Dingler, J. P. Vol. 149, P. 251.
(3) Zeitschr. d. Vereins d. Ing. Vol. V (1861), P. 301.
(4) Engineer 1868, Juillet. P. 64.

Il est évident qnc tout appareil à déclic, agissant dans un seul sens, permet de réaliser ce double effet et, en réalité, les manchous d'accouplement, employés dans la pratique, ne sont que des appareils à déclics convenablement disposés. Le premier manchon d'acconplement, dont on ait fait nsage pour les machines motrices, est celui de Pouyer-Quertier, qu'on désigne sons le nom de manchon Pouyer. La fig. 317 représente une disposition

Fig. 317.



de ce manchon, auquel on peut donner, en exécution, une très-grande variété de formes. Dans cette disposition, la partie *A* du manchon, qni est commandée par la machine motrice dont l'action peut être snspendne, est folle sur l'arbre *B*. Cette pièce *A* est dentée, par exemple, à sa eirconférenee, ou porte une roue dentée, ealée sur le moyeu prolongé, comme eelle qui est représentée en pointillé. Afin de rendre le mouvement plns facile, ce moyeu est muni intérieurement d'une garniture en bronze. Snr l'arbre *B* est calée nne roue d'encliqnetage; les deux eliquets *a* pénètrent alternativement dans les ereux de cette roue, lorsque *A* doit transmettre à *B* l'action de la machine, mais ils cessent d'agir tous les deux, lorsque *A* vient à s'arrêter, l'arbre *B* continuant à tourner. La direction de la rotation est indiquée par la flèche. Le débrayage se produit au moyen des bandes de

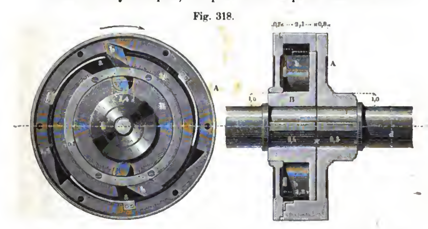
frein b_1 et b_2, qui, lorsque la pièce A commence à rester en arrière, se trouvent entraînées par le frottement et font tourner les leviers b et, par suite, les cliquets a, jusqu'à ce qu'elles arrivent aux boulons qui limitent leur déplacement. A ce moment ces bandes restent en arrière avec la pièce A, en glissant sur B. Lorsque A se trouve de nouveau mis en mouvement, dès que sa vitesse devient légèrement supérieure à celle de B, les bandes tendent à retenir les leviers b des cliquets a et finissent par les ramener dans leur ancienne position; à ce moment, les cliquets se placent de nouveau dans les vides des dents et transmettent à l'arbre B le travail de la machine qui commande la pièce A. Afin que les cliquets ne puissent pas rester appliqués vers les extrémités des dents, l'angle γ d'un cliquet avec le flanc d'une dent doit être inférieur au complément de l'angle du frottement; ici γ a été pris égal à 60^0. Pouyer-Quertier n'emploie qu'une seule bande et fait agir les deux cliquets simultanément.

Dans la disposition représentée sur la figure, où la roue d'encliquetage a un nombre impair de dents (13), chaque cliquet ne produit qu'un déplacement d'une demi-division; il n'y a, par suite, jamais qu'un cliquet en prise et la pièce A ne peut jamais tourner de plus d'une demi-division, sans entraîner l'arbre B. L'importance de l'observation relative à l'angle de frottement n'a pas été toujours comprise et on a construit des manchons Pouyer, dans lesquels les cliquets se trouvaient porter sur les extrémités des dents; la conséquence de ce vice de construction était généralement la rupture d'une ou même de toutes les dents de l'encliquetage. Les cliquets a doivent être en acier et la partie effilée, qui agit sur les dents, doit être trempée. Le module des nombres proportionnels de la figure est $\delta = 5 + \frac{d}{3}$. En Allemagne, au manchon de Pouyer on préfère assez souvent celui de Uhlhorn, qui est représenté dans la fig. 318.

A est la pièce correspondant à la machine motrice qui peut être mise au repos et B la pièce sur laquelle la première doit agir. A est une roue d'encliquetage intérieure, sur laquelle agissent les cliquets ou griffes b. L'introduction de ces griffes, dans les vides des dents de A, est due aux ressorts a, qui viennent s'appuyer, par leurs extrémités, contre une de leurs faces et les font pénétrer dans les vides, dès que la vitesse de rotation de A tend à devenir légèrement supérieure à celle de B. Dans

le cas inverse, les griffes viennent se loger dans des cavités, ménagées sur B, comme l'indique la partie inférieure de la figure, et, dans le mouvement de rotation de B, rabattent, à chaque passage, l'extrémité de chaque ressort. Les articulations des griffes sont ici, comme dans le dispositif de la fig. 316, des tourillons demi-cylindriques, compris entre la paroi intérieure du

Fig. 318.



couvercle et le fond opposé. Uhlhorn, dans le début, ne donnait à la pièce A que deux vides de dents, mais il a recommandé récemment d'en porter le nombre à quatre, afin que l'accélération ne puisse se produire que pendant un quart de tour au plus. Lorsqu'on a recours à trois vides seulement (en général à un nombre impair), les choses se passent d'une manière encore plus avantageuse, puisque, dans ce cas, l'accélération se trouve limitée à un sixième de tour (en général à une demi-division, comme dans le manchon de Pouyer). Avec ce dispositif, il n'y aurait d'ailleurs aucun inconvénient à ce que B devînt la pièce menante, au lieu d'être la pièce conduite; dans ce cas, la rotation devrait s'effectuer dans le sens opposé à celui de la flèche.

Ainsi que nous l'avons fait précédemment remarquer, les manchons d'accouplement pour machines motrices sont de véritables encliquetages et il est évident qu'on peut les utiliser à d'autres usages, pour assembler, par exemple, deux parties d'arbre, de telle sorte que celle de ces deux parties, qui doit donner le mouvement à la seconde, puisse tourner alternativement dans les deux sens, pendant un temps déterminé, pour chaque sens de

rotation. C'est un mécanisme de cette espèce qu'on emploie pour les tambours à renvider des métiers selfacting dans les filatures; l'encliquetage, dont on se sert, dans ce cas, présente beaucoup d'analogie avec le manchon de Pouyer-Quertier; ce qui tient sans doute à ce que ce mécanisme a servi de guide à l'inventeur pour l'établissement du dispositif qui porte son nom.

VIII. Supports des tourillons.

§ 118.

Des différentes dispositions de paliers.

On désigne sous le nom de paliers les parties fixes de la transmission, sur lesquelles reposent directement les tourillons des arbres. Dans un palier complet, on distingue: 1° les coussinets, pour lesquels on emploie le bronze ou une matière analogue; 2° le corps du palier, composé d'une ou de plusieurs parties, qui sont le plus souvent en fonte; 3° les différentes pièces de jonction et, en particulier, les boulons. Les nombreuses espèces de paliers, en usage dans la pratique, constituent une série de formes et de dispositions différentes. On les divise généralement en deux classes principales:

a. *Supports d'arbres horizontaux, ou paliers proprement dits,*
b. *Supports d'arbres verticaux, ou crapaudines.*

Pour ces deux classes de supports, il convient autant que possible de donner aux rainures de séparation des coussinets, une direction rigoureusement, ou au moins très-sensiblement perpendiculaire à celle de la pression qui s'exerce sur le tourillon. On se trouve par là conduit à établir de nouvelles subdivisions dans les paliers, dont les formes varient avec les positions relatives des tourillons et des surfaces sur lesquelles ces paliers doivent être fixés. Nous allons examiner successivement les dispositifs de paliers les plus importants, en commençant par ceux qui se rapportent aux tourillons cylindriques.

§ 119.

Unité ou module pour la construction des paliers.

L'unité adoptée pour les coussinets de paliers et dont on se sert pour déterminer leur épaisseur, la largeur des rebords

et leur saillie, est celle que nous avons primitivement employée pour les tourillons:

$$e = 3 + {}^{7}/_{100}\, d$$

où d représente le diamètre intérieur des coussinets. Pour le corps du palier et les boulons, ainsi que pour les surfaces des coussinets, qui sont ajustées sur le corps du palier, le module est:

$$d_1 = 10 + 1{,}15\, d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (115).$$

Quant à la longueur des coussinets, elle se trouve déterminée, pour tous les paliers d'arbres horizontaux, par les règles que nous avons données pour la longueur des tourillons. Pour les paliers de ce genre, calculés à l'aide du module précédent, dans le cas particulier où le tourillon est un tourillon normal d'extrémité, en fer forgé, et se trouve soumis, par suite, à une charge correspondant au diamètre d, on suppose que la pression du tourillon tend à l'appuyer sur le corps du palier. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand cette pression P tend à soulever le chapeau, on doit adopter des dimensions plus considérables. On construit alors les paliers, en conservant les nombres proportionnels inscrits sur les figures, mais en les rapportant au module:

$$d'_1 = 10 + 1{,}75\, d \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (116)$$

où d désigne encore le diamètre d'un tourillon d'extrémité, en fer forgé, d'une longueur égale à $1{,}5\, d$, correspondant à la charge P, lorsque le tourillon véritable a une longueur supérieure à $1{,}5\, d$, c'est-à-dire se trouve être un tourillon en fonte. Le module précédent est ordinairement celui dont on se sert pour la construction des paliers des axes de balanciers des machines à vapeur (V. § 127).

Pour les paliers qui ne se trouvent pas aux extrémités des arbres de transmission, dans le cas où la pression tend à soulever les chapeaux, on adopte, pour module, la plus grande des deux valeurs données par les relations (115) et (116). En admettant le module d'_1, les boulons du chapeau du palier offrent une sécurité, qui est sensiblement la même que celle du tourillon normal d'extrémité, en fer forgé ($\mathfrak{S} = 6$), mais qui est inférieure à celle des boulons de fixation, calculés par la formule (32). La valeur d'_1 a été fournie par l'observation d'installations éprouvées; pratiquement on regarde ici comme suffisante une sécurité du même ordre, en moyenne, que celle correspondant à la formule (43) § 66 (V. Têtes de bielles ch. XVI).

Exemple. A une pression de 8000^k correspond, d'après la table du § 80, un tourillon d'extrémité, en fer forgé, de 100^mm de diamètre sur 150^mm de longueur. Si la pression tend à soulever le chapeau du palier, le module $d_1 = 10 + 1{,}15 \cdot 100 = 125^{mm}$ *est trop faible et on doit adopter, dans ce cas,* $d'_1 = 10 + 1{,}75 \cdot 100 = 185^{mm}$. *Les boulons du chapeau ont alors un diamètre de 37^mm et sont légèrement plus forts que ceux déterminés par la formule (43). Pour la même pression, un tourillon en fonte devrait avoir un diamètre de 135^mm, qui, d'après la relation (115), donne, pour l'unité,* $10 + 1{,}15 \cdot 135 = 165^{mm}$; *cette valeur étant inférieure à la précédente, on doit, dans ce cas également, prendre, pour le module, 185^mm. Un tourillon intermédiaire aurait, pour la même pression, un diamètre de 170^mm, qui donnerait pour l'unité normale* $d_1 = 10 + 1{,}15 \cdot 170 = 206^{mm}$; *comme cette valeur est notablement supérieure à 185^mm, il en résulte que le palier, construit avec ce module normal, est dans de bonnes conditions pour résister à la pression qui tend à soulever son chapeau.*

A. Paliers d'arbres horizontaux.

§ 120.

Palier horizontal.

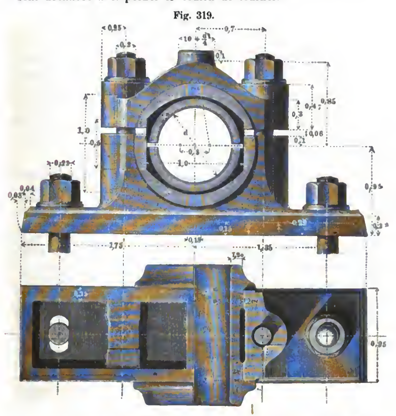
La fig. 319 représente un palier horizontal pour des diamètres de tourillon compris entre 30 et 200^mm.

La semelle du palier est parallèle aux rainures de séparation des deux coussinets, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction moyenne de la pression exercée sur le tourillon; elle se trouve d'ailleurs à une assez faible distance au-dessous du coussinet inférieur. Les dimensions du corps du palier et du chapeau se déterminent à l'aide du module d_1 (115), à l'exception du réservoir à huile établi sur le chapeau et qui, pour les petits paliers, doit avoir des dimensions relativement plus considérables; son diamètre extérieur se calcule par l'expression $10 + \frac{d_1}{4}$.

La longueur des coussinets dépend de celle du tourillon, qui, d'après ce que nous avons vu dans le § 79, peut être égale à $1{,}5\,d$, $2\,d$, etc. La longueur la plus convenable pour le palier dont nous nous occupons est $l = 2\,d$. Les bourrelets des extrémités des coussinets, qui sont en saillie sur les faces du palier, sont plus ou moins arrondis, suivant que, pour le même diamètre, on prend un tourillon court ou un tourillon long. Les boulons du chapeau se terminent ordinairement à la partie infé-

rieure par une tête à section carrée; cette tête, comme l'indique la partie du tracé située à gauche, se trouve comprise entre deux saillies ménagées dans l'évidement de la semelle et qui sont destinées à empêcher le boulon de tourner.

Fig. 319.



Les boulons de fixation du palier, qui doivent être constamment serrés et soumis, par suite, à une tension assez forte, ont un diamètre légèrement supérieur à celui des boulons du chapeau; souvent ils sont destinés à relier simplement la semelle du palier à une plaque spéciale de fondation (V. fig. 326, § 125) et, dans ce cas, on donne à leur tête une forme particulière. Afin de pouvoir caler solidement la semelle du palier sur cette plaque, les deux bords extrêmes de cette semelle présentent une légère inclinaison. L'évidement de la semelle du palier, permet

de diminuer la dépense de matière, en même temps qu'il réduit, dans une assez forte proportion, les surfaces qui doivent être rabotées. Le vide, existant entre le corps du palier et le chapeau, est ordinairement rempli avec de plaques de bois, de manière à permettre de serrer à fond les boulons de ce chapeau, sans produire un serrage trop considérable sur le tourillon.

Lorsqu'un palier de cette espèce doit être établi pour un tourillon plus faible que le tourillon normal et que la pression exercée sur ce tourillon tend à soulever le chapeau (v. le paragraphe précédent), il convient de prendre, pour les épaisseurs du chapeau et du corps, les mêmes valeurs que pour le palier normal, en déterminant le profil extérieur du coussinet d'après les dimensions du tourillon donné, comme nous l'avons indiqué précédemment.

Exemple. Avec le tourillon choisi comme exemple dans le paragraphe précédent, et dont le diamètre était de 100^{mm}, *la formule (116), applicable à l'hypothèse faite sur la direction de la pression, donnait, pour le module,* $d'_1 = 185^{mm}$. *Si on conserve, pour le profil extérieur du coussinet, en largeur et en hauteur, la dimension* $10 + 1{,}15 \cdot 100 = 125$, *l'épaisseur des parois du palier se trouve augmentée, suivant les mêmes directions, de la quantité* $\frac{1}{2}(185-125) = 30^{mm}$. *Dans certains cas, la dimension du palier, parallèlement à la direction du tourillon, peut être inférieure à celle qui correspond au palier normal. Ainsi, dans l'exemple choisi, la longueur réelle du tourillon étant égale à* $1{,}5 \cdot 100 = 150^{mm}$, *et l'épaisseur des rebords des coussinets* $e = 3 + \frac{7}{100} \cdot 100 = 10^{mm}$, *l'écartement maximum de ces rebords doit être* $150 - 2 \cdot 10 = 130^{mm}$, *tandis que, d'après les indications du tracé normal, il aurait pour valeur* $0{,}9 \cdot 185 = 167^{mm}$. *La largeur du palier se trouve, dans ce cas, diminuée de la différence entre ces deux valeurs, soit de* 37^{mm}.

§ 121.

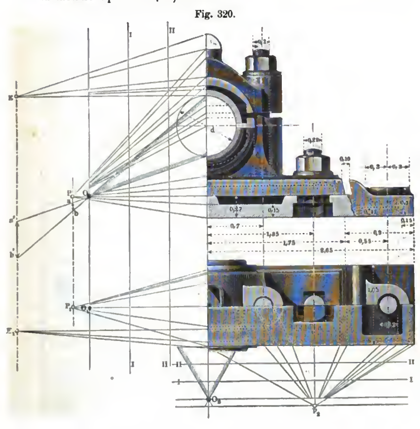
Echelle de proportion pour les paliers horizontaux.

Pour la construction des paliers, on fait un grand usage de l'échelle de proportion. Comme exemple, nous donnons ici celle qui se rapporte au cas des paliers horizontaux que nous venons d'examiner (1).

(1) La maison Escher Wyss de Zurich se sert pour les paliers d'une échelle de proportion très-bien disposée; cette échelle, qui a été établie dans l'hypothèse de la proportionnalité géométrique de toutes les dimensions et qui ne possède, par suite, qu'un seul pôle, rend de très-bons services.

Les pôles O, O_1 et O_2 se rapportent aux dimensions du tourillon, les pôles P, P_1 et P_2 aux dimensions qui correspondent au module $d_1 = 10 + 1{,}15\,d$.

Fig. 320.



d_1 devient égal à zéro, pour $d = -\frac{10}{1 \cdot 15} = -8^{mm},7$. La position de P doit, par suite, se déterminer par la condition que la longueur ab de la verticale, menée par ce point et comprise entre les rayons Oa et Ob, soit égale à $-8^{mm},7$. Les intersections des rayons, menés par les points O et P, avec les ordonnées I, II, etc. déterminent les dimensions correspondantes.

Les dimensions des coussinets exigent un pôle spécial, puisqu'elles sont rapportées à un module différent. Ce module,

qui est $e = 3 + \frac{7}{100} d$, devient nul pour $d = -\frac{3 \cdot 100}{7} = -43^{mm}$. La verticale, dont la partie $a'b'$, comprise entre les rayons Oa' et Ob', a pour valeur -43^{mm}, détermine les pôles E et E_1, qu'on doit utiliser pour les dimensions des coussinets. Pour le réservoir d'huile, placé sur le chapeau, la dimension proportionnelle est donnée par l'expression: $10 + \frac{d_1}{4} = 10 + 0{,}25 \cdot 10 + 0{,}25 \cdot 1{,}15\, d = 12{,}5 + 0{,}29\, d = 4{,}17\ (3 + 0{,}07\, d) = 4{,}17\, e$. Le pôle E_1 peut donc également servir à déterminer le réservoir à huile.

§ 122.

Table des poids des paliers horizontaux.

d	e	d_1	Corps du palier.	Chapeau.	Plaque de fixation.	Boulons — Chapeau 2 P.	Boulons — Semelle 2 P.	Coussinets $l = \frac{4}{3} d$	Coussinets $l = 1{,}5 d$
27— 30	5	45	0,86	0,35	0,78	0,15	0,13	0,41	0,44
33— 37	6	53	1,41	0,58	1,28	0,24	0,20	0,54	0,58
40— 45	6	62	2,26	0,91	2,04	0,33	0,28	0,69	0,75
50— 55	7	73	3,69	1,48	3,30	0,56	0,47	1,25	1,45
60— 65	8	85	5,82	2,34	5,25	0,81	0,67	1,85	2,13
70— 75	8	96	8,38	3,38	7,56	1,14	0,93	2,86	3,26
80— 85	9	108	10,58	4,81	10,77	1,55	1,25	3,40	3,86
90— 95	10	119	13,86	6,25	14,40	2,15	1,70	4,37	4,93
100—105	10	131	18,79	8,72	19,52	2,85	2,23	5,44	6,09
110—115	11	142	23,55	10,92	24,47	3,48	2,67	7,41	8,23
120—130	12	160	33,70	15,59	35,00	4,93	3,72	10,33	11,36
140—150	13	183	50,41	23,38	52,38	7,27	5,38	14,07	15,40
160—170	15	206	71,91	33,36	74,13	10,57	7,70	17,22	18,77
180—190	16	229	98,79	45,82	99,96	14,13	10,10	21,18	22,87
200	17	240	113,72	52,75	118,16	16,23	12,24	27,14	32,21

Remarque. Dans le tableau précédent, les poids des boulons de fixation du palier ont été évalués d'après la fig. 320, où leur tête porte sur la face inférieure de la plaque de fondation.

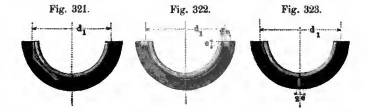
Exemple. Un palier horizontal, pour un tourillon de 90mm de diamètre et de 135mm de longueur, doit, d'après le tableau précédent, être établi avec le module 119mm, qui correspond à d = 95mm. Les poids des différentes parties du palier, fournis par la huitième ligne horizontale, sont approximativement les suivants:

Corps du palier et chapeau 19k,33; plaque de fondation 13k,98; coussinets 4k,93; boulons du chapeau et de la semelle (4 pièces) 2k,85; le poids total est, par conséquent, 41k,53.

§ 123.

Des différentes formes de coussinets. Coussinets en bois.

Les surfaces dressées, à l'extérienr des coussinets, présentent très-souvent une forme différente de celle que nous avons indiquée précédemment; les plus généralement employées sont les surfaces prismatiques à huit côtés, comme dans la fig. 321, ou les surfaces cylindriques, comme dans les fig. 322 et 323.

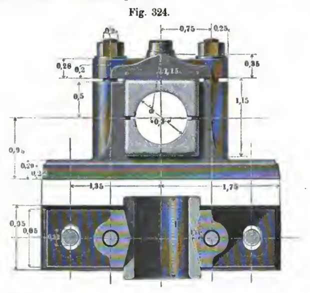


Avec les deux dernières formes, l'ajustage des coussinets sur les cavités correspondantes du palier s'obtient très-facilement au tour; toutefois il convient, dans ces deux cas, d'empêcher l'entrainement des deux coussinets par la rotation du tourillon et on y parvient, soit en ménageant, aux extrémités du coussinet inférieur, deux saillies latérales, d'une longueur égale à $2e$, encastrées dans la fonte du palier (fig. 322), soit en munissant chacun des deux coussinets de deux petits tourillons cylindriques, ajustés, l'un dans le chapeau, l'autre dans le corps du palier (fig. 323). Chacune de ces dispositions présente à la fois des avantages et des inconvénients, de telle sorte qu'il n'est guère possible de décider quelle est celle qu'il convient d'employer de préférence. Nous devons nous borner à faire remarquer que, pour une usine de construction, il y a

avantage à employer constamment la même forme de coussinets. Les modifications qu'entraine, pour le chapeau et le corps du palier, l'adoption d'une des formes 322 et 323, ne présentent aucune difficulté.

Lorsqu'on emploie des coussinets en bois de Gaïac (v. § 83), on doit leur donner les formes les plus simples. La plus avantageuse (1) est celle que représente la fig. 324; l'aspect de l'ensemble du palier, qui comporte cette forme de coussinets, est d'ailleurs assez peu satisfaisant; la figure indique les nombres proportionnels à employer pour la détermination des dimensions des différentes parties.

Fig. 324.



Les coussinets en métal blanc ou en toutes autres matières analogues, destinées à remplacer le bronze, se composent, en général, d'une partie extérieure, en fonte, souvent même en bronze, sur laquelle se trouve déposé, par fusion, l'alliage destiné à former la garniture intérieure. Dans les coussinets où la partie extérieure est en bronze, on peut arriver à déposer cet alliage, en couche, assez mince à la vérité, à l'aide d'un simple fer à souder d'un poids suffisant.

(1) D'après le professeur Werner.

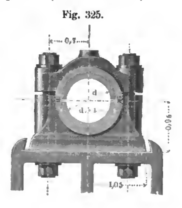
§ 124.

Paliers sans patins.

Il arrive souvent que le manque de place pour un palier conduit à racconreir tellement le patin, qn'il se tronve réduit, ponr ainsi dire, à la projection du corps du palier. La fixation dn palier snr la plaqne de fondation se fait alors directement au moyen des boulons du ehapeau, qui doivent, dans ce eas, être munis d'une tête intermédiaire (v. § 62, fig. 153).

Cette disposition des boulons du ehapeau est également employée avee avantage pour fixer les paliers ordinaires sur leurs plaqnes de fondation, lorsque la pression transmise par le tonrillon s'exerce alternativement snr le eoussinet inférieur et sur le eoussinet supérieur (v. § 120 et 121).

Fig. 325.



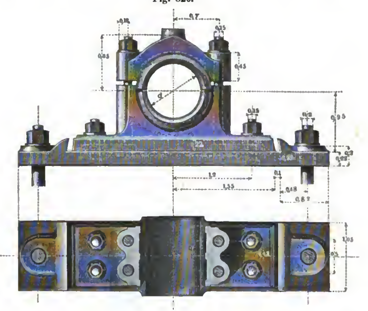
§ 125.

Paliers horizontaux de grandes dimensions.

La fig. 326 représente nn palier horizontal pour un diamètre de tourillon compris entre 200 et 300 ^{mm}. Ce palier comporte quatre boulons de chapeau et un nombre égal de boulons destinés à fixer la semelle snr la plaque de fondation. On donne à ces derniers boulons la forme représentée par la fig. 141, § 62, ou mieux encore une forme qu'on obtient en combinant

celles des deux figures 141 et 143. Grâce à cette disposition, on peut, sans toucher à la plaque de fondation, enlever les

Fig. 326.



boulons et les rétablir facilement, en même temps que le patin s'oppose à la rotation du corps de chaque boulon, lorsqu'il occupe sa position définitive. Le corps et le chapeau du palier sont ici relativement plus évidés que dans la disposition indiquée précédemment. Pour les paliers des arbres à manivelles et, en général, pour tous ceux qui sont exposés à de fortes vibrations, il convient de munir les boulons du chapeau de contre-écrous, ou de tout autre dispositif de sûreté, de nature à prévenir leur desserrage.

§ 126.

Table des poids des paliers horizontaux de grandes dimensions.

d	d_1	Corps du palier.	Chapeau du palier.	Plaque de fondation.	Chapeau — Boulons 4 Pi.	Semelle — Boulons 4 Pi.	Coussinets $l = {}^4/_3 d$	Coussinets $l = 1,5d$
210	252	134,05	59,70	129,28	19,75	11,16	37,41	41,52
220	263	152,40	67,87	146,96	22,57	12,81	44,61	49,51
230	275	174,24	77,58	168,00	25,86	14,69	51,84	57,31
240	286	192,38	85,28	184,68	28,10	15,82	58,75	65,24
250	298	221,67	89,72	213,79	31,92	17,71	66,29	73,58
260	309	247,14	110,06	238,34	35,47	19,63	74,11	82,26
270	320	274,48	122,24	264,71	39,64	22,04	82,58	91,66
280	332	306,51	136,51	295,62	44,29	24,64	91,08	101,10
290	344	329,22	146,62	317,52	48,21	27,10	99,49	110,43
300	355	374,75	166,89	361,50	53,64	29,62	108,39	121,27

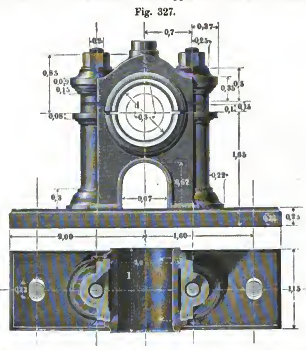
§ 127.

Palier surélevé.

Dans certaines circonstances, l'emploi du palier horizontal ordinaire, à deux ou à quatre boulons, n'est pas admissible, en raison de la faible hauteur qu'il présente et de la trop grande simplicité de forme des parties extérieures; en d'autres termes, dans certaines installations, on se trouve conduit à substituer au type que nous venons de décrire un palier d'une plus grande hauteur et d'une plus grande richesse de formes. Cette obligation s'impose, en particulier, pour les axes de balanciers des machines à vapeur, où les paliers doivent reposer directement sur des entablements, qui présentent un certain aspect architechtonique. Comme, dans ce cas, la pression du tourillon, au moins pour les machines à manivelle, s'exerce ordinairement sur le coussinet supérieur il convient d'adopter, pour ces paliers, le module donné par l'expression (116), en réduisant, dans une certaine mesure, leur largeur, c'est-à-dire la dimension parallèle à la longueur du tourillon. Une des formes les plus convenables

qu'on puisse employer, pour les paliers de ce genre, est celle de la fig. 327, qui représente un modèle qu'on rencontre assez fréquemment en Angleterre. En supposant ce tracé exécuté, en

Fig. 327.



prenant pour point de départ le module normal (115), si on voulait ensuite le rapporter au module (116), le tourillon auquel il correspondrait aurait, dans ce cas, une valeur plus faible, qui se trouve représentée en pointillé à la partie supérieure. Entre le chapeau et le corps du palier se trouvent interposées des plaques de bois, qui ont l'avantage de remplir le vide entre ces deux pièces, tout en donnant une certaine élasticité.

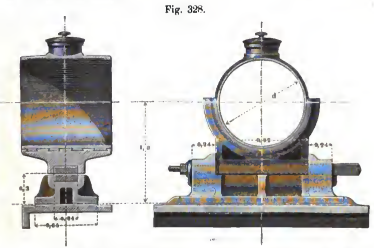
§ 128.

Palier à coussinet inférieur mobile.

Pour certains paliers, dans lesquels la pression s'exerce constamment sur le coussinet inférieur, on adopte parfois une disposition spéciale, qui permet de soulever ce coussinet ou même

le corps entier du palier, afin de répartir plus uniformément l'usure qui, sans cela, tendrait à se produire surtout à la partie inférieure. Bien que les dispositifs de ce genre ne s'emploient, en réalité, que pour les machines d'un très-grand poids, il peut être utile cependant de montrer, par un exemple, de quelle manière il est possible, dans la pratique, de tenir compte de la direction de l'usure. Le dispositif de la fig. 328 est emprunté à un navire à hélice.

Fig. 328.



Le corps du palier qui reçoit la pression de l'arbre, au lieu d'être fixé par des boulons, d'une manière invariable, repose sur un système de clavettes, qui servent à le maintenir successivement à différentes hauteurs et permettent de le déplacer verticalement en raison de l'usure produite. Le coussinet supérieur est muni de rebords (non représentés sur la figure), à travers lesquels passent les boulons du chapeau qui sont fixés sur le corps du palier. Le coussinet inférieur est formé d'une garniture en métal blanc, coulée sur la surface intérieure du corps du palier.

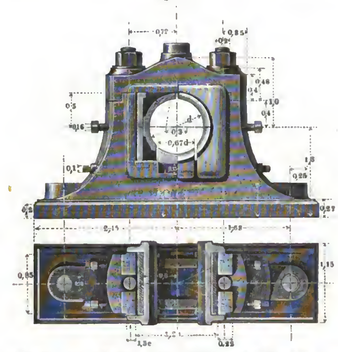
§ 129.

Palier à trois coussinets.

Dans les machines à vapeur horizontales et dans quelques autres appareils, on rencontre des paliers, dans lesquels le tourillon exerce une pression latérale, dirigée tantôt dans un sens,

tantôt dans l'autre, en même temps que la partie inférieure se trouve soumise à une pression continue qui, pour les machines à vapeur, par exemple, est due au poids du volant. L'inclinaison des deux coussinets sur l'horizontale, qui a été adoptée dans un très-grand nombre d'installations, ne prévient que dans une bien faible mesure l'ovalisation qui tend à se produire par l'usure. Pour remédier plus sérieusement à cet inconvénient et répartir cette usure aussi régulièrement que possible, on a proposé, dans ces derniers temps, l'emploi d'un palier à trois coussinets, dont l'un est destiné à recevoir l'action de la pression verticale constante, tandis que les deux autres se trouvent soumis à la pression horizontale, qui s'exerce alternativement en avant et en arrière. La fig. 329 représente un palier de ce genre. Le coussinet inférieur

Fig. 329.

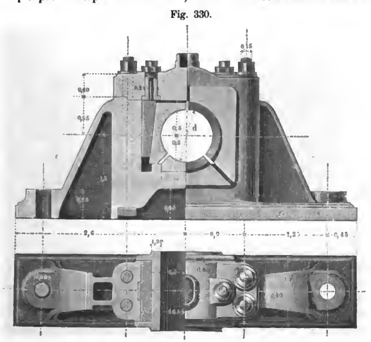


repose sur deux clavettes, dont l'intérieur, taraudé dans le sens de leur longueur et formant écrou, est traversé par une tige filetée, qui peut simplement tourner, sans se déplacer longitu-

dinalemeut; an moyen de ces deux vis, on pent amener les clavettes dans une positiou convenable pour le serrage et les y fixer. Les coussinets latéraux sont poussés contre le tourillon par deux antres vis de pressiou, dont l'action s'exerce par l'intermédiaire d'une plaque eu fer. Lorsqu'on vent retirer les coussinets, on commence par sortir les plaqnes latérales, après avoir enlevé le chapeau, pnis on ramène les coussinets en arrière, de manière à leur faire éviter le tourillou, en les retirant verticalement. Les pressions, qui s'exercent sur les parties latérales de ce palier, exigent qn'on augmente sa largenr, comme l'indique le plau.

La fig. 330 représente un antre dispositif de palier à trois coussinets (1), dans lequel le coussinet inférienr est fixe, ou du moins ne peut être soulevé, lorsque le besoin s'en fait sentir, qne par l'interposition de cales; les deux coussinets latéraux sont

Fig. 330.



mainteuus serrés contre le tourillou par l'actiou de clavettes, que supporte le chapeau, lequel est relié, d'uue manière invariable,

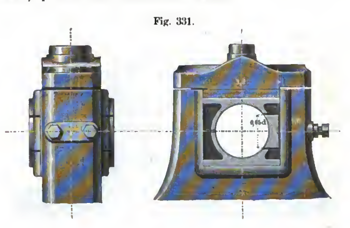
(1) Emprunté à une machine à vapeur de la Société Fives-Lille.

par les boulons, au corps du palier. Chaque clavette se termine, à la partie supérieure, par une partie filetée, dont l'écrou est muni d'une tête à six pans. Au moyen d'une clef, qu'on place sur cette tête, on fait tourner l'écrou et on arrive, par suite, à le serrer fortement sur le contre-écrou, qui repose directement sur le chapeau.

Le corps du palier est établi, comme l'indique la figure, dans des conditions de force telles qu'il puisse supporter sans danger les actions latérales alternatives, dues à la pression de la vapeur sur les faces du piston. Assez souvent (comme, par exemple, dans l'original de la figure), le corps du palier est venu de fonte avec le bâti de la machine.

La fig. 331 donne un troisième type de palier à trois coussinets, qui est d'une exécution très-facile.

Fig. 331.



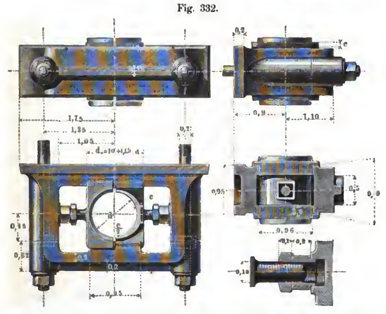
On peut l'employer dans tous les cas où, en dehors de pressions verticales régulières dirigées dans les deux sens, s'exerce sur le tourillon une force latérale, à action continue. Avec un palier ordinaire, cette force, agissant dans la direction même des joints des coussinets, entraînerait une usure très-inégale pour les différents points, tandis que, dans la disposition actuelle, cet effet fâcheux se trouve empêché par l'addition du petit coussinet latéral. Ce type de palier est d'un emploi avantageux pour les petites locomobiles, dont la force est transmise par une courroie horizontale.

§ 130.

Palier à fourchette.

La fig. 332 donne le tracé d'un palier à fourchette, qui convient surtout, comme support intermédiaire, pour les arbres verticaux. Le patin de ce palier est disposé perpendiculairement

Fig. 332.



au plan moyen de la rainure des coussinets et est symétrique par rapport à ce plan. Le chapeau est fortement serré sur le corps du palier par les boulons; lorsqu'on veut enlever les coussinets, il n'est pas nécessaire de toucher à ce chapeau; il suffit de sortir les vis latérales de pression, de telle sorte qu'on n'ait plus qu'à faire glisser les coussinets par côté, pour les enlever ensuite sans difficulté. Les boulons du chapeau portent une tête intermédiaire noyée, en partie dans le chapeau, en partie dans le corps du palier; grâce à cette disposition, que nous avons déjà indiquée précédemment (§ 124), ces boulons servent en même temps à fixer le palier sur sa surface d'appui. Avec les dimensions proportionnelles indiquées sur la figure, on peut utiliser,

pour ce palier, la plaque de fixation correspondant au palier horizontal qui aurait même diamètre de tourillon (1).

§ 131.

Table des poids des paliers à fourchette.

d	d_1	Corps du palier.	Chapeau du palier.	Boulons du chapeau 2 Pi.	Vis de pression 2 Pi.	Coussinets $l = {}^4/_3\, d$.
27 — 30	45	0,95	0,61	0,17	0,05	0,51
33 — 37	53	1,55	1,00	0,25	0,07	0,67
40 — 45	62	2,50	1,60	0,35	0,10	0,87
50 — 55	73	4,08	2,61	0,49	0,14	1,56
60 — 65	85	6,44	4,12	0,71	0,22	2,31
70 — 75	96	9,28	5,93	1,03	0,32	3,57
80 — 85	108	11,71	7,49	1,46	0,46	4,25
90 — 95	119	15,34	9,81	1,81	0,60	5,46
100 — 105	131	20,80	13,30	2,38	0,79	6,80
110 — 115	142	26,06	16,67	2,80	0,95	9,26
120 — 130	160	37,29	23,84	4,32	1,49	12,91
140 — 150	183	55,79	35,67	5,65	1,98	17,59
160 — 170	206	79,58	50,88	8,40	3,00	21,57
180 — 190	229	109,32	69,90	10,85	3,94	26,27
200	240	125,84	80,46	12,56	4,63	33,94

Remarque. Le poids des boulons comprend un écrou avec sa rondelle pour la partie en arrière du patin, ainsi qu'une contre-plaque, dont l'épaisseur est égale à 0,22 d_1.

Exemple. On a à établir un palier à fourchette pour un arbre vertical de 95ᵐᵐ de diamètre. D'après la huitième ligne horizontale, le module à adopter, dans ce cas, a pour valeur $d_1 = 119^{mm}$; l'épaisseur à donner aux coussinets est $e = 3 + 0{,}07 \cdot 95$, soit 10^{mm}. Les poids des différentes parties du palier, fournis par la ligne 8, sont les suivants: corps et chapeau du palier $25^k{,}15$; coussinets $5^k{,}46$; boulons du chapeau et vis de pression (ensemble 4 pièces) $2^k{,}41$; ce qui donne, pour le poids total, $33^k{,}02$. Dans le cas où le palier devrait reposer sur une plaque de fixation (ce qui arri-

(1) Dans l'ouvrage anglais intitulé: *The Engineer and Maschinist's Assistant, 1854*, la pl. I contient le dessin d'un support intermédiaire du même genre que celui que nous venons de décrire; seulement le cadre en fonte forme une seule pièce et les vis de pression des coussinets traversent les joues de ce cadre, qui jouent ainsi le rôle d'écrous.

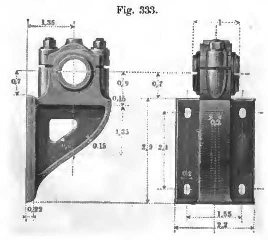
verait, par exemple, s'il devait être relié à une pièce de bois), le poids de cette plaque, déterminé par la table du § 122 (ligne 8), serait de 14k,40, et le poids total du palier se trouverait, par suite, porté à 47k,42.

§ 132.

Palier à fixation verticale.

Ce genre de palier, qui est représenté fig. 333, se déduit du palier horizontal, comme celui du § 124, et se construit de la même manière que ce dernier. La plaque de fixation est ici perpendiculaire au plan moyen des rainures des coussinets et parallèle à l'axe du tourillon, comme dans le palier à fourchette; mais, comme elle se trouve tout entière d'un même côté de cet axe, il en résulte que le corps du palier doit présenter la forme d'une console.

Fig. 333.



Pour ce palier, comme pour ceux des § 134 et 136, le chapeau est exactement le même que celui du palier horizontal de même diamètre de tourillon; il en est de même des coussinets, auxquels on peut, par suite, donner une longueur s'élevant jusqu'à $2d$.

Les boulons du chapeau sont filetés directement dans la fonte du corps du palier, ou maintenus par une clavette présentant une des dispositions des fig. 148 et 149, § 62. Les poids des paliers à fixation verticale sont indiqués au § 137.

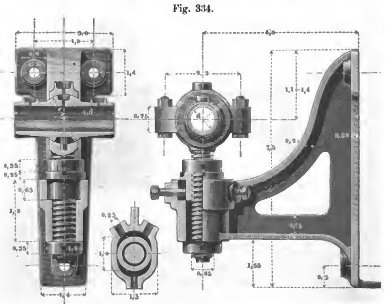
Dans les paliers établis pour de grands diamètres de tourillons, afin d'obtenir un aspect plus satisfaisant, l'échancrure, pratiquée dans la console, est renforcée par un rebord, dont l'épaisseur est $0,1\, d_1$ et la largeur $0,4\, d_1$, cette dernière mesurée parallèlement à la longueur du tourillon. La plaque de fixation est munie, du côté de l'assemblage, d'une portée, de $0,25\, d_1$ de largeur, qui règne sur tout son pourtour et qui présente une saillie de $0,03\, d_1$ sur le reste de la plaque.

§ 133.

Palier à potence avec coussinets sphériques.

Le palier à potence, que représente la fig. 334, porte ordinairement le nom de palier de Sellers, auquel on attribue la forme spéciale et le mode de support de l'enveloppe des coussinets. Nous devons faire remarquer toutefois que, sans connaître

Fig. 334.



la découverte de Sellers, et à la même époque que lui, l'ingénieur Zimmermann (1) avait adopté une disposition à peu près identique,

(1) Le palier, sur lequel a été relevée la figure, avait été construit dans l'usine de Geschwind et Zimmermann.

qui fut établie pour la première fois dans l'usine de Stehelin, à Thann, en Alsace; à une époque vraisemblablement antérieure, Schönherr avait déjà installé à Chemnitz des paliers d'une forme assez peu différente.

La disposition précédente pour les coussinets est également employée dans certains paliers de suspension (ou chaises), principalement pour les arbres moteurs, dans lesquels, comme on le sait, les tourillons ne doivent pas être considérés comme tourillons d'extrémités.

Afin de pouvoir construire les coussinets en fonte, on leur donne une très-grande longueur, qui correspond à quatre fois le diamètre du tourillon. Le grand développement de la surface de contact a, comme conséquence, une usure extrêmement faible, de telle sorte qu'il n'est pas nécessaire de prévoir le rapprochement des coussinets. Pour empêcher qu'ils ne se déplacent transversalement, l'un par rapport à l'autre, ces coussinets sont reliés par des languettes (qui n'ont pas pu être représentées sur la figure, en raison de son échelle).

La boite, qui enveloppe les coussinets, porte une vis en fonte à filets carrés, qui permet d'amener l'axe du tourillon à la hauteur qu'on juge convenable; cette boite peut également se déplacer légèrement dans le plan horizontal, ainsi que le montre la petite coupe, faite perpendiculairement à la vis. Comme, d'ailleurs, la forme sphérique de la boite permet à l'axe des coussinets de prendre constamment la direction qui lui convient, il en résulte que ce genre de palier présente de très-grandes facilités pour la pose des transmissions. Cette précieuse propriété, pour certaines applications, peut compenser, et au delà, l'exécution plus compliquée et, par suite, l'excédant de dépense qu'il exige par rapport au palier ordinaire; il est bien évident d'ailleurs que pour une usine, disposée pour fabriquer ces paliers d'une manière courante, les difficultés d'exécution se trouvent notablement réduites. A la partie inférieure de la vis, ou encore sur le pourtour de la douille qu'elle traverse, se trouve disposée une cuvette, destinée à recevoir l'huile d'égouttage; dans les paliers construits par Sellers, cette cuvette est en fonte, d'une épaisseur extrêmement faible; grâce aux réservoirs établis sur le coussinet supérieur et aux rainures pratiquées à l'intérieur du second coussinet, l'huile arrive, goutte par goutte, jusqu'aux extrémités du tourillon.

§ 134.

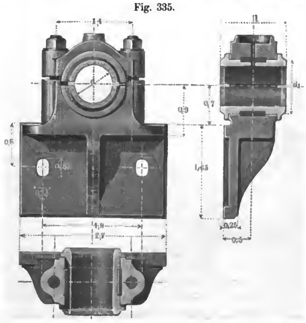
Paliers d'extrémités.

On désigne, sous ce nom, les paliers du genre de celui que représente la fig. 335 et dans lesquels la plaque de fixation est à la fois perpendiculaire à la séparation des coussinets et parallèle au plan qui limite d'un côté le tourillon, en supposant, bien entendu, qu'il s'agisse d'un tourillon d'extrémité.

Les boulons du chapeau ont leurs têtes encastrées dans la plaque horizontale, c'est-à-dire qu'on les introduit par la partie inférieure, ce qui permet de les placer et de les enlever avec la plus grande facilité.

Dans le cas où, comme sur la figure, on n'emploie que deux boulons pour la fixation de la plaque verticale, il est indispensable qu'elle soit maintenue latéralement par des cales et

Fig. 335.



qu'elle repose sur un appui, susceptible de s'opposer à son déplacement du haut vers le bas; c'est, du reste, ce qui a généralement lieu (v. le chapitre suivant). Dans le cas où ces deux

conditions ne pourraient pas être remplies, il conviendrait d'employer quatre boulons, ou au moins trois, pour assurer l'invariabilité de position de la plaque. Les poids des paliers, représentés par la fig. 335, se trouvent indiqués dans la table du § 137.

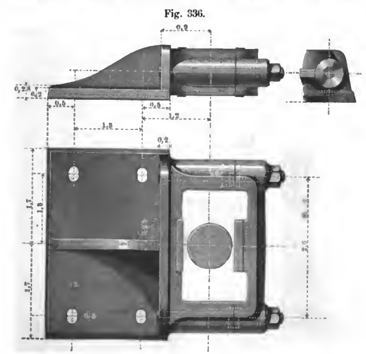
§ 135.

Autre forme de palier d'extrémité.

La fig. 336 indique une seconde forme de palier d'extrémité; cette forme, qui se déduit du palier à fourchette, est d'ailleurs beaucoup moins employée que la précédente. Les boulons du chapeau, qui portent une tête encastrée sur la semelle, sont munis d'une rondelle rapportée à la hauteur de la jonction du chapeau avec le corps.

En éloignant plus ou moins la plaque de fixation par rapport aux coussinets, on peut déduire des paliers verticaux que

Fig. 336.



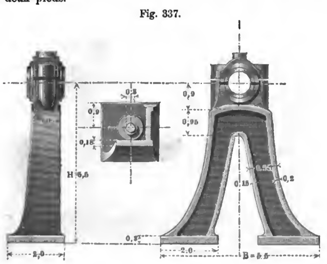
nous venons d'examiner une série d'autres formes, qu'on rencontre assez souvent en usage dans la pratique pour différents cas particuliers. Les divers modes de paliers que nous allons décrire peuvent fournir d'utiles indications pour les installations.

§ 136.

Palier à chevalet.

Le palier de la fig. 337, qui reproduit à peu près la disposition d'un chevalet, se déduit du palier horizontal de la fig. 319; la différence consiste en ce que, dans le palier actuel, la distance des coussinets à la base d'appui est notablement plus considérable que dans le second cas. Le chevalet présente d'ailleurs de nombreuses variétés de formes; le rapport de la hauteur à la longueur de la base d'appui est également très-variable. Dans le dispositif de la figure, la longueur totale de cette base a été prise égale à la hauteur du palier, de telle sorte que les extrémités de la semelle et le centre du tourillon forment les trois sommets d'un triangle équilatéral. Toutefois, sur la figure, le chevalet paraît relativement élancé, ce qui tient sans doute au rapprochement des deux parties qui constituent les deux pieds.

Fig. 337.



§ 137.

Table des poids des paliers verticaux, d'extrémités et à chevalets.*

d	d_1	Corps du palier.			Boulons du chapeau	
		a. Palier vertical.	b. Palier d'extrémité.	c. Palier à chevalet.	pour a.	pour b et c.
27—30	45	1,96	1,40	4,90	0,08	0,15
33—37	53	3,21	2,57	8,02	0,12	0,24
40—45	62	5,14	4,12	10,84	0,18	0.33
50—55	73	8,93	6,72	28,96	0,30	0,56
60—65	85	13,25	10,61	33,05	0,43	0,81
70—75	96	19,08	15,28	47,66	0,61	1,14
80—85	108	27,18	21,76	67,88	0,72	1,55
90—95	119	36,34	29,11	90,78	1,11	2,15
100—105	131	49,26	39,45	123,05	1,46	2,85
110—115	142	61,75	49,45	154,24	1,85	3,48

Cette table donne les poids des différents paliers représentés par les fig. 333, 335 et 337. Pour le chapeau et les coussinets de ces trois espèces de paliers, les poids sont contenus dans la table du § 126.

Exemple. Pour $d = 95^{mm}$ et $l = 142^{mm}$, d'après la huitième ligne de la table précédente et de celle du § 126, le poids d'un palier à plaque verticale, parallèle à l'axe du tourillon (y compris le chapeau, les coussinets et les boulons du chapeau), est de $36^k,34 + 6,25 + 4,93 + 1,11 = 48^k,63$; celui d'un palier d'extrémité, $29,11 + 6,25 + 4,93 + 2,15 = 42^k,44$, enfin celui d'un palier à chevalet, $90,78 + 6,25 + 4,93 + 2,15 = 104^k,14$.

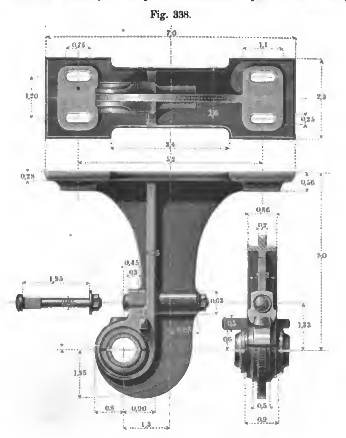
§ 138.

Paliers de suspension. Chaise à nervures.

Dans les chaises, la plaque de fixation se trouve au-dessus des coussinets et, le plus souvent, à une assez grande distance; elle est d'ailleurs parallèle au plan moyen des rainures. Par suite de la forme des parties qui constituent le corps, la chaise de la fig. 338 est généralement désignée sous le nom de chaise à nervures.

La partie inférieure, qui reçoit les coussinets, présente la forme d'un crochet; le chapeau est maintenu par une clavette,

Fig. 338.



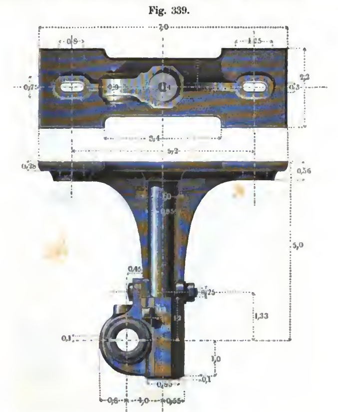
après avoir été amené dans la position qu'il doit occuper, au moyen d'un boulon de serrage horizontal. Pour les tourillons d'un diamètre inférieur à 50 mm, il suffit de fixer la plaque de chaque côté par un seul boulon, auquel on donne, dans ce cas, comme diamètre, 0,3 d_1 ; il convient alors de modifier la disposition des trous de boulons et d'adopter celle de la figure suivante. Les poids des chaises à nervures sont fournis par la table du § 141.

§ 139.

Chaise à colonne creuse.

La disposition générale de cette chaise est entièrement analogue à la précédente; la forme du chapeau et son mode de fixation sont rigoureusement les mêmes. La seule différence

Fig. 339.



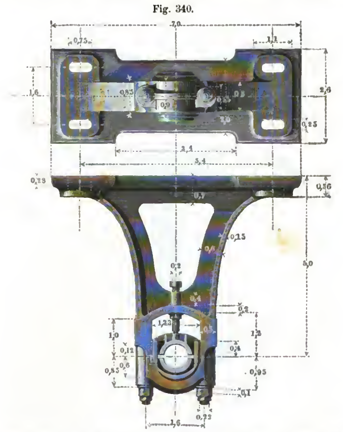
réside dans la forme du corps de la chaise. La colonnette, qui en constitue la partie principale, est creuse et son diamètre intérieur est égal à 0,55 d_1. Pour les tourillons d'un grand diamètre, le nombre des boulons de fixation doit être porté de deux à quatre, comme dans la fig. 338.

§ 140.

Chaise à fourchette.

Dans les deux dispositifs précédents, l'arbre ne peut être déplacé que latéralement, tandis qu'avec la chaise à fourchette, fig. 340, il ne peut être déplacé que verticalement, en enlevant

Fig. 340.



complètement la partie inférieure de cette chaise; il est également très-facile, dans ce cas, de visiter et d'enlever le coussinet supérieur. L'épaisseur à adopter pour la plaque verticale évidée est 0,15 d_1.

Pour les chaises qui doivent être fixées à un plancher, il est très-rare qu'on les applique directement sur les solives de ce plancher; on préfère, en général, les fixer sur des pièces de bois transversales (semelles), qui sont elles-mêmes reliées par des boulons aux solives du plancher. Comme on peut faire varier, entre des limites assez éloignées, la hauteur de la section de ces pièces, il en résulte qu'on a là un moyen très-simple de faire varier, entre les mêmes limites, la distance de l'axe des coussinets de la chaise à la surface du plancher: il est bien évident, d'ailleurs, que lorsqu'on ne peut pas arriver ainsi à obtenir la distance dont on a besoin, il convient de recourir à l'emploi d'une chaise de hauteur différente. Pour la construction de ces chaises, dans lesquelles la hauteur se trouve modifiée, on peut encore utiliser, sans inconvénient, les nombres proportionnels indiqués sur les figures et qui correspondent au cas normal.

Lorsque les chaises doivent être fixées à des planchers à l'abri du feu, c'est-à-dire formés de poutres en fer, réunies par de petites voûtes en briques, la plaque de fixation doit présenter une forme spéciale. L'emploi de boulons à crochets, fig. 341, constitue, dans ce cas, un mode de fixation très-convenable.



Fig. 341. Fig. 342.



Les boulons, qui sont au nombre de quatre (v. fig. 145, § 62), traversent des mamelons, venus de fonte avec la plaque de tête de la chaise; avec ce mode de fixation, on évite complètement tout affaiblissement de la poutre. Les saillies latérales de la plaque ont, en outre, l'avantage de permettre l'introduction de cales de réglage. Dans la disposition de la fig. 342, qui est due à Fairbairn, l'axe de la transmission est parallèle

à la poutre, au lieu de lui être perpendiculaire comme dans l'autre cas. La fixation de la chaise à la fois sur la poutre et sur la voute est, à la vérité, un peu plus compliquée et suppose l'extrados de la voute accessible, mais, par contre, elle offre une très-grande sécurité. La fixation s'opère d'ailleurs encore, dans ce cas, avec de simples boulons à crochets et des clavettes, de manière à éviter, pour la poutre, l'affaiblissement qu'entrainerait le percement de trous.

§ 141.

Table des poids des chaises à nervures, à colonne et à fourchette.

d	d_1	Corps de la chaise			Chapeau de la chaise		Boulons du chapeau	
		a. Chaise à nervures.	b. Chaise à colonne.	c. Chaise à fourchette.	pour a et b.	pour c.	p. a et b. 1 Pi.	pour c. 2 Pi.
27 — 30	45	4,85	4,75	4,54	0,59	0,75	0,15	0,24
33 — 37	53	7,94	7,78	7,26	0,89	1,14	0,23	0,38
40 — 45	62	12,70	12,45	11,88	1,37	1,80	0,36	0,51
50 — 55	73	20,72	20,31	19,39	2,17	2,87	0,57	0,86
60 — 65	85	32,71	32,06	30,61	3,37	4,47	0,88	1,24
70 — 75	96	47,13	46,19	44,09	4,81	6,40	1,25	1,73
80 — 85	108	67,12	65,78	62,80	6,81	9,07	1,82	2,44
90 — 95	119	89,76	87,96	83,98	9,08	11,81	2,34	3,24
100 — 105	131	121,67	119,24	113,84	12,27	16,36	3,56	3,28

B. Paliers d'appui.

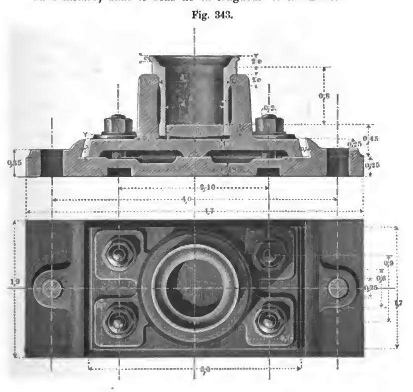
§ 142.

Crapaudine à patin horizontal.

La fig. 343 représente une disposition de crapaudine dont l'usage est très-répandu. La face inférieure de la plaque de fond est légèrement conique, de manière à pouvoir se régler exactement sur la position de l'extrémité du tourillon ou pivot. Afin de rendre possible le déplacement du palier sur la plaque qui le supporte, cette dernière a ses trous de boulons allongés

dans le sens de la largeur, tandis que ceux du patin le sont, au contraire, dans le sens de la longueur de la chaise.

Fig. 343.

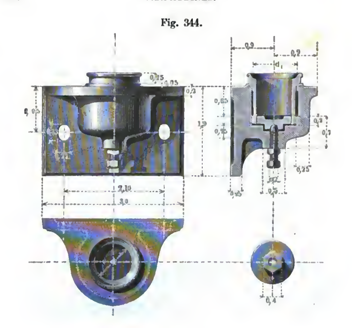


§ 143.

Crapaudine avec plaque de fixation verticale.

La crapaudine, que représente la fig. 344 et qui dérive directement de la précédente, se fixe latéralement; sa plaque de fixation doit, par suite, toujours reposer à la partie inférieure sur une cale, à laquelle on donne une hauteur de $0{,}8\,d_1$, afin de permettre de retirer facilement la crapaudine sans déplacer le tourillon. La plaque de fond est munie d'une petite cavité circulaire, qui peut être utilisée comme réservoir d'huile. La vis de réglage, qui agit sur cette plaque, permet de corriger facilement l'usure qui se produit sur la base du pivot.

Fig. 344.



§ 144.

Table des poids des crapaudines à patins horizontaux et verticaux.

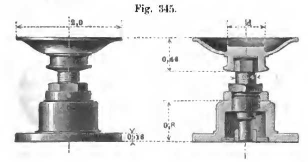
d	d_1	Corps de la crapaudine a. Fixation horizont.	Corps de la crapaudine b. Fixation verticale.	Plaque de fixation pour a.	Boulons de fixation pour a 4 Pi.	Boulons de fixation pour b 2 Pi.	Vis de réglage pour b.	Boite et plaque de fond.
27— 30	45	1,46	1,80	1,37	0,20	0,17	0,06	0,66
33— 37	53	2,39	2,95	2,24	0,42	0,26	0,14	1,02
40— 45	62	3,81	4,73	3,58	0,59	0,39	0,20	1,61
50— 55	73	6,23	7,73	5,85	0,98	0,57	0,32	2,46
60— 65	85	9,83	11,29	9,22	1,34	0,94	0,45	3,61
70— 75	96	14,16	17,56	13,29	2,04	1,29	0,67	5,32
80— 85	108	17,86	22,16	16,77	2,50	1,75	0,80	6,35
90— 95	119	23,41	29,04	21,97	3,46	2,34	1,15	8,57
100—105	131	31,74	39,36	29,79	4,95	3,03	1,65	11,28

§ 145.

Crapaudine à grain mobile.

Dans un certain nombre d'installations (surtout en Belgique), les paliers d'appui des arbres verticaux se trouvent remplacés par un palier guide et par une crapaudine proprement dite, qui sont simplement reliés tous les deux à la même plaque de fondation. Comme palier guide, on peut employer, soit un palier ordinaire à patin, soit un palier à fourchette, à la condition de disposer convenablement les rainures des coussinets. L'autre partie du support, qui, en réalité, se trouve être une crapaudine réduite à son grain, est disposée de manière à ce qu'elle puisse être visitée très-facilement et déplacée dans la direction où se produit l'usure. La fig. 345 fournit un exemple de ce genre de support, qui peut d'ailleurs recevoir un grand nombre de dispositions différentes.

Fig. 345.



La crapaudine est en bronze; elle repose, par l'intermédiaire d'une plaque en acier, sur une partie conique qui termine la vis destinée à produire le déplacement et enveloppe complètement la tête de cette vis, qui, par suite de sa forme prismatique, empêche tout mouvement de rotation de se produire. Un dispositif, analogue à celui de Penn (v. fig. 168, § 64), permet d'ailleurs de prévenir tout déplacement accidentel de la vis, en la reliant à son support, qui est fixé par des boulons à la plaque de fondation. Le module des nombres proportionnels, inscrits sur la figure, est ici encore le même que précédemment. Le § 150 renferme une application du mode de support que nous venons d'indiquer. Quant au palier guide, qui doit être employé concurremment avec la crapaudine précédente, sa disposition présente

une très-grande analogie avec le palier de Sellers, fig. 334; comme ce dernier, il est articulé et repose sur une vis, dont le support se termine par une plaque, percée de trous ovalisés pour le passage des boulons de fixation; il en résulte que ce palier peut recevoir un double mouvement de déplacement dans le sens vertical et dans le sens horizontal, de telle sorte qu'il présente, en réalité, au point de vue du réglage, les mêmes facilités que le palier de Sellers.

§ 146.

Paliers à cannelures.

Pour les tourillons à cannelures, on peut utiliser, comme supports, les différents corps de paliers que nous avons décrits. Dans ce cas, on peut se borner à donner aux rebords des coussinets, fig. 346, des dimensions légèrement supérieures et à renforcer le corps du palier, qui se trouve soumis à des efforts latéraux.

Fig. 346.

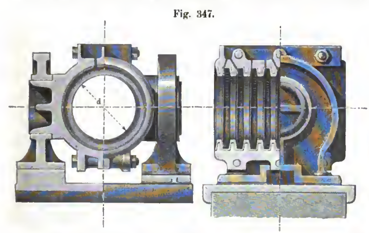
On rencontre, dans les turbines et dans les navires à hélices, un grand nombre de dispositions différentes de paliers à cannelures; comme ces organes sont tout-à-fait spéciaux à ces machines, nous pourrions, à la rigueur, les passer complétement sous silence; toutefois, en raison du développement que tend à prendre, de plus en plus, le palier à cannelures, nous croyons devoir indiquer ici au moins une des dispositions en usage. Le palier, que représente la fig. 347, est emprunté au mécanisme d'un grand navire à hélice.

Le corps du palier, qui est formé de deux parties symétriques, repose, par deux saillies tournées, sur un bâti, de forme spéciale, et présente, par suite, un certain degré de flexibilité (1),

(1) On peut se demander s'il n'y aurait pas lieu d'adopter, comme bâti du palier, un véritable croisillon articulé, afin d'empêcher la pression

qui est indispensable, en raison des déformations qu'éprouve le corps du navire lui-même (v. § 114). La matière employée pour former la garniture du palier à l'intérieur est le métal blanc. Pour obtenir un graissage suffisant, il faut avoir soin de ménager un trou débouchant à la partie supérieure de chaque rainure. Sur le bâti, qui reçoit les parties saillantes du palier, on installe généralement un petit treuil, destiné à produire le débrayage

Fig. 347.



d'un manchon, établi à une faible distance du palier et qui a été supprimé dans notre figure. Dans un vaisseau à hélice, on rencontre souvent deux paliers semblables à celui que nous venons de décrire, l'un presque immédiatement après le moteur, l'autre près de l'hélice.

§ 147.

Paliers composés.

Au point de croisement de deux ou de plusieurs arbres de transmission, il est souvent nécessaire d'établir plusieurs paliers sur une même plaque de fixation, afin d'assurer le mieux possible l'invariabilité de leurs positions relatives. Pour opérer une jonction de ce genre, dans le cas où les arbres ne sont qu'au

de se transmettre, dans certains cas, sur un seul côté des parties saillantes des cannelures et de prévenir ainsi l'usure très-rapide qui en est la conséquence.

nombre de deux, on peut employer, par exemple, deux paliers, à fixation verticale, dont les axes soient, pour l'un, parallèle et, pour l'autre, perpendiculaire à la plaque de fixation; ces deux formes de paliers se combinent facilement pour donner un palier double d'une seule pièce. On peut encore recourir à l'emploi de chaises à colonnes, ou même de chaises à nervures, bien qu'avec cette dernière forme la réunion de deux chaises sur la même plaque s'effectue moins facilement qu'avec le type à colonne.

IX. Bâtis de paliers.

§ 148.

Généralités sur les bâtis de paliers.

Les bâtis de paliers sont destinés à assurer à un ou plusieurs paliers une position parfaitement déterminée par rapport aux autres parties de la construction ou par rapport aux bâtis de machines. Nous ne nous occuperons ici que des bâtis en fonte, cette matière étant d'ailleurs presque exclusivement employée pour les pièces de cette espèce. On désigne, sous le nom de bâtis simples, ceux qui sont destinés à porter un palier unique, tandis que ceux qui doivent recevoir plusieurs paliers constituent les bâtis composés. Pour le tracé de ces deux genres de bâtis, il convient, en général, d'observer plus ou moins exactement les conditions suivantes, qui sont dues principalement à ce que, dans le voisinage immédiat de ces bâtis, les arbres de transmission portent presque toujours des roues d'engrenages.

1°. La distance entre les roues dentées et les supports des arbres ne doit pas être trop considérable.

2°. Dans aucun cas, la direction de la pression, transmise par le tourillon, ne doit coïncider avec le plan moyen des rainures des coussinets.

3°. Autant que possible, et principalement lorsqu'il s'agit d'arbres très-lourds et d'un accès difficile, les paliers doivent être disposés de manière à ce qu'on puisse enlever les coussinets, sans être obligé de déplacer les arbres.

4°. Les bâtis de paliers doivent être disposés de manière à gêner le moins possiblel a pose ou l'enlèvement des arbres, munis de leurs roues d'engrenages.

5°. En même temps qu'on doit chercher à réduire au minimum le nombre des surfaces du bâti qui doivent être travaillées, on doit également disposer, autant que possible, les portées, de manière à ce qu'on puisse les dresser toutes, en ne plaçant qu'une seule fois le bâti sur la machine à raboter.

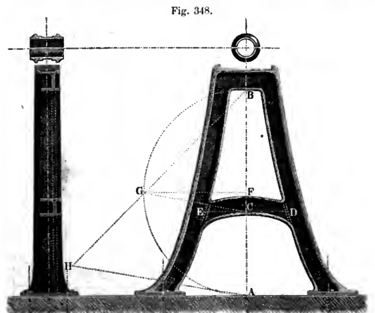
Nous allons montrer, par quelques exemples, comment on peut arriver à remplir ces différentes conditions.

§ 149.

Bâti simple.

La fig. 348 représente un bâti pour palier horizontal, disposé comme celui du § 124, c'est-à-dire dont la semelle n'offre pas de saillies sur le corps du palier lui-même; ce qui permet de réduire la largeur du bâti à la partie supérieure. Les deux pièces inclinées, qui constituent la partie principale de ce bâti sont

Fig. 348.



réunies par une pièce transversale DE, qui a pour but d'augmenter leur résistance à la rupture par compression. La position

la plus convenable à donner aux points de rencontre D et E de cette traverse avec les deux autres pièces se détermine par le procédé suivant. Sur la ligne AB, qui représente la hauteur de ces pièces, on décrit un demi-cercle AGB, dont le centre est en F, on prend le milieu G de cet arc et on mène BG, qu'on prolonge d'une quantité $GH = AF$; si on joint le point H au point A et si on mène GC parallèle à HA, la ligne AC représente la hauteur des points D et E au-dessus de la base d'appui du bâti. Les dimensions des différentes parties de ce bâti dépendent de la valeur de la pression transmise par le tourillon au palier et peuvent se déterminer au sentiment, d'après les dimensions du palier lui-même. Si l'on veut que, dans le bâti actuel, la condition 3 soit satisfaite, il suffit d'intercaler, entre le palier et le bâti, une plaque à rainure, qu'on puisse retirer laté-

Fig. 349.

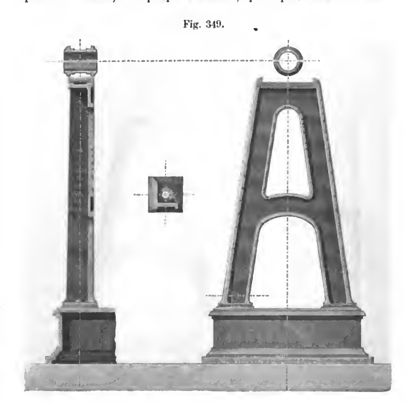




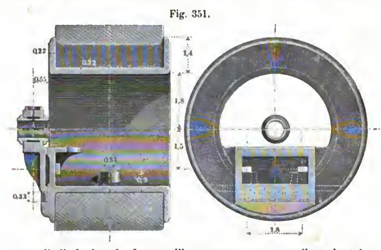
Fig. 350.

ralement; on donne à cette plaque une épaisseur égale à 0,3 d_1, en désignant par d_1 le module du palier.

La fig. 349 donne une forme de bâti plus simple que la précédente et qui convient surtout pour les installations d'une certaine importance. Dans certains cas, le bâti doit affecter une forme purement architectonique, afin de produire un effet satisfaisant; un exemple de ce genre de bâti est donné par la fig. 350, qui représente un bâti appartenant au style gothique.

La fig. 351 représente un bâti de palier encastré dans un mur. Ce bâti garnit entièrement l'ouverture du mur, destinée au passage de l'arbre que doit supporter le palier et dont la forme est celle de ce genre de fenêtre, qu'on désigne sous le

Fig. 351.

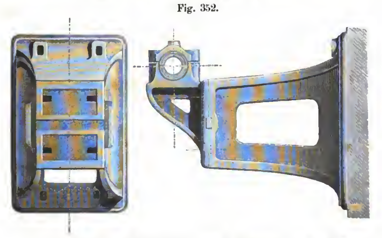


nom d'œil de bœuf. Le tourillon repose sur un palier, dont la plaque de fixation, qui est verticale, s'appuie à la partie inférieure sur une cale d'une certaine hauteur, qu'il suffit de chasser, pour arriver à enlever le palier, sans avoir à déplacer la transmission. A la partie inférieure, se trouve une plaque horizontale (tracée en pointillé), tangente au cylindre qui traverse le mur. Les nombres proportionnels, inscrits sur la figure, se rapportent au module d_1 du palier.

La fig. 352 représente un bâti de palier, fixé contre un mur. Dans ce dispositif, la cale de la figure précédente se trouve remplacée par une clavette à faces parallèles, encastrée à la fois dans la plaque du palier et dans la plaque du bâti; cette cla-

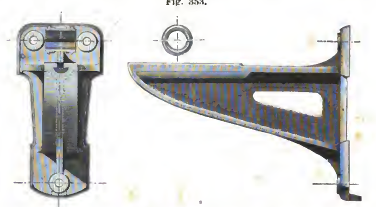
vette, qui peut être chassée très-facilement, permet, par suite, d'enlever le palier, sans toucher à l'arbre (v. § 143). Une portée, ménagée sur l'autre plaque du bâti, facilite la fixation contre le mur.

Fig. 352.



Un bâti, du même genre que le précédent, mais beaucoup plus léger, se trouve représenté par la fig. 353. Dans ce cas,

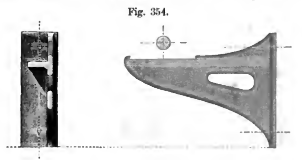
Fig. 353.



la plaque du palier est horizontale et celle du bâti est munie de rainures pour le passage des boulons de fixation, de telle sorte qu'on puisse faire varier, dans une certaine mesure, la distance de l'axe du palier au mur. Le même modèle de bâti peut être utilisé pour des paliers de grandeurs différentes.

La fig. 354 représente un bâti, plus léger et plus simple que le précédent; ce bâti ne peut guère être employé que pour les paliers d'arbres de transmission d'une faible importance.

Fig. 354.



Comme bâti de palier se fixant contre un mur, on peut, à la rigueur, comprendre le dispositif de Sellers, fig. 344. Le corps du palier, avec sa vis et les trois portions d'écrous, constitue, dans ce cas, le palier proprement dit; la plaque de fixation, qu'on rencontre dans les autres bâtis, se trouve remplacée par la douille avec ses vis de réglage.

Pour fixer convenablement les bâtis de paliers contre des murs ou sur des massifs de fondation, on a souvent recours à l'emploi du ciment. A cet effet, on commence par placer le bâti, aussi exactement que possible, dans la position qu'il doit avoir définitivement et on le cale avec le plus grand soin; cela fait, on garnit, avec de l'argile, le pourtour du vide qui existe entre la surface de la maçonnerie et la plaque de fixation, puis on remplit ce vide à l'intérieur avec du ciment très-fluide; au bout de quelques jours, ce ciment présente une dureté suffisante, pour permettre d'enlever les cales et de serrer complètement les boulons.

§ 150.

Bâtis de paliers composés.

Fig. 355. *Bâti de paliers reposant sur des poutres.* L'arbre vertical AB, qui est commandé, à la partie inférieure, par le moteur, une turbine, par exemple, doit transmettre son mouvement à un arbre horizontal CD. La direction de la pression du tourillon, en E, est perpendiculaire au plan des deux arbres, tandis qu'en F elle est inclinée sur ce plan, attendu que, pour

ce tourillon, la pression est la résultante de la pression des dents des roues et du poids de l'arbre horizontal, en y comprenant la roue qu'il porte. Ces directions des efforts conduisent à prendre, pour le tourillon E, un palier à fourchette (§ 130) et, pour le tourillon F, un palier d'extrémité (§ 134), dont la plaque repose sur une cale, interposée entre elle et la saillie du bâti.

Fig. 355.

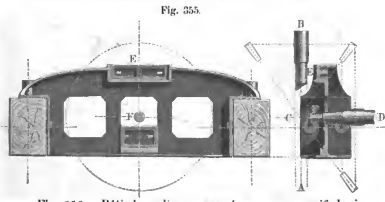
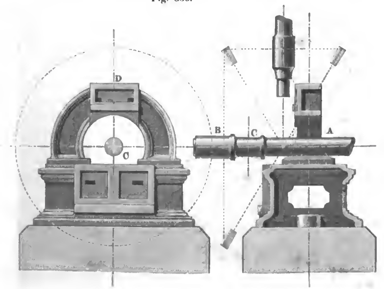


Fig. 356. *Bâti de paliers reposant sur un massif horizontal.* Un arbre horizontal AB, qui est supporté, en C, par un

Fig. 356.



palier d'extrémité, met en mouvement, par l'intermédiaire de deux roues coniques, un arbre vertical *D*, supporté par une crapaudine à plaque de fixation latérale (v. § 143). Cette crapaudine peut être retirée très-facilement par la partie inférieure, en chassant une clavette horizontale qui, comme celle de la

Fig. 357.



fig. 352, se trouve engagée à moitié dans la plaque de la crapaudine et dans celle du bâti sur laquelle elle s'applique. Le support recourbé, qui reçoit cette crapaudine, est fixé par des boulons sur la bâti inférieur, qui présente la forme d'une caisse. Les boulons de fixation de ce dernier bâti sont des boulons à ancre, dont les écrous se trouvent à l'intérieur de la caisse.

La fig. 357 fournit une autre solution du problème précédent. Dans ce cas, l'arbre AC, qui porte une grande roue dentée, se termine par un tourillon, reposant sur un palier, établi à l'arrière du bâti; cette disposition permet d'employer un palier plus petit que celui qui, dans le bâti précédent, se trouvait en C; mais, par contre, la roue elle-même n'est plus aussi facilement abordable que dans cette première solution, où elle se trouvait en porte-à-faux. Quant à l'arbre vertical DEF, il est établi d'après les principes indiqués au § 145, c'est-à-dire qu'il est maintenu, en E, par un palier à fourchette, venu de fonte avec la partie supérieure du bâti, tandis qu'il repose, à la partie inférieure, sur une crapaudine à grain mobile, analogue à celle de la fig. 345. La partie antérieure de l'entablement du bâti présente la forme d'une couronne circulaire, sur laquelle peut se fixer un couvre-roue, destiné à protéger les ouvriers contre les dangers de l'engrenage et qui est représenté en pointillé. Quatre boulons à ancre servent à fixer la plaque inférieure du bâti sur un massif en pierre de taille, ou un socle en briques avec mortier de ciment. Les deux boulons de l'arrière traversent les deux colonnettes et servent, par suite, en même temps à relier les deux parties du bâti. La figure indique suffisamment le mode d'assemblage de ces colonnes avec l'entablement; à l'autre extrémité, elles pénètrent, d'une certaine quantité, dans la plaque de fondation, qui, à cet effet, est disposée comme le montre la fig. 358; afin de prévenir tout déplacement dans le sens horizontal, le vide existant entre les faces de la cavité de la plaque et celles des colonnes est rempli avec du mastic de fonte. Une saillie rectangulaire, dont la hauteur est la même que celle des plinthes des colonnes, est destinée à recevoir la crapaudine à grain mobile.

Fig. 358.

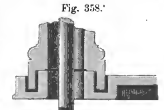


Fig. 359. *Bâti horizontal* pour deux arbres verticaux *A* et *B*, qui se commandent par l'intermédiaire de roues droites. L'arbre *A* peut être considéré comme recevant directement l'action d'une turbine (1), tandis que l'arbre *B* appartient à la transmission principale. Le tourillon *A* est soutenu par un palier, dont la disposition est analogue à celle de la fig. 336; l'arbre *B* repose sur une crapaudine dont le patin est muni de rainures, de telle sorte qu'en soulevant l'arbre (ce qui est facile en étayant la roue correspondante), on puisse enlever cette crapaudine sans difficulté et visiter ses différentes parties.

Fig. 359.

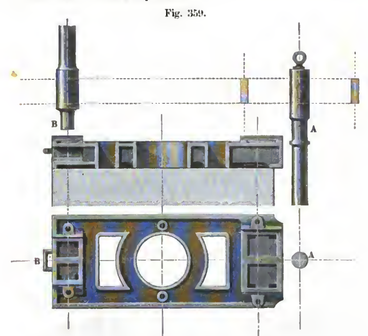
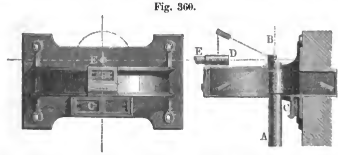


Fig. 360. *Bâti fixé contre un mur*, pour un arbre vertical *AB*, qui doit transmettre une partie du travail qu'il reçoit à un arbre horizontal *DE*, dont l'axe est normal à la surface du mur. En *C*, se trouve installé un palier à fourchette et, en *E*, un palier

(1) Dans une filature de Chur, il existe un bâti de cette espèce pour une roue tangentielle; le bâti et la moitié de la grande roue sont logés dans une ouverture ménagée dans le grand mur de pignon du bâtiment de la filature.

disposé comme celui de la fig. 335. La roue conique horizontale est entourée par le cadre du bâti, qui, en coupe, présente la forme

Fig. 360.

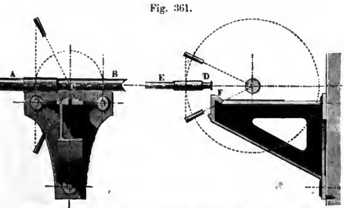


d'un demi-cercle; ce cadre recouvre également en partie le second engrenage, de telle sorte que le bâti dont il s'agit se trouve être utilisé, en même temps, comme couvre-roue.

Dans ce dispositif, l'enlèvement de l'arbre vertical ne peut pas s'effectuer aussi commodément que dans certaines autres dispositions de bâtis; toutefois, il ne peut pas être considéré comme présentant des difficultés très-sérieuses. Dans quelques cas, on arrive à fermer entièrement le bâti, à la partie inférieure, et à entourer l'arbre vertical d'une enveloppe, qui présente la forme d'une demi-colonne et qui met à l'abri de tout danger.

Lorsqu'un arbre horizontal AB, parallèle à un mur, doit transmettre une partie du travail qu'il reçoit à un autre arbre

Fig. 361.



DE, normal au même mur, on peut employer la disposition suivante, pour le bâti destiné à le porter. Le palier du premier

arbre, en C, est un palier à semelle horizontale, tandis que celui du second, en F, est à fixation verticale. La distance de l'axe du palier C au mur peut varier, dans une certaine mesure, comme nous l'avons déjà indiqué pour un cas analogue (v. fig. 353). Lorsque les deux roues d'engrenage sont du même diamètre, il convient de recourir, pour le bâti, à la disposition donnée par fig. 362. Dans ce cas l'arbre AB est supporté, en C, par un palier à plaque de fixation verticale. Lorsque la transmission du mouvement s'effectue à l'extrémité de l'arbre, à un angle de bâtiment, la disposition à adopter est celle de la fig. 363; les paliers, en G et H, sont alors tous les deux d'égale grandeur.

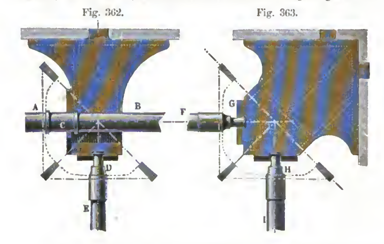


Fig. 362. Fig. 363.

Les figures 364 et 365 représentent les deux bâtis précédents en perspective cavalière.

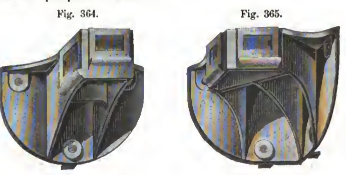
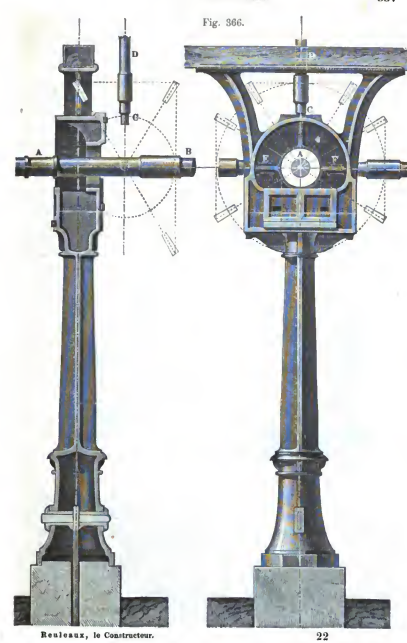

Fig. 364. Fig. 365.

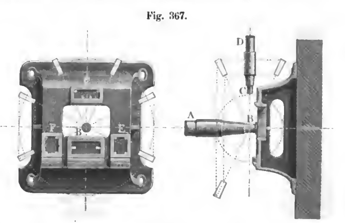
Fig. 366.



Il arrive assez souvent que, dans une usine, on ait à commander différents arbres transversaux par une transmission horizontale, établie au milieu du bâtiment, à une faible distance au-dessous du plancher. La fig. 366 représente un type de bâti qu'on peut utiliser dans les cas de ce genre. Grâce à la colonne qui le supporte, ce bâti peut se raccorder facilement avec le style de la construction d'un grand atelier. La disposition des différents paliers est très-simple; celui de A est le palier du § 134, ceux de E et F sont donnés par le type du § 132, et enfin la crapaudine en C est analogue à celle du § 143.

Fig. 367. *Bâti pour quatre paliers fixé contre un mur.* Un arbre horizontal AB fait mouvoir, par l'intermédiaire de roues coniques, l'arbre vertical CD et les deux arbres horizontaux E et F. Les différents supports sont analogues aux précédents et correspondent respectivement, celui de B au § 134,

Fig. 367.



celui de C (crapaudine) au § 143 et enfin ceux de E et F au § 132. Les portées, ménagées pour la fixation des différents supports, se trouvent toutes dans un seul et même plan, ce qui suppose qu'on ait déterminé convenablement les diamètres des tourillons, de manière à ce qu'il existe aux divers points un jeu suffisant. Ainsi, malgré le nombre relativement élevé des paliers, cette forme de bâti, qui satisfait à toutes les conditions du § 148, fournit une solution aussi simple qu'on peut le désirer.

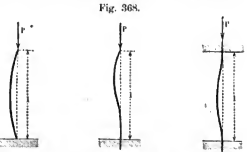
§ 151.

Calcul des colonnes métalliques.

Le constructeur de machines a fréquemment à traiter les questions de calcul et d'exécution des colonnes métalliques, lors même qu'elles ne doivent être employées que dans la construction de bâtiments proprement dite, ou qu'elles n'ont avec les machines que des relations assez éloignées; souvent d'ailleurs les colonnes entrent dans la composition des bâtis de machines ou sont employées directement comme supports de paliers. Pour ces divers motifs, l'étude de leur construction trouve ici sa place naturelle.

Les colonnes métalliques se calculent ordinairement comme les pièces chargées debout et ce n'est que dans quelques cas limites qu'on peut les considérer comme soumises uniquement à des efforts de compression. Le premier mode de calcul comporte une assez grande indétermination, par suite de l'incertitude sur le mode de fixation des extrémités de la pièce. Dans les trois dispositions, représentées ci-après, et qui correspondent aux cas n°s II, III et IV du § 16, la première suppose la colonne articulée à ses deux extrémités, la seconde une extrémité seulement articulée et enfin la troisième les deux extrémités encastrées.

Fig. 368.



Les charges, capables de déterminer la rupture, sont respectivement, pour ces différentes hypothèses:

a.	b.	c.
$\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	$2\pi^2 \frac{JE}{l^2}$	$4\pi^2 \frac{JE}{l^2}$

expressions dans lesquelles l désigne la hauteur de la pièce, supposée prismatique, J le moment d'inertie de sa section trans-

versale et E le coefficient d'élasticité de la matière dont elle est formée. Ainsi que nous l'avons déjà fait observer au § 16, les expériences ont montré qu'une colonne verticale, terminée par des bases d'appui simplement dressées, se comporte à peu près comme la pièce c, c'est-à-dire comme si elle était encastrée à la hauteur de ces bases. En admettant une charge plus faible que celle qui correspond au cas a, on obtient, par conséquent, une sécurité suffisante dans tous les cas (1), même dans celui où les deux extrémités devraient être considérées comme simplement articulées dans une certaine mesure. Nous pouvons admettre, par suite, pour valeur de la charge P, qu'on peut exercer sur une colonne, dans la direction de son axe:

$$P = 0{,}4\,\pi^2 \frac{JE}{l^2} = 3{,}94\,\frac{JE}{l^2} \quad \ldots \quad (117).$$

Dans le cas où la section est un cercle plein, de diamètre d, cette expression donne avec la fonte, pour laquelle $E = 10000$:

$$P = 1937\,\frac{d^4}{l^2} \text{ ou } 1900\,\frac{d^4}{l^2},\ d = 0{,}15\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P}\,. \quad (118).$$

Pour le fer forgé, $E = 20000$; on a alors:

$$P = 3800\,\frac{d^4}{l^2},\ d = 0{,}13\sqrt{l}\,\sqrt[4]{P} \quad \ldots \quad (119).$$

1er Exemple. Pour une charge $P = 15000$, une colonne pleine en fonte, d'une hauteur $l = 4^m$, doit avoir, pour diamètre, $d = 0{,}15\sqrt{4000}\,\sqrt[4]{15000}$, ou 105^{mm}. Avec le fer forgé, on aurait $d = 91^{mm}$.

La valeur de d est d'autant plus faible que la longueur l de la colonne est elle-même plus petite; toutefois, la section doit toujours conserver une valeur assez grande pour que la compression produite soit inférieure à la limite correspondant à ce genre de résistance. Pour que la pression dans cette section ne dépasse pas 6^k, limite qu'on peut admettre pour le fer comme pour la fonte, il faut que la valeur de d, dans les deux cas, ne soit pas inférieure à la limite:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0{,}46\sqrt{P} \\ P = 4{,}71\,d^2 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (120)\ (2).$$

ce qui donne, pour la limite de la charge:

(1) Dans de nombreuses expériences sur des colonnes en fonte, soumises à la charge $\pi^2 \frac{JE}{l^2}$, Drewitz n'a jamais pu constater la plus légère déformation. Erbkam's Bauzeitung, p. 534.

(2) Au point de vue de la charge, cette formule correspond à la même sécurité que celle que présentent les formules (118) et 119) par rapport à

C'est à ces dernières formules qu'on doit recourir, lorsque les premières fournissent pour d une valeur supérieure à $\frac{l}{23}$, dans le cas de la fonte, ou à $\frac{l}{32}$, dans le cas du fer forgé(1).

Les formules (118) et (119) ont servi à calculer la table suivante, qui se rapporte aux colonnes en fonte, à section circulaire pleine. La première ligne verticale contient les diamètres et la première ligne horizontale les hauteurs; les nombres de la table sont les valeurs correspondantes des charges, exprimées en kilogrammes.

Table pour le calcul des colonnes en fonte pleines.

d	h =					
	2000	3000	4000	5000	6000	7000
30	392	174	98	62	43	32
35	726	322	182	116	81	59
40	1240	530	310	198	138	102
45	1986	883	496	318	220	162
50	3027	1350	760	487	338	248
60	6278	2802	1576	1009	701	514
70	11674	5170	2906	1861	1294	942
80	19850	8791	4960	3174	2209	1618
90	31782	14125	7944	5022	3531	2607
100	*74120	21488	12110	7750	5403	3962
120	*67853	44642	25111	16071	11161	8222
140	*92355	81100	46521	29774	20718	15190
160	*120627	*120627	79364	50793	35328	25955
180	*152669	*152669	127176	81361	49215	41536
200	*188480	*188480	*188480	124006	86235	63180

l'expression a; dans ces dernières, en effet, on a introduit le coefficient 0,4, et dans la formule (120) on a pris, pour la pression, 6^k, c'est-à-dire 0,4 de la pression correspondant à la charge limite, qui est de 15 kil.

(1) Plus exactement $\frac{l}{22,67}$ et $\frac{l}{32,06}$. Les rapports limites du diamètre à la hauteur diffèrent de ceux qui ont été indiqués au § 16 pour les divers cas examinés; cette discordance s'explique naturellement: dans les applications du § 16, en effet, le mode de fixation de la pièce était exactement connu, ou du moins considéré comme connu; de plus, on admettait la même sécurité contre la rupture par flexion et par compression.

Les nombres, qui, dans les colonnes 2, 3 et 4, sont marqués d'un astérisque, ont été calculés au moyen de la formule (120). Les charges qu'ils indiquent et qui sont celles qu'on doit admettre se trouvent notablement réduites par rapport à celles que donnerait l'autre formule. Ainsi, par exemple, d'après la formule (118), pour $d = 180$ et $l = 2000$, on aurait $P = \frac{1900 \cdot 180^4}{2000^2} = 498636^k$, valeur qui est plus que le triple de celle que donne la table. En admettant pour la charge la valeur précédente de P, la pression dans la section se rapprocherait de 20^k par millimètre carré, c'est-à-dire qu'elle serait supérieure à la pression correspondant à la limite d'élasticité.

Colonnes creuses. Les colonnes en fonte sont généralement creuses. Leurs dimensions peuvent se déterminer facilement, au moyen de celles des colonnes pleines équivalentes. En désignant par d_1 et d_0 les diamètres intérieur et extérieur de la colonne creuse et par d le diamètre de la colonne pleine, on doit prendre:

Fig. 369.

$$\frac{d_0}{d} = \frac{1}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^4}} \quad \ldots\ldots \quad (121).$$

Le rapport $\frac{d_1}{d_0}$ varie assez souvent de 0,7 à 0,8.

Pour

$\frac{d_1}{d_0}$ = 0,5 0,6 0,7 0,75 0,8 0,85 0,9 0,95,

la formule précédente donne:

$\frac{d_0}{d}$ = 1,016 1,035 1,07 1,10 1,14 1,20 1,31 1,52.

La limite d'emploi de la formule, établie en tenant compte de la résistance spéciale aux pièces chargées debout, n'est plus ici tout-à-fait la même que celle trouvée précédemment, mais elle s'en rapproche beaucoup. Le diamètre d_0 ne doit jamais être inférieur à:

$$d_0 = \frac{0{,}46\sqrt{P}}{\sqrt[4]{1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2}}$$

ou la charge supérieure à:

$$P = 4{,}71\, d_0{}^2 \left[1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots \quad (122).$$

Pour

$$\frac{d_1}{d_0} = 0{,}5 \quad 0{,}6 \quad 0{,}7 \quad 0{,}75 \quad 0{,}8 \quad 0{,}85 \quad 0{,}9 \quad 0{,}95,$$

on a:

$$1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2 = 0{,}75 \quad 0{,}64 \quad 0{,}51 \quad 0{,}44 \quad 0{,}36 \quad 0{,}28 \quad 0{,}19 \quad 0{,}10$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{d_1}{d_0}\right)^2}} = 1{,}15 \quad 1{,}25 \quad 1{,}40 \quad 1{,}51 \quad 1{,}67 \quad 1{,}89 \quad 2{,}29 \quad 3{,}20.$$

2°. Exemple. Pour une charge de 15000^k, une colonne pleine doit avoir, comme nous l'avons trouvé, un diamètre de 105^{mm}; une colonne creuse, soumise à la même charge, et dans laquelle le rapport du creux au diamètre serait 0,8, devrait avoir, pour diamètre extérieur, $d_0 = 1{,}14 \cdot 105 = 120^{mm}$ et, pour diamètre intérieur, $d_1 = 0{,}8 \cdot 120 = 96^{mm}$, c'est-à-dire que l'épaisseur de la paroi serait de 12^{mm}. Pour produire une pression de 6^k par unité de surface de la section, la charge, déterminée par la formule (122), devrait être $P = 4{,}71 \cdot 120^2 \cdot 0{,}36 = 24480^k$. Par conséquent, on peut admettre dimensions trouvées précédemment, si on regarde l'épaisseur de 12^{mm} comme suffisante pour une pièce qui doit être coulée. Si on prend $\frac{d_1}{d_0} = 0{,}7$, les valeurs correspondantes, $d_0 = 112^{mm}$ et $d_1 = 79^{mm}$, qui donnent pour l'épaisseur 16^{mm},5 sont également admissibles, en ayant égard à la formule (122).

Pour une colonne creuse, il est souvent avantageux de pouvoir se donner le diamètre extérieur d_0; le diamètre intérieur d_1 est alors déterminé, pour la fonte, par l'expression:

$$d_1 = d_0 \sqrt[4]{1 - 0{,}000516 \frac{Pl^2}{d_0^{\,4}}}$$

et la charge par la formule:

$$P = 1900 \, \frac{d_0^{\,4} - d_1^{\,4}}{l^2} \qquad \ldots \quad (123)$$

où P représente la différence des charges qui correspondent à deux colonnes pleines, de diamètres d_0 et d_1.

Dans ce cas, pour que la pression ne soit pas supérieure à 6^k, on doit veiller à ce que P ne dépasse pas la valeur:

$$P = 4{,}71\,(d_0^{\,2} - d_1^{\,2})$$

et que d_1 ne soit pas supérieur à:

$$d_1 = d_0 \sqrt{1 - 0{,}2122 \frac{P}{d_0^{\,2}}} \qquad \ldots \quad (124)$$

abstraction faite des conditions que doit remplir l'épaisseur, pour donner une pièce qui puisse être convenablement fondue.

3°. Exemple. Dans une caserne de Berlin, on avait à établir des colonnes creuses, d'une hauteur de 3600^{mm}*, destinées à supporter chacune une charge évaluée approximativement à* 16900^{k}*. On leur a donné, comme diamètre extérieur,* $d_0 = 157^{mm}$*. D'après la formule (123), leur diamètre intérieur* d_1 *aurait eu pour valeur:* $d_1 = 157 \sqrt[4]{1 - \frac{0{,}000516 \cdot 3600^2 \cdot 16900}{157^4}} = 157 \cdot 0{,}9499$ *ou* 149^{mm}*. D'après la formule (124), on devrait prendre, au plus:* $d_1 = 157 \sqrt{1 - \frac{0{,}2122 \cdot 16900}{157^2}} = 0{,}9244 \cdot 157$ *ou* 145^{mm}*. Avec cette dernière valeur, l'épaisseur n'eut été encore que de* 6^{mm}*; en la fixant empiriquement à* 15^{mm}*, on a* $d_1 = 127$*. On a pris, en réalité,* $d_1 = 124^{mm}$*.*

4°. Exemple. Une colonne en fonte, de 4700^{mm} *de hauteur et de* 235^{mm} *de diamètre extérieur, destinée à supporter une charge de* 125000^{k}*, a été exécutée creuse avec un diamètre intérieur de* 170^{mm}*. Si on applique à ces données la formule (123), on trouve* $d_1 = 235 \sqrt[4]{1 - \frac{0{,}000516 \cdot 125000 \cdot 4700^2}{235^4}} = 235 \cdot 0{,}8543$ *ou* 201^{mm}*; mais la formule (124) donne seulement:* $d_1 = 235 \sqrt{1 - \frac{0{,}2122 \cdot 125000}{235^2}} = 235 \cdot 0{,}721$ *ou* 169^{mm}*, c'est-à-dire presque exactement la dimension admise en exécution.*

On voit par les exemples qui précèdent, avec quel soin on doit examiner toutes les conditions, afin d'éviter les erreurs et d'arriver à une opinion motivée dans chaque cas particulier.

Fig. 370.

Colonnes à section en croix. La forme de section en croix, qui, comme nous l'avons vu, est employée avantageusement pour les arbres, convient également très-bien pour les colonnes. La hauteur h et l'épaisseur b des nervures peuvent, ici encore, se déduire, par une simple transformation de section, du diamètre d de la colonne cylindrique pleine équivalente; on arrive ainsi à la relation:

$$\frac{b}{d} = \frac{3\pi}{16}\left(\frac{d}{h}\right)^3 = 0{,}59\left(\frac{d}{h}\right)^3 \quad . \; . \; . \quad (125)$$

qui fournit, avec une approximation suffisante, la valeur de b, lorsqu'on se donne celle de h. Au point de vue de la résistance à la compression, on doit veiller à ce que la surface de la section ne descende pas au-dessous de la limite:

$$bh = \frac{P}{12}$$

ou que la charge ne soit pas supérieure à:

$$P = 12\,bh \quad . \; . \; . \; . \quad (126).$$

5°. Exemple. Pour transformer la colonne pleine du 1er exemple en colonne à section en croix, prenons $h = 1{,}5\,d = 1{,}5 \cdot 105 = 158^{mm}$*. La for-*

mule (125) donne alors: $b = \frac{105.0,59.8}{27}$ *ou* 18^{mm}. *En ayant égard simplement à la résistance à la compression* ($\mathfrak{S} = 6$), *la charge que cette colonne pourrait supporter serait:* $P = 12 \cdot 18 \cdot 158 = 34120^k$. *Notre point de départ est, par suite, parfaitement admissible.*

Si on veut calculer directement b et h, on a, pour la fonte:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{30}{10000\pi^2}\frac{Pl^2}{h^3} = 0{,}0003\,\frac{Pl^2}{h^3} \\ \text{et, par suite:}\quad P &= 3300\,\frac{bh^3}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (127).$$

Ici encore cette valeur de P, en raison de la résistance à la compression, ne doit jamais dépasser la limite donnée par l'expression (126).

6e Exemple. Dans la fabrique de sucre de Waghäusel, les divers planchers du bâtiment de la raffinerie sont supportés par des colonnes à section en croix, et celles de l'étage inférieur sont soumises chacune à une charge de 120000 kil. Leur hauteur est de 2^m *et les nervures ont, comme dimensions,* 50^{mm} *et* 360^{mm}. *A ces dimensions correspondrait, d'après la formule (127), une charge de* $3300 \cdot \frac{50 \cdot 360^3}{2000^2}$ *ou* 1890000^k; *d'après la formule (125), pour* $\mathfrak{S} = 6^k$, *cette charge ne serait plus que de* $12 \cdot 50 \cdot 360 = 216000^k$; *mais cette valeur est encore notablement supérieure à la charge donnée, de telle sorte que les colonnes présentent, en réalité, une très-grande force; la pression dans chaque section n'est que de* $\frac{120000}{2 \cdot 50 \cdot 360} = 3^k\,{}^1/_3$. *Sous l'action de la charge d'épreuve, qui était le double de la charge précédente, la pression produite n'a été que de* $6^k\,{}^2/_3$ *(1).*

Colonnes accouplées. On peut souvent se demander si, pour une charge très-considérable, il n'est pas trop désavantageux, au point de vue de l'économie de matière, d'employer deux ou plusieurs colonnes, au lieu d'une seule. En désignant par m le nombre de ces colonnes et en les supposant calculées au moyen des formules spéciales aux pièces chargées debout, on trouve pour le rapport des Volumes V_1 et V, dans l'hypothèse de sections géométriquement semblables:

$$V_1 = \sqrt{m}\,V \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (128).$$

(1) Ce bâtiment présente un type remarquable de planchers incombustibles. Les planchers des six étages inférieurs sont formés par des voûtes d'arêtes, tandis que les deux étages supérieurs sont recouverts de voûtes ordinaires à chape; toutes ces voûtes sont supportées par 500 colonnes à nervures. Tout l'espace intérieur, compris entre les murs, se trouve entièrement libre. V. Förster's Bauz. P. 93.

V_1 représentant le volume total des m colonnes et V celui de la colonne unique. On voit, par là, qu'au point de vue de l'emploi de la matière, il est avantageux, pour une charge donnée, d'établir le plus petit nombre possible de colonnes.

7°. Exemple. Si, pour supporter une charge de 1294^k, on choisit une colonne à section circulaire pleine, de 6^m de hauteur, cette colonne, d'après la table de la page 341, doit avoir une diamètre de 70^{mm}; en employant 4 colonnes de 50^{mm} de diamètre, la charge totale qu'elles pourraient supporter, d'après la même table, serait $4 \cdot 338 = 1352^k$, c'est-à-dire sensiblement la même que la précédente. Le rapport des volumes, qui est le même que celui des sections, est, dans ce cas, $4 \cdot 50^2 : 70^2$, c'est-à-dire 100:49 ou très-approximativement $\sqrt{4} : 1$.

La diminution de hauteur d'une colonne a une action assez marquée, au point de vue de l'économie de matière, puisque, d'après la formule (118), les sections de colonnes semblables, également chargées, sont directement proportionnelles aux hauteurs (l), en supposant, bien entendu, ces colonnes calculées en ayant égard à la résistance spéciale aux pièces chargées debout. Cette remarque peut justifier, dans quelques cas, la décomposition d'une colonne en plusieurs autres, lorsque cette opération a, en réalité, pour conséquence, une diminution de hauteur. C'est ce qui se produit, par exemple, pour la carcasse formée de trois barres de fer, fig. 371, que certains architectes établissent dans l'intérieur des piliers en briques et qui est plus avantageuse qu'une barre unique, puisque le rapport des volumes est ici $\frac{\sqrt{m}}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$.

Fig. 371.

Nous devons encore faire remarquer que les colonnes, employées dans les bâtis de machines, ont généralement des dimensions bien supérieures à celles que fourniraient les formules précédentes. Cette augmentation de matière s'explique assez naturellement par ce fait que les colonnes de cette nature se trouvent le plus souvent soumises à des efforts de flexion ou de traction et qu'elles sont, en même temps, exposées à des chocs ou à des vibrations. (1) Ainsi, en particulier, les colonnes en

(1) Dans les moulins, les colonnes, qui supportent les transmissions des meules, sont établies avec un coefficient de sécurité 5 à 6 fois plus grand que celui de nos formules; les vibrations ne permettent guère d'adopter des dimensions inférieures.

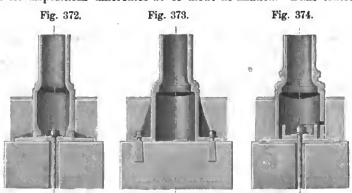
fonte, qui se trouvent soumises à des efforts de traction, comme les colonnes d'entablement des machines à vapeur verticales, doivent avoir, au moins, une section double de celle que donnerait une des formules (120), (122), (124) et (126). Dans les bâtiments même, ainsi que le montre le 6e exemple, on adopte souvent un coefficient de sécurité plus grand que celui que nous avons introduit dans nos formules; par contre, il n'est pas rare de trouver des colonnes soumises à des charges supérieures aux limites que nous avons indiquées.

§ 152.

Dispositions des colonnes métalliques.

Les colonnes, qu'on emploie comme pièces de bâtis de machines, peuvent être fixées directement, par des moyens connus, sur des plaques de fondation métalliques, ou encore, comme les colonnes de bâtiments, reposer sur un massif en maçonnerie ou en pierres de taille. Les colonnes de bâtiments, qui doivent être soumises à des charges considérables, reposent souvent sur un socle en pierre sans aucun mode de fixation; on se contente d'intercaler une plaque de plomb entre la base de la colonne et la surface de la pierre. Dans le cas où on veut obtenir une liaison présentant plus de sécurité, on réunit la colonne au socle par des boulons d'ancrage. Les figures suivantes représentent trois dispositions différentes de ce mode de fixation. Dans toutes

Fig. 372. Fig. 373. Fig. 374.



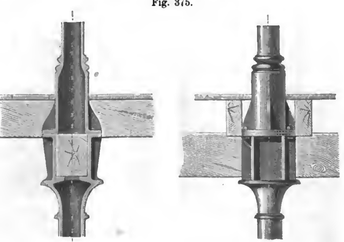
les trois la base d'appui de la colonne se trouve établie au-dessous du plancher. La base de la première colonne, fig. 372,

est encastrée dans une plaque de foudatiou, de forme spéciale, reliée par un boulon à un massif en briqnes; la deuxième colonne, fig. 373, se termine, à la partie inférieure, par un rebord qui sert à la fixer sur un massif en pierre de taille, au moyen de bonlons de scellement. Dans le troisième dispositif (Borsig), fig. 374, à l'intérieur du pied de la colonne se tronve placé un cylindre d'nne faible hauteur, dont la base, parfaitement dressée, s'applique sur la plaque de fondation et est reliée avec elle par un boulon qui traverse le massif; entre la surface intérieure de la colonne et ce cylindre existe un certain jeu, qu'on remplit avec dn plomb fondu, lorsque la position de la colonne se trouve parfaitement réglée; à cet effet, on ménage un petit trou de coulée dans le piédestal de cette colonne.

La partie du piédestal, qui dépasse le niveau du plancher, est plus ou moins ornementée, snivant le style adopté ponr la constructiou du bâtiment. Dans la fig. 372, il n'existe qn'nn simple filet cylindrique pour raccorder le corps de la colonne à la partie carrée du piédestal; dans la fig. 373, au filet vient s'ajouter un quart-de-rond; enfin la fig. 374 représente ce qu'on appelle une base attique avec deux quart-de-rond, réunis par des filets à une partie en retraite (Trochile).

Au point de vue de la construction, les chapiteaux des colonnes présentent des dispositions très-variées, suivant leur mode de jonctiou avec les autres parties.


Fig. 375.

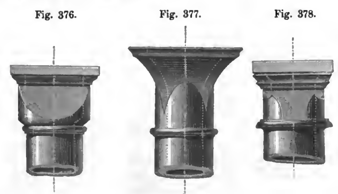


La fig. 375 représente, en coupe et en élévation latérale, le mode de liaison d'une tête de colonne avec une poutre en bois et la base d'une colonne de l'étage supérieur. Une boite en fonte, surmontant le chapiteau, enveloppe la poutre, qui souvent présente un joint à l'intérieur. L'emploi d'une poutre métallique permet de réduire notablement la largeur de cette boite. La colonne supérieure se fixe directement sur la boite, au moyen de boulons qui traversent les rebords.

Au point de vue du style, les chapiteaux peuvent recevoir une très-grande diversité de formes et ils offrent, par suite, des ressources qu'on n'utilise pas toujours comme elles mériteraient de l'être. L'architecture fournit, dans ce cas, une très-grande variété de modèles, qu'un choix judicieux permet d'utiliser, pour obtenir, même par des procédés très-simples, un aspect satisfaisant.

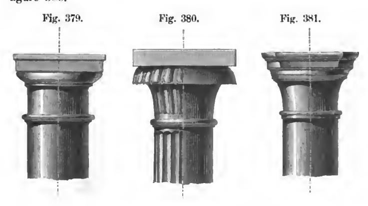
Pour les étages inférieurs des grands bâtiments d'usines et, d'une manière générale, pour toutes les colonnes métalliques qui ont à supporter des charges considérables, une des formes les plus convenables est celle du chapiteau simple, qui a reçu de si nombreuses applications dans les constructions du style roman. La fig. 376 représente un chapiteau de cette espèce. De même, pour les colonnes très-chargées, mais en même temps très-élancées, on peut recourir au chapiteau normand, fig. 377. On obtient un aspect, à la fois plus léger et plus gai, au moyen du chapiteau gothique, réduit à la forme simple, que représente la fig. 378. Pour ces trois formes, l'opération du modelage et celle de la coulée sont très-simples.

Fig. 376. Fig. 377. Fig. 378.



Dans la construction de machines, le chapiteau qu'on emploie le plus ordinairement est celui que représente la fig. 379 et qui est intermédiaire entre le chapiteau toscan et le chapiteau dorique romain; il se compose essentiellement d'une partie à section carrée (l'abaque), d'un modillon et d'un astragale, qui constitue la ligne de séparation entre le chapiteau proprement dit et le corps de la colonne. En augmentant ou en diminuant la distance de l'astragale au modillon, on arrive facilement à donner à la colonne un aspect plus ou moins élancé. Les formes sévères du style dorique grec ne conviennent pas pour les colonnes métalliques; aussi les rencontre t'on très-rarement dans la construction des machines. On emploie, au contraire, avec avantage, dans les constructions en fer, les colonnes corinthiennes, auxquelles on donne la forme, à la fois simple et gracieuse, que reproduit la figure 380.

Fig. 379. Fig. 380. Fig. 381.



Le chapiteau se compose d'une corniche, formée d'un certain nombre de cannelures (21), dont l'ensemble constitue une surface concave à la partie inférieure, convexe à la partie supérieure, et d'un astragale qui le sépare du corps de la colonne. Si on supprime les cannelures, comme on l'a fait sur la moitié de droite de la figure, on obtient une forme plus simple, qui est également très-employée (v. fig. 357). Les cannelures du chapiteau, au moins pour certains cas particuliers, se trouvent d'autant mieux justifiées que souvent on n'hésite pas à en établir sur le corps même de la colonne. Le chapiteau cannelé est d'une exécution facile, à la condition de le considérer comme une enveloppe,

qui part de la naissance des cannelures au-dessus de l'astragale, et de rapporter la pièce fondue sur le noyau de la colonne.

La fig. 381 représente un chapiteau, terminé par un abaque octogonal, qui se rapproche de la forme Renaissance et qui convient très-bien pour les colonnes élancées.

La jonction avec les poutres, en fer ou en bois, exige souvent l'interposition d'une plaque d'une certaine longueur entre la colonne et la poutre; tout en conservant à cette pièce une grande simplicité, il convient cependant de lui donner une forme qui soit en rapport avec le style de la colonne. La fig. 382 donne une disposition qu'on peut employer avec le chapiteau roman, c'est-à-dire dans le cas où il s'agit de colonnes d'une grande simplicité de formes.

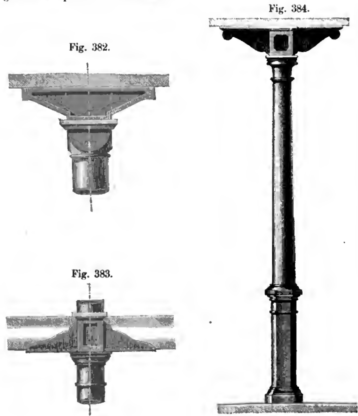


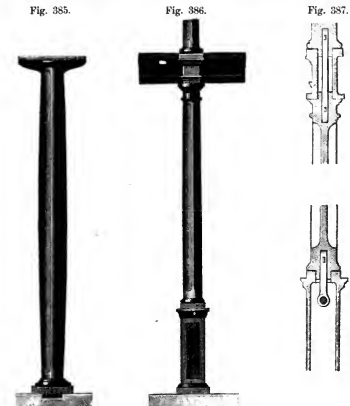
Fig. 382.

Fig. 383.

Fig. 384.

La fig. 383 représente un chapiteau plus léger, dans lequel la partie supérieure, qui a la forme d'une boite, est allongée de chaque côté pour recevoir une poutre; la fig. 384 indique une disposition encore plus légère et plus élancée. Cette même figure montre l'emploi d'un stylobate, ou d'un piédestal d'une assez grande hauteur, pour les colonnes, qui ont une longueur relativement très-grande par rapport à leur diamètre. La section de ce piédestal est souvent octogonale, comme l'indique la figure et, sous ce rapport, il rentre dans le style gothique; assez souvent aussi on lui donne une forme circulaire. Conformément aux principes de l'architecture, le diamètre du corps de la colonne doit aller en se retrécissant vers la partie supérieure. On obtient un aspect satisfaisant, en prenant pour le diamètre, en ce point,

Fig. 385. Fig. 386. Fig. 387.



0,8 ou 0,7 du diamètre à la base, qui doit être conservé sur le tiers environ de la hauteur.

Les colonnes à nervures en croix, dont nous avons déjà parlé, sont d'un emploi assez répandu dans les bâtiments industriels. Comparées aux colonnes creuses, elles présentent cet avantage qu'elles ne sont pas exposées, comme ces dernières, à venir défectueuses à la fonte, par suite d'un déplacement du noyau ou que, du moins, des vices de ce genre, s'ils viennent à se produire, ne peuvent pas être dissimulés. Les fig. 385 à 387 représentent des colonnes à nervures en croix.

La forme de la fig. 385 est celle des colonnes de la gare du chemin de fer de S^t. Germain. Les nervures règnent ici sur toute la longueur du corps, ce qui simplifie l'exécution du piédestal et du chapiteau; au milieu de sa longueur la colonne présente un renflement.

La forme, représentée par la fig. 386, est beaucoup plus élégante que la précédente; elle est due à l'ingénieur Rolland, qui l'a employée, pour la première fois, dans la construction de la manufacture des tabacs de Strasbourg. A l'un des étages, ces colonnes reposent sur un socle assez élevé, à section rectangulaire. La partie inférieure de la fig. 387 montre la liaison de la colonne avec le socle, et la partie supérieure, celle du chapiteau, d'un entablement en fonte et d'une colonne établie directement au-dessus. On voit par là qu'il est possible d'obtenir, avec les colonnes à nervures, une forme qui présente à la fois un aspect agréable et une grande solidité.

La question des formes à donner aux colonnes est une des plus intéressantes et des plus variées de la construction; les exemples, que nous venons d'indiquer, bien qu'en assez petit nombre, peuvent suffire cependant pour fournir un point de départ à ceux qui attachent un certain prix à la beauté des formes dans les machines.

X. Tambours à courroies ou poulies.

§ 153.

Classification des roues.

Les roues qu'on emploie, dans les installations mécaniques, pour transmettre les mouvements de rotation, se divisent en deux classes principales:

1. *Les roues à frottement;* 2. *Les roues dentées.*

Dans le premier cas, la transmission du travail s'effectue grâce au frottement qui se produit sur les contours polis de roues, lesquelles affectent généralement la forme de solides de révolution, tandis que, dans le second cas, cette transmission s'opère par l'intermédiaire de parties, alternativement saillantes et creuses, disposées sur les circonférences des roues.

Les roues de chacune de ces deux classes se subdivisent elles-mêmes en deux autres:

a. *les roues à action directe,*

b. *les roues à action indirecte,*

suivant que, pour produire la transmission, l'une des roues agit directement sur l'autre, ou par l'intermédiaire d'un organe de traction (corde, courroie, chaîne). Par conséquent, les roues, destinées à transmettre les mouvements de rotation, peuvent, en définitive, être considérées comme formant quatre classes distinctes:

I. *Les roues à frottement à action directe,* ou roues à friction.

II. *Les roues à frottement à action indirecte,* tambours, poulies, roues à cordes.

III. *Les roues dentées à action directe,* ou engrenages.

IV. *Les roues dentées à action indirecte,* ou roues à chaînes.

Les roues de la seconde et de la troisième espèces sont de beaucoup les plus employées; aussi, dans ce qui va suivre, les traiterons-nous avec plus de détails que celles des deux autres espèces.

§ 154.

Roues à friction cylindriques et coniques.

Dans une transmission par tambours à frottement cylindriques, fig. 388, pour surmonter une résistance tangentielle P, les tambours doivent exercer l'un sur l'autre, suivant la direction de la ligne des centres, une pression Q, satisfaisant à la relation:

$$Q = \frac{P}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

f désignant le coefficient de frottement des parties en contact, pour lequel on peut prendre les valeurs suivantes:

Fer sur fer	0,10 à 0,30,
Bois sur fer	0,10 à 0,60,
Bois sur bois	0,40 à 0,60.

Les limites inférieures sont celles qu'il convient d'admettre lorsque les surfaces frottantes sont graissées et parfaitement polies, ce qui a lieu le plus ordinairement.

De la force P une fraction assez considérable (variable de 3 à 10 p %), et qui augmente avec le diamètre des tourillons, se rapporte aux résistances nuisibles de l'arbre mené.

L'application la plus importante des roues à frottement cylindriques, ou du moins de roues agissant d'une manière analogue, se rencontre dans les locomotives; le grand développement qu'ont pris les voies ferrées est dû directement à l'emploi du mécanisme si simple des roues à frottement. On rencontre encore, sous des formes très-variées, de nombreuses applications des roues à friction cylindriques dans certains élévateurs, dans les machines à travailler le bois (dispositifs d'alimentation), dans les appareils de filatures, etc.

Fig. 388.

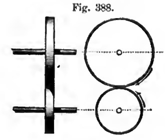
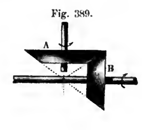


Fig. 389.



Les dimensions des roues à friction se déterminent, d'une part, d'après le maximum de pression par unité de surface qu'on peut admettre sur les circonférences des roues et, d'autre part, par la considération de l'action exercée par la force Q sur la couronne et les bras de chaque roue (1).

La couronne et les bras doivent être exécutés légèrement plus forts que les parties correspondantes d'une poulie, de mêmes dimensions, soumise à la même force tangentielle P (v. § 165).

Dans les roues à friction coniques, fig. 389, on peut, avec une approximation suffisante, supposer la pression Q appliquée au milieu de la couronne, normalement à la surface conique.

(1) Les contours des roues s'aplatissent au point de contact. D'après les expériences de Krauss une roue de wagon, munie d'un bandage en acier, offrait, sous une charge de 5500^k une surface de contact avec le rail (en fer) de 264^{mm2}; sous une charge de 3750^k, cette surface n'était plus que de 156^{mm2} (Revue polytech. Suisse, 1866. P. 65).

Les roues à friction coniques sont employées, comme appareils de transmission, dans certains types d'essoreuses, dans les machines à apprêter, etc.; mais le nombre de leurs applications est, en définitive, assez restreint.

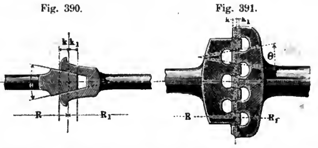
§ 115.

Roues à coins.

Les roues à coins sont des roues à friction, dont les jantes, formées de surfaces inclinées, pénètrent l'une dans l'autre. Elles ont été particulièrement employées, en Italie par Minotto, en Angleterre par Robertson et sont souvent désignées par le nom d'un de ces ingénieurs; elles doivent être utilisées de préférence comme roues droites (pour arbres parallèles). La fig. 390 donne les coupes des couronnes pour deux roues à coins simples. La pression Q à exercer, dans la direction des rayons, est ici notablement plus faible que dans les roues cylindriques du paragraphe précédent. En désignant par Θ l'angle des deux faces du coin, on a, en effet:

$$Q = P\left(\frac{\sin\frac{\Theta}{2}}{f}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130).$$

Un inconvénient de cette disposition, et qui a pour conséquence des frottements plus considérables, tient à ce que les seuls cercles, qui roulent réellement l'un sur l'autre, sont ceux



que déterminent les intersections des couronnes avec deux cylindres tangents l'un à l'autre; cet inconvénient est d'autant moins prononcé que les longueurs des surfaces de contact k et k_1 sont plus faibles relativement aux rayons R et R_1. Pour arriver à des valeurs de $\frac{k}{R}$ et $\frac{k_1}{R_1}$ aussi faibles que possible, pour une

pression déterminée, on fait usage de roues à coins multiples, fig. 391. Le plus souvent l'angle Θ est de 30° environ; il a une valeur encore plus faible dans les roues de Robertson. Avec de grandes vitesses à la circonférence, il se produit presque inévitablement un grand développement de chaleur et, par suite, une usure considérable. Minotto a cherché à rendre pratique l'emploi des roues à coins coniques; à cet effet, il munit l'une des roues d'une rainure unique, disposée de manière à ce que le coin de la seconde roue puisse toujours engrener exactement au même point. Robertson emploie des rainures analogues à celles des roues droites, c'est-à-dire qui ne sont pas susceptibles de se déplacer. On a essayé d'appliquer le mode de transmission par roues aux locomotives destinées à remonter de fortes rampes; mais les essais n'ont jamais porté que sur des modèles à petite échelle; il est probable que, dans ce cas, il se produirait une usure extrêmement rapide. En Amérique, les roues à coins sont employées avec succès, depuis plusieurs années, dans des machines d'extraction de mines; leur emploi doit être recommandé de préférence pour les transmissions à mouvement lent; toutefois, dans ces dernières années, Gwynne, en Angleterre, et Webers, à Berlin, semblent avoir obtenu des résultats très-satisfaisants, en les utilisant pour des transmissions rapides, celles de pompes centrifuges faisant 700 tours par minute; les roues employées présentaient, dans ce cas, des profils de coins recourbés, dans lesquels on retrouve le dispositif proposé par Minotto, pour permettre un certain déplacement (1).

§ 156.

Règles relatives à la disposition des poulies.

Les poulies sont des roues à frottement à action indirecte, qu'on emploie sous un grand nombre de formes. Nous nous occuperons, en premier lieu, des poulies cylindriques, destinées à recevoir des courroies d'une certaine largeur. Les axes des poulies, réunies par une même courroie, peuvent présenter, l'un par rapport à l'autre, les positions suivantes:

1. ils coïncident géométriquement,
2. ils sont parallèles,

(1) V. Engineering 1868, P. 502 et 593 et 1869, P. 353.

3. ils se coupent,

4. ils se croisent, sans être dans un même plan.

Dans ces différents cas, la courroie passe de la poulie motrice à la poulie menée, soit directement, soit par l'intermédiaire de rouleaux-guides; mais il est indispensable que les poulies soient disposées de telle manière que la courroie puisse se maintenir sur chacune d'elles, sans le secours d'un guide spécial. La disposition géométrique, qui permet de remplir cette condition, constitue ce qu'on appelle la direction de la courroie.

La condition précédente se trouve satisfaite, lorsqu'on dispose les poulies de telle sorte que, pour chacune d'elles, la ligne médiane du brin qui s'enroule se trouve dans le plan moyen de cette poulie.

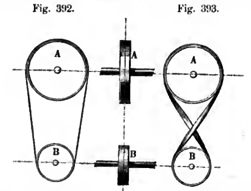
Dans les poulies dont la jante est bombée (v. P. 366), on peut admettre de légères variations s'élevant de $^1/_2$ à $^3/_4{}^\circ$ (tg = 0,8 à 1,2 p%).

§ 157.

Transmissions par courroies se guidant elles-mêmes.

On désigne sous ce nom les transmissions pour lesquelles la condition précédente se trouve remplie, sans le secours de rouleaux ou de guides d'aucune sorte. Les plus simples, qui correspondent au cas des arbres parallèles, se trouvent représentées fig. 392 et 393. Dans la première figure, la courroie est droite, elle est croisée dans la seconde. Avec ces deux dis-

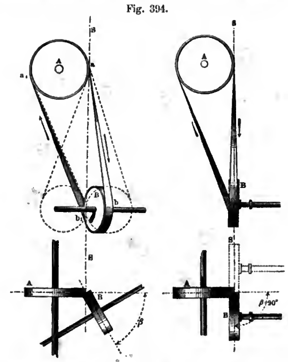
Fig. 392. Fig. 393.



positifs, les courroies peuvent s'enrouler indifféremment dans un sens ou dans l'autre.

Pour les arbres dont les axes coïncident, comme pour ceux dont les axes se coupent, il est évidemment impossible d'établir des transmissions par courroies se guidant elles-mêmes. Il en est tout autrement pour le cas où les arbres se croisent, sans être dans un même plan; on peut alors recourir à la disposition que reproduit la fig. 394 et qui est d'un fréquent usage.

Fig. 394.



Cette transmission permet de se dispenser de tout guide extérieur, si l'on a soin de disposer les poulies de manière à ce que la ligne d'intersection de leurs plans moyens soit tangente aux cercles contenus dans ces plans, précisément aux points où la courroie abandonne les poulies. Dans la fig. 394, où ces deux points sont a et b_1, la courroie doit se mouvoir dans le sens des flèches. Si on voulait la faire mouvoir en sens contraire, il faudrait commencer par déplacer les poulies sur leurs arbres jusqu'à ce que la ligne d'intersection de leurs plans moyens arrivât à être tangente aux cercles aux deux points a_1 et b,

opposés aux précédents. Cette condition se trouve réalisée, lorsque les nouvelles positions, occupées par les poulies, se trouvent être symétriques, par rapport au croisement K des arbres, de celles qu'elles occupaient dans le premier cas.

La transmission, représentée par la fig. 394, peut être considérée comme la solution générale de toutes les transmissions par courroies se guidant elles-mêmes; elle donne, en effet, la transmission par courroie droite, quand l'angle β des plans moyens des poulies est égal à O et la transmission par courroie croisée, quand $\beta = 180^0$. Dans toutes les positions intermédiaires, la courroie n'est que partiellement croisée. Pour $\beta = 90^0$, on a une courroie demi-croisée, pour $\beta = 45^0$, un croisement au quart, etc.

Lorsque la courroie, partiellement croisée, n'a qu'une longueur relativement faible, elle peut être facilement projetée en dehors des poulies. D'après Redtenbacher, pour que cet accident ne puisse pas se produire, le plus faible écartement qu'on puisse admettre pour les poulies ne doit pas être inférieur au double du diamètre de la plus grande de ces poulies, c'est-à-dire que l'angle de déviation de la courroie ne doit pas dépasser 25^0. De plus, pour que l'usure de la courroie ne soit pas trop rapide, la distance des poulies(1) ne doit pas descendre au-dessous de $10\sqrt{bD}$, b désignant la largeur de la courroie et D le diamètre de la poulie menante. Il est évident que, dans chaque cas particulier, il conviendra de prendre la plus grande de ces deux limites.

§ 158.

Transmissions par courroies avec poulies-guides.

Règle. Dans une transmission avec poulies-guides, la courroie a une direction convenable, lorsque, pour chacune des poulies, le point de déroulement se trouve être le point de contact, avec cette poulie, de la ligne d'intersection de son plan moyen avec celui de la poulie suivante.

Les fig. 395 et 396 représentent des transmissions de ce genre pour arbres parallèles.

Dans la fig. 395, les poulies-guides ont leurs plans moyens tangents aux deux poulies de transmission et leur diamètre commun est précisément égal à la distance des plans moyens de ces

(1) V. le mémoire de Völker dans le journal de la société des ingénieurs allemands. Vol. IV (1860), P. 115.

dernières poulies. Cette disposition permet le mouvement de la courroie dans les deux sens. Dans le cas, qui se présente le

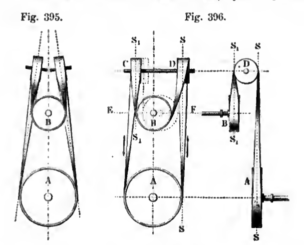


Fig. 395. Fig. 396.

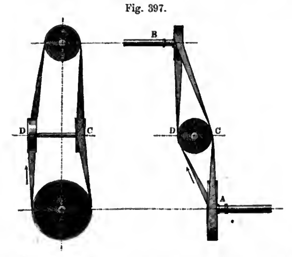
plus ordinairement, où il suffit que ce mouvement ait lieu dans un seul sens, on peut se contenter de la disposition plus simple de la fig. 396, dans laquelle les axes des deux poulies-guides coïncident. A et B sont les poulies de transmission; les deux poulies-guides ont, pour plans moyens, les deux plans parallèles qui sont respectivement tangents aux poulies A et B, aux points de déroulement, et leur diamètre commun est précisément égal à la distance des plans de ces mêmes poulies; ainsi que l'indique la figure, les deux poulies C et D tournent en sens inverse.

Si on considère B comme une poulie-guide et, dans ce cas, rien n'empêche de la supposer folle sur le même arbre que A, les deux poulies C et D peuvent être prises comme poulies de transmission, à la condition de les fixer sur deux arbres distincts, dont les directions seules coïncident.

Si les poulies-guides C et D sont établies entre les deux arbres A et B, comme l'indique la fig. 397, elles tournent dans le même sens et on peut, par conséquent, les fixer sur leur axe commun. Dans ce cas, la rotation ne peut avoir lieu que dans un seul sens. Les poulies C et D peuvent aussi être remplacées par une poulie unique, mais alors cette poulie doit être placée obliquement.

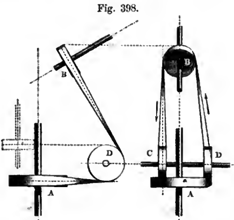
La fig. 398 représente une transmission par courroie pour deux arbres dont les axes se coupent. Dans cette disposition,

Fig. 397.



qui ne diffère de celle de la fig. 396 que par l'inclinaison de l'axe *B*, la rotation ne peut également avoir lieu que dans un seul sens.

Fig. 398.



Pour obtenir la rotation en sens inverse, il est nécessaire de déplacer les poulies-guides sur leur axe commun, qui peut d'ailleurs conserver la même position. Il ne faut pas oublier

que les deux poulies-guides tournent en sens opposés et que, par conséquent, elles ne peuvent pas être calées toutes les deux sur l'arbre qui les porte.

De la disposition de la fig. 397 se déduit celle de la fig. 399, qui se rapporte au cas d'arbres formant un angle très-aigu et dans laquelle les poulies-guides C et D tournent dans le même sens.

Le dispositif de la fig. 400 est encore plus simple et peut s'appliquer pour une inclinaison d'arbres plus forte (jusqu'à 25°).

Fig. 399. Fig. 400.

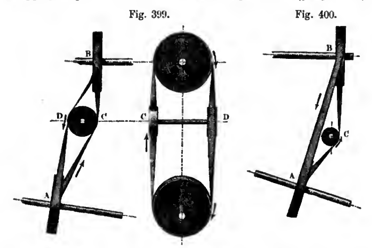
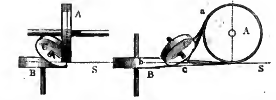


Fig. 401. *Courroie à demi-croisée avec poulie-guide.* Les poulies de transmission ont des positions relatives telles que la

Fig. 401.

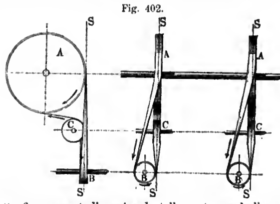


disposition de la fig. 394 serait applicable, si l'écartement des poulies n'était pas trop faible. Pour déterminer la direction à donner à la courroie, on doit d'abord commencer par donner à l'un de ses brins la direction SS de l'intersection des plans

moyens des poulies, puis, par un point c, choisi arbitrairement sur SS, on mène aux circonférences de ces poulies les tangentes ca et cb, dont le plan détermine le plan moyen de la poulie-guide C, qu'on établit tangentiellement à ces lignes. La rotation peut s'effectuer dans les deux sens; nous devons, toutefois, faire remarquer qu'au point de vue de la construction la position de l'arbre de la poulie est assez gênante et rend très-difficile l'établissement de la transmission; aussi cette disposition est-elle rarement employée dans la pratique.

Fig. 402. *Autre disposition de transmission par courroie à demi-croisée avec poulie-guide.* Les poulies de transmission,

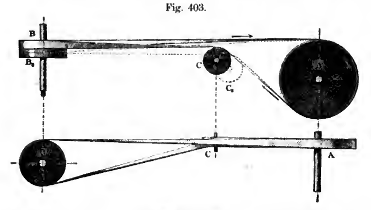
Fig. 402.



dans cette figure, sont disposées de telle sorte que la ligne d'intersection SS de leurs plans moyens est tangente commune aux deux cercles contenus dans ces plans; le plan moyen de la poulie-guide coïncide alors avec celui de la poulie de transmission A. Le brin de courroie, qui se déroule de cette poulie A, s'incline, comme dans la courroie croisée, pour venir s'enrouler sur la poulie B, tandis que l'autre brin se trouve guidé, avant son enroulement, par le rouleau C, qui est un contact avec la ligne d'intersection SS et une tangente au cercle A, menée par un point arbitraire de cette ligne. Le mouvement de rotation ne doit d'ailleurs s'effectuer que dans le sens indiqué par les flèches. Ce mode de transmission par courroie se prête très-bien à la commande d'une série d'arbres verticaux par un même arbre horizontal; c'est ainsi qu'on l'emploie fréquemment, avec de faibles écartements de poulies, pour les moulins destinés à réduire en poudre différentes espèces de matières.

Fig. 403. *Courroie à demi-croisée, avec rouleau-guide de position variable.* Dans cette disposition, qui suppose un écartement de poulies plus considérable que la précédente, on peut, en amenant le rouleau-guide, de la position C à la position C_0 (pointillée) faire passer la courroie, de la poulie fixe B sur

Fig. 403.



la poulie folle B_0; le rouleau-guide peut donc être utilisé, dans ce cas, comme moyen de débrayage. La position C_0 doit être déterminée de telle sorte que la tension correspondante de la courroie soit à peu près la même, ou légèrement plus faible, que dans la position C.

Cas général des arbres croisés. Lorsque les poulies ne peuvent pas être placées de manière à ce que l'intersection de leurs plans soit tangente commune aux deux cercles contenus dans ces plans, on se trouve conduit à faire usage de deux rouleaux-guides.

La fig. 404 représente la disposition qu'on peut adopter dans ce cas et qui peut être considérée comme la solution générale du problème des transmissions par courroies avec rouleaux-guides. La fig. 405 donne une application particulière pour le cas où la ligne d'intersection SS passe par le centre du cercle moyen d'une des poulies; dans cette figure, l'axe de B doit être supposé situé dans un plan parallèle à A. Après avoir déterminé d'abord l'intersection SS des plans des poulies, on choisit, sur cette ligne, deux points arbitraires c et c_1, par lesquels on mène aux cercles moyens des poulies les tangentes ca et cb, $c_1 a_1$ et $c_1 b_1$. Les plans cab et $c_1 a_1 b_1$, qu'on détermine ainsi,

sont ceux qu'il convient d'adopter pour les rouleaux-guides, qu'on doit établir respectivement en contact avec les tangentes précé-

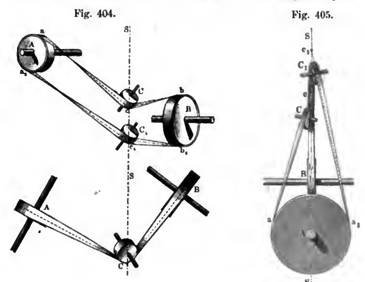


Fig. 404. Fig. 405.

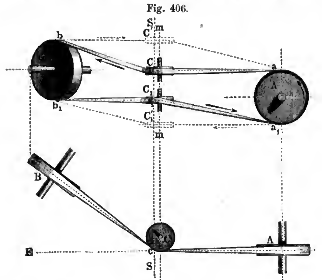
dentes. Avec cette disposition le mouvement peut s'effectuer dans les deux sens.

Une simplification du mode de transmission, représenté par la fig. 404, consiste à donner aux axes des deux rouleaux-guides une direction commune *mm*, parallèle aux deux poulies de transmission, fig. 406. Dans cette figure, *SS* représente l'intersection des plans des poulies, ac et $b_1 c_1$, des plans perpendiculaires à cette ligne et dans lesquels on doit établir les rouleaux C et C_1, tangentiellement aux droites ac et $b_1 c_1$. La déviation des brins se produit sur ces rouleaux. Les flèches indiquent le sens du mouvement possible; pour tourner en sens inverse, il faudrait donner aux rouleaux les positions C' et C'_1, représentées en pointillé.

Une remarque assez importante à faire, surtout au point de vue des applications pratiques, c'est que la courroie, au lieu d'aller de c en a et de c_1 en a_1, peut être dirigée de c en a_1 et de c_1 en a, ce qui a pour conséquence de changer le sens du mouvement de rotation. Les rouleaux, au lieu d'être placés horizontalement, comme sur la figure, peuvent être établis ver-

ticalement, c'est-à-dire de telle sorte que C et C_1 se trouvent respectivement dans les plans des poulies A et B; mais, dans

Fig. 406.



ce cas, il convient d'avoir égard à la grandeur de l'angle de déviation (§ 157).

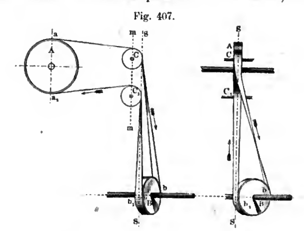
Lorsque les poulies de transmission peuvent être établies de manière à ce que l'intersection SS de leurs plans moyens soit tangente à l'une d'elles et que la distance des plans parallèles contenant les axes de A et de B est suffisante, on peut à la disposition de la fig. 405 substituer celle de la fig. 407, qui est très-pratique et dans laquelle les axes des rouleaux sont parallèles à celui de la poulie A. Les plans des poulies B et A peuvent, dans ce cas, former un angle quelconque.

Si la distance AC est relativement considérable par rapport à la largeur de la courroie, les rouleaux, au lieu d'être établis l'un au-dessus de l'autre, peuvent être placés sur le même axe, fig. 408; enfin, si la distance entre B et C est suffisante, on peut munir l'arbre B de deux poulies, l'une fixe et l'autre folle.

Lorsque, par suite du manque de place, on se trouve forcé de renoncer à l'emploi d'une des dispositions commodes que nous venons d'indiquer, on doit au moins chercher à placer

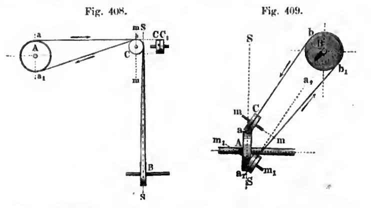
les axes des rouleaux dans l'un des plans principaux de l'installation et ces rouleaux eux-mêmes parallèles l'un à l'autre, comme,

Fig. 407.



par exemple, dans la fig. 409. On trace la tangente ab et, dans le plan mené par cette ligne normalement au plan de la

Fig. 408. Fig. 409.

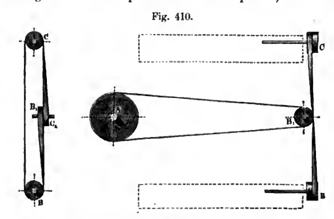


figure, on place le rouleau C, de telle sorte qu'il soit tangent en a à l'intersection de A et de C; par le point a_1 on trace la ligne $a_1 a_2$ parallèle à ab et, dans le plan conduit par cette ligne, parallèlement à C, on établit le second rouleau, tangent à la fois à l'intersection de A et C_1 et au plan de B; de cette manière, les axes mm et $m_1 m_1$ se trouvent parallèles et, de plus, sont situés dans un plan parallèle à la poulie B.

En faisant passer la courroie de la fig. 408 sur une quatrième poulie, on arrive à une disposition, qui permet de conduire deux poulies B et C, au moyen d'une seule poulie menante A.

La fig. 410 représente une disposition de ce genre, très-répandue dans les filatures. Les arbres B et C sont situés à des étages différents et portent chacun deux poulies, fixe et folle;

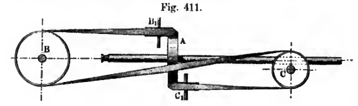
Fig. 410.



on utilise, dans ce cas, la déviation que peut prendre la courroie par rapport à sa direction rigoureuse (v. § 156).

La fig. 411 indique un autre mode de transmission par courroie, dans lequel l'arbre A fait mouvoir deux arbres parallèles B et C; les axes de ces arbres sont tous les deux perpendiculaires à celui de l'arbre A et le premier le coupe, tandis que le second le croise simplement sans le couper.

Fig. 411.



On rencontre, dans les machines de filatures, un très-grand nombre de transmissions par courroies, dans lesquelles une même poulie menante fait mouvoir trois à quatre poulies, ou même un plus grand nombre.

Comme dernière remarque nous devons ajouter que, dans toutes les transmissions par courroies, où on emploie des rouleaux, qui sont en contact avec la surface supérieure de la courroie, il convient de disposer cette dernière, lorsqu'elle est en cuir, de manière que le contact avec les poulies ait toujours lieu sur la même face (la plus rugueuse).

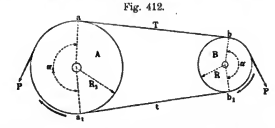
§ 159.

Des courroies de transmission et de leurs tensions.

Les courroies de transmission qu'on emploie ordinairement sont formées de bandes de cuir de vache ou de caoutchouc, dont la largeur varie de 50 à 300^{mm}; pour transmettre des efforts considérables, on fait usage de courroies doubles ou triples, tandis que, pour les petites forces et pour les mouvements très-rapides, on se sert souvent de cordons de chanvre, de coton ou de cuir.

Pour que la poulie B, fig. 412, puisse mettre en mouvement la poulie A, soumise à une résistance P à sa circonférence,

Fig. 412.



il faut que les tensions de la courroie, T et t, dans le brin conducteur et le brin conduit, atteignent au moins les valeurs données par les expressions:

$$\frac{t}{P} = \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}, \quad \frac{T}{P} = \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1} = 1 + \frac{t}{P} \quad . \quad . \quad (131),$$

qu'on peut remplacer approximativement par les suivantes:

$$\frac{t}{P} = \frac{1}{f\alpha + \frac{f^2\alpha^2}{2}}, \quad \frac{T}{P} = 1 + \frac{1}{f\alpha + \frac{f^2\alpha^2}{2}} \quad . \quad . \quad (132)$$

$e = 2{,}718$ représentant la base des logarithmes naturels,

f le coefficient de frottement, pour le glissement de la courroie sur la poulie,

α l'angle d'enroulement, exprimé par le rapport de l'arc embrassé à la circonférence entière de la poulie considérée.

Dans les formules (131) et (132) n'entrent pas la raideur de la courroie et le frottement des axes; pour en tenir compte, on doit poser:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t}{P} &= \frac{1}{e^{f\alpha}(1-u)-(1+u)} \\ \frac{T}{P} &= \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha}(1-u)-(1+u)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (133).$$

Ou, approximativement:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t}{P} &= \frac{1}{\left(1+f\alpha+\frac{f^2\alpha^2}{2}\right)(1-u)-(1+u)} \\ \frac{T}{P} &= \left(1+f\alpha+\frac{f^2\alpha^2}{2}\right)\frac{t}{P} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (134)$$

expressions dans lesquelles u a pour valeur:

$$u = \frac{s\delta^2}{R} + \frac{f_1 d}{2R} \quad \ldots \ldots \quad (135)$$

et se rapporte à la poulie, dont l'angle d'enroulement est α.

R représente le rayon de la poulie,
b - la largeur de la courroie,
δ - l'épaisseur de la courroie,
d - le diamètre des tourillons de l'arbre,
s - le coefficient de raideur de la courroie,
f_1 - le coefficient de frottement des tourillons.

Pour la courroie simple, que nous considérerons d'abord, on peut prendre, comme valeurs moyennes, $\delta = 4^{mm},5$, $\frac{d}{R} = 0,25$, $s = 0,009$, $f_1 = 0,08$. Ces valeurs, substituées dans la formule (135), donnent:

$$1 + u = 1,02, \qquad 1 - u = 0,98.$$

Le coefficient de frottement de la courroie sur la poulie a comme valeur, d'après Morin:

pour les courroies moyennement graissées sur tambours dans le même état . . 0,28

pour les courroies parfaitement graissées sur tambours dans le même état . . 0,12.

Les coefficients pour le caoutchouc ne diffèrent probablement pas beaucoup des précédents, qui se rapportent aux courroies en cuir; toutes choses égales d'ailleurs, ils paraissent être un peu plus forts, c'est-à-dire plus avantageux.

L'angle d'enroulement α peut descendre jusqu'à $0{,}8\,\pi$, mais, dans les cas ordinaires, il s'élève à $0{,}95\,\pi$ environ. Si donc on admet que le coefficient f ait ordinairement pour valeur 0,28 et que, par suite de l'état de graissage de la courroie, il puisse descendre à 0,24, les valeurs de T et de t se trouveront comprises entre celles qu'on obtient pour $f\alpha = 0{,}24 \cdot 0{,}8\,\pi$ et $f\alpha = 0{,}28 \cdot 0{,}95\,\pi$. La première valeur de $f\alpha$ donne, d'après les relations (134):

$$\frac{t}{P} = 1{,}37, \quad \frac{T}{P} = 2{,}44, \quad \frac{T+t}{P} = 3{,}81, \quad \frac{t}{T} = 0{,}561 \quad . \quad (136)$$

et la seconde:

$$\frac{t}{P} = 0{,}89, \quad \frac{T}{P} = 1{,}95, \quad \frac{T+t}{P} = 2{,}84, \quad \frac{t}{T} = 0{,}456 \quad . \quad (137).$$

Remarque. Par suite de la différence des tensions T et t, les vitesses v et v_1 des poulies, sur les circonférences de rayons $R + \frac{\delta}{2}$ et $R_1 + \frac{\delta}{2}$, ne sont pas rigoureusement les mêmes; le glissement de la courroie, qui se produit nécessairement, a pour conséquence une perte de vitesse, qui est donnée par l'expression suivante:

$$\frac{v_1 - v}{v} = \frac{1 - \frac{t}{T}}{1 + \frac{E}{\mathfrak{S}_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

où E désigne le coefficient d'élasticité de la courroie et $\mathfrak{S}_1$ la tension dans le brin conducteur. La perte de vitesse, due au glissement, s'élève, en moyenne, à $\frac{1}{2}$ p% (1); elle est accompagnée d'une perte de travail, qui se traduit par un échauffement et une usure de la courroie et des poulies.

§ 160.

Calcul d'une courroie simple.

Dans le brin conducteur, on peut admettre, pour la tension, par millimètre carré, $\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{200}\sqrt[3]{b^3}$. Pour les courroies d'une

(1) Pour une valeur de E, comprise entre 15 et 20k (v. la table du § 2); cette valeur moyenne a été déterminée par Hirn, sur la demande de l'auteur, au moyen d'expériences nombreuses et précises, exécutées sur des courroies ayant déjà servi, mais en très-bon état de conservation. Des expériences plus anciennes de Bevan donnent, pour E, une valeur sensiblement deux fois plus petite et conduisent, par suite, à une perte de vitesse beaucoup plus forte que la précédente.

grande largeur, on emploie généralement du cuir plus épais que pour celles où cette largeur est faible et on obtient, pour cette épaisseur, des valeurs qui se rapprochent de celles de la pratique, en posant: $\delta = 1,5 \sqrt[4]{b}$. Si donc on désigne par $p = \mathfrak{S}_1 \delta$ la tension, par millimètre de largeur, qui se produit dans la courroie, on peut établir le tableau suivant:

b	= 50	100	150	200	250	300^{mm}
δ	= 3,97	4,74	5,25	5,64	5,97	6^{mm},24
$\mathfrak{S}_1$	= 0,09	0,16	0,21	0,27	0,31	0^{k},36
p	= 0,36	0,76	1,10	1,52	1,85	2^{k},25.

En partant des relations précédentes, on arrive, pour la largeur d'une courroie, aux différentes expressions suivantes:

1°. Pour une résistance P, appliquée tangentiellement à la poulie: $b = 18 \sqrt{P}$ . . . . (139).

2°. Pour une force de N chevaux à transmettre, avec une vitesse de n tours par minute:

$$b = 15250 \sqrt{\frac{N}{Rn}} \quad . . . . (140).$$

3°. Pour une transmission de N chevaux, avec une vitesse v (en mètres) de la courroie:

$$b = 156 \sqrt{\frac{N}{v}} \quad . . . . (141).$$

4°. Pour un moment statique (PR):

$$b = 6,87 \sqrt[3]{\frac{b}{R}(PR)} \quad . . . . . (142).$$

5°. Ou encore:

$$b = 615 \sqrt[3]{\frac{b}{R}\frac{N}{n}} \quad . . . . . . (143).$$

La force qu'on peut transmettre par courroie est limitée. D'après la formule (139), une courroie simple, de 200^{mm} de largeur, peut transmettre, comme maximum, une force $P = \frac{1}{18^2} \cdot 200^2 = 123^k,5$; sa tension est alors, d'après la formule (136), de $2,44 \cdot 123,5 = 301^k,3$. Le maximum de vitesse qu'on puisse admettre pour une courroie étant de 32 mètres, il en résulte que le plus grand travail en chevaux que soit capable de transmettre la courroie précédente est, d'après la formule (141): $N_{max} = \frac{1}{156^2} 200^2 \cdot 32 = 52^{ch},6$. Il est d'ailleurs extrêmement rare

qu'on arrive pour une courroie à une vitesse de 32 mètres. Avec les courroies doubles (v. la form. 145), les valeurs des maximums de P et de N peuvent être évaluées approximativement au double des précédentes.

§ 161.

Table des largeurs des courroies simples en cuir.

Cette table a été calculée au moyen des formules précédentes; seulement, comme $\frac{N}{Rn}$ et $\frac{b}{R}\frac{N}{n}$ correspondent à de très-petites valeurs numériques, on les a remplacés par $1000\ \frac{N}{Rn}$ et $1000\ \frac{b}{R}\frac{N}{n}$.

Largeur de la courroie b.	P	$1000\ \frac{N}{Rn}$	$\frac{b}{R}\ (PR)$	$1000\ \frac{b}{R}\frac{N}{n}$
50	7,72	0,011	385	0,538
55	9,34	0,013	512	0,715
60	11,11	0,015	665	0,929
65	13,04	0,018	846	1,181
70	15,12	0,021	1056	1,475
75	17,36	0,024	1299	1,814
80	19,75	0,027	1576	2,202
85	22,30	0,031	1890	2,641
90	25,00	0,035	2245	3,135
95	27,85	0,039	2641	3,687
100	30,86	0,043	3080	4,300
110	37,34	0,052	4099	5,732
120	44,44	0,062	5322	7,430
130	52,15	0,073	6767	9,446
110	60,49	0,084	8452	11,799
150	69,44	0,097	10395	14,513
160	79,00	0,110	12616	17,613
170	89,19	0,124	15132	21,126
180	100,00	0,139	17963	25,078
190	111,42	0,155	21126	29,487
200	123,45	0,172	24640	34,392
210	136,11	0,190	28524	39,813
220	149,38	0,208	32796	45,776
230	163,27	0.227	37474	52,306
240	177,76	0,248	42578	59,429
250	192,90	0,269	48125	67,172
260	208,64	0,291	54134	75,559
270	225,00	0,313	60624	84,620
280	242,00	0,337	67612	94,372
290	259,56	0,362	75118	104,848

1er. Exemple. Une force de 2 chevaux doit être transmise, par courroie, d'un arbre faisant 60 tours par minute à un second arbre d'une vitesse angulaire double; on propose de déterminer la largeur de la courroie et les rayons des poulies à employer. Si on prend $\frac{b}{R} = 0{,}23$, *on a:* $1000 \cdot \frac{b}{R} \frac{N}{n} = \frac{1000 \cdot 23}{30} = 7{,}66$; *la valeur correspondante de b est légèrement supérieure à celle que fournit la table (col. 5, ligne 13) et qui est* 120^{mm}, *mais on peut s'en tenir à cette valeur. Pour la seconde poulie, on a:* $\frac{N}{n_1} = \frac{1}{60}$, $R_1 = \frac{R}{2}$ *et, par suite,* $\frac{b}{R_1} = 2 \cdot 0{,}23$, *ce qui donne* $1000 \frac{b}{R_1} \frac{N}{n_1} = 7{,}66$ *comme précédemment. Pour les deux rayons, on a:* $R = \frac{1}{0{,}23} \cdot 120 = 522^{mm}$, $R_1 = 261^{mm}$; *on peut prendre 520 et* 260^{mm}.

2e. Exemple. Dans un élévateur, destiné à soulever une charge de 200^k, *au moyen d'une corde de* 15^{mm} *de diamètre, le tambour a un rayon de* 90^{mm} *(mesuré jusqu'à l'axe de la corde) et doit être mis en mouvement à l'aide d'une poulie de* 1^m *de diamètre, calée sur le même arbre et commandée elle-même par une seconde poulie d'égal diamètre; il s'agit de trouver la largeur de la courroie. La résistance, appliquée à la circonférence d'une poulie, est ici* $P = \frac{90 \cdot 200}{500} = 36^k$ *et la largeur correspondante, fournie par la table (col. 2, ligne 12), est de* 110^{mm}.

3e. Exemple. Une pompe, dont le piston est soumis à une résistance de 40^k, *doit être commandée par une manivelle de* 300^{mm} *de longueur; l'arbre de cette manivelle est lui-même commandé, à l'aide d'une courroie, par un deuxième arbre, dont la vitesse de rotation est à celle du premier dans le rapport* $\frac{7}{4}$; *les éléments à déterminer sont les rayons des poulies et la largeur de la courroie. Le rapport des rayons* $\frac{R_1}{R} = \frac{7}{4} = 1{,}75$; *si nous prenons* $\frac{b}{R} = \frac{1}{4}$, *ce qui donne* $\frac{b}{R_1}(PR) = 0{,}25 \cdot 40 \cdot 300 = 3000$, *la valeur fournie par la table est* $b = 100^{mm}$ *(col. 4, ligne 11); on en déduit:* $R_1 = 4 \cdot 100 = 400^{mm}$, $R = \frac{4}{7} \cdot 400$, *soit* 230^{mm}.

4e. Exemple. Si on donnait à la plus grande poulie du 1er exemple un rayon de 600^{mm}, *on aurait:* $\frac{1000 N}{R n} = \frac{1000}{600 \cdot 30} = 0{,}055$. *Le nombre qui s'en rapproche le plus dans la table est 0,052 (col. 3, ligne 12) et il donne* $b = 110^{mm}$, *valeur qu'on peut adopter pour la largeur de la courroie.*

Lorsque la largeur à donner à une courroie simple dépasse 300^{mm}, il convient de répartir la force à transmettre sur deux courroies, de largeur moitié moindre, ou encore de recourir à l'emploi d'une courroie double (v. le paragraphe suivant).

§ 162.

Courroies doubles. Cordons de transmission.

Si on suppose que l'épaisseur d'une courroie double soit deux fois celle d'une courroie simple de même largeur, ce qui a très-sensiblement lieu dans la pratique, la force que peut transmettre cette courroie est le double de celle que nous avons indiquée pour la courroie simple. On a, par suite, pour la largeur b_2 de la courroie double:

$$\left.\begin{aligned} P &= 2\,\frac{b_2^{\,2}}{18^2} = \frac{b_2^{\,2}}{162} \\ b_2 &= 12{,}7\,\sqrt{P} = 0{,}7\,b \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

c'est-à-dire que la largeur de la courroie simple s'obtient en multipliant par 0,7 celle de la courroie simple, correspondant à la même force à transmettre. Il importe de remarquer qu'on doit éviter, dans ce cas, de prendre R trop petit, car la raideur a une valeur beaucoup plus grande que pour la courroie simple.

Les cordons de transmission se déterminent presque toujours au sentiment; lorsque la force P à transmettre, supposée appliquée à la circonférence de la poulie, est connue, on donne au cordon un diamètre qui doit être au moins égal à $4\sqrt{P}$. Quelques fabricants ont cru devoir donner au mode de transmission par cordons à section circulaire une importance plus considérable qu'on ne le fait ordinairement. C'est ainsi que, dans la grande usine de construction de Combe à Belfast, la commande de toutes les machines-outils, qui représentent un travail supérieur à 60 chevaux, se fait au moyen de cordons ronds en cuir, ce qui permet de se dispenser complètement de l'emploi d'arbres verticaux et de roues coniques. Le même constructeur a appliqué ce mode de transmission par câbles ronds dans d'autres installations, où il paraît avoir parfaitement réussi. Les câbles qu'il emploie n'ont jamais, comme diamètre, plus de 25^{mm}; suivant l'importance du travail à transmettre, il en place 2, 3, 4 jusqu'à 6, les uns à côté des autres. Les tambours portent des rainures, à faces inclinées, pour recevoir les câbles (v. fig. 416); ce mode de transmission rentre, par suite, dans ce qu'on peut appeler la classe des roues à coins à action indirecte.

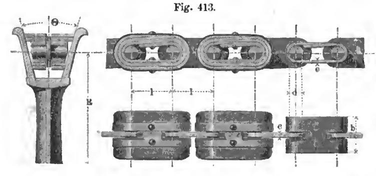
§ 163.

Chaînes en coin à articulations.

Dans ces dernières années on s'est livré à un très-grand nombre d'essais, afin d'arriver à remplacer les courroies ordinaires en cuir par d'autres organes de traction. Parmi les divers systèmes proposés dans ce but, nous devons citer, en premier lieu, la courroie-chaine (en cuir) de Rouiller; cet organe, qui, à l'origine, paraissait devoir fournir un bon service, n'a pas justifié cet espoir et on a dû renoncer à l'employer, en raison de sa faible durée; on n'a pas obtenu de résultats plus satisfaisants avec les courroies formées de fils métalliques tressés (Godin). Quant aux courroies en cuir, recouvertes de gutta-percha, elles ne peuvent pas, en réalité, lutter avec les courroies en cuir ordinaires, et il n'y a guère jusqu'à présent que les courroies en caoutchouc, avec tissu de chanvre ou de coton interposé, qui paraissent être au moins aussi avantageuses que les courroies en cuir pur, surtout lorsqu'il s'agit de transmettre des efforts assez considérables.

Dans certains cas spéciaux, pour transmettre de grandes forces, comme par exemple dans les machines agricoles, la courroie ordinaire peut être remplacée par un dispositif assez rationnel, la chaine en coin, à articulations métalliques, de Clissold, fig. 413. Dans cette chaine, les articulations sont reliées,

Fig. 413.



deux-à-deux, par des bandes de cuir enroulées, dont les faces latérales sont coupées obliquement, pour venir s'engager dans une rainure à section trapézoïdale, qui forme la jante de la

poulie. Angström a remplacé les coins en cuir par des coins en bois, garnis de fer (1). Au point de vue du calcul des tensions, il convient d'introduire ici le frottement des tourillons des chainons à la place de la raideur, qui figure dans les formules du § 159. Sous la réserve de cette observation, les formules (133) et (134) deviennent applicables, en remplaçant $f\alpha$ par $\frac{f\alpha}{\sin\Theta}$, Θ désignant l'angle du coin.

Pour $f = 0{,}24$, $\alpha = 0{,}8\,\pi$, $\Theta = 30^0$, on obtient:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{t}{P} = 0{,}20, \quad \frac{T}{P} = 1{,}23, \quad \frac{T+t}{P} = 1{,}43, \quad \frac{t}{T} = 0{,}163 \\ \text{et pour } f = 0{,}28, \quad \alpha = 0{,}95\,\pi, \quad \Theta = 30^0: \\ \frac{t}{P} = 0{,}12, \quad \frac{T}{P} = 1{,}15, \quad \frac{T+t}{P} = 1{,}27, \quad \frac{t}{T} = 0{,}105 \end{array}\right\} \quad . \quad (145).$$

Ces valeurs sont notablement plus avantageuses que celles des formules (136) et (137), relatives aux courroies plates; il en résulte que la chaine en marche, par suite de son poids considérable, paraît parfois entièrement détendue. En partant de ces valeurs, on trouve, pour le diamètre des tourillons des chainons (v. § 79), les deux expressions:

$$\left.\begin{array}{l} d = 0{,}54\sqrt{P} = 457\sqrt{\frac{N}{nR}} \\ \text{et:} \\ d = 0{,}46\sqrt[3]{\frac{l}{R}(PR)} = 41{,}11\sqrt[3]{\frac{l}{R}\frac{N}{n}} \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (146)$$

formules, dans lesquelles on doit faire:

$$\frac{l}{d} = 3, \quad \frac{b}{d} = 2^3/_4, \quad \frac{c}{d} = {}^1/_3, \quad \frac{e}{d} = {}^1/_5, \quad \frac{h}{d} = 2\,{}^1/_6 \quad (147).$$

Pour les poulies très-petites, il convient de prendre:

$$\frac{R}{l} > 5.$$

Dans la pratique, on ne descend pas pour d au-dessous de 8^{mm}, lors même que des dimensions plus faibles seraient suffisantes. Avec la chaine en coin, la limite de l'effort P qu'on puisse transmettre, en le supposant appliqué à la circonférence, se rapproche de 220^k, effort qui, pour une courroie simple, exigerait une largeur de 270^{mm} environ.

(1) V. Annales des Ing. All. 1868. P. 706.

Exemple. On propose de calculer une transmission par chaine en coin pour $N = 20$, $n = 50$, $n_1 = 100$. En supposant le rayon de la plus petite poulie $R_1 = 5l$, la formule (145) donne: $d = 41{,}11 \sqrt[3]{\frac{1}{5} \cdot \frac{20}{100}} = \frac{41{,}11}{\sqrt[3]{25}} = \frac{41{,}11}{2{,}924} = 14{,}06$, *soit* 14^{mm}; *on déduit alors des relations (146):* $l = 3 \cdot 14 = 42^{mm}$, $b = 2^3/_4 \cdot 14 = 38^{mm}$, $c = 5^{mm}$, $e = 3^{mm}$, $h = 2^1/_6 \cdot 14 = 30^{mm}$, $R_1 = 5l = 210^{mm}$, $R = 420^{mm}$.

La transmission par chaine en coin peut être considérée comme la transmission par roue en coin à action indirecte (v. § 155); on doit au même inventeur (Clissold) une autre disposition, dans laquelle la chaine se trouve remplacée par une courroie d'une grande épaisseur à section trapézoïdale; cette forme de courroie a d'ailleurs été abandonnée, en raison de sa faible durée. La transmission par câble rond, avec rainure en coin (v. fig. 416), peut être considérée, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer, comme une forme imparfaite de la transmission par roue en coin à action indirecte (1).

§ 164.

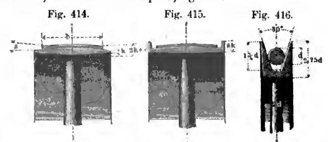
Couronne ou jante d'une poulie.

La jante d'une poulie, destinée à recevoir une courroie plate, présente toujours un léger bombement (fig. 414 et 415), qui a pour but de maintenir cette courroie constamment au milieu de la jante. La flèche s de ce bombement est égale à $^1/_{20}$ de la largeur b de la courroie. Pour les poulies isolées, la largeur B est légèrement supérieure à b et s'élève parfois jusqu'à $^5/_4\, b$; lorsqu'au contraire plusieurs poulies doivent être juxtaposées pour recevoir alternativement la même courroie, on doit leur donner une largeur très-peu supérieure à b. L'épaisseur k du bord de la jante se trouve convenablement déterminée par la relation $k = 2 + \frac{B}{100}$. Les poulies, qui doivent tourner très-rapidement et qui sont exposées à de fortes vibrations, sont

(1) Les expériences de Wedding, constructeur de machines à Berlin, ont montré que, dans une rainure à coin d'un angle de 30° (v. fig. 416), la force nécessaire pour produire le glissement du câble est double de celle qui correspond au glissement dans le cas où le câble repose dans une gorge; c'est là une confirmation de l'exactitude des données précédentes, puisque $\frac{1}{\sin 30^\circ} = {}^1/_2$.

munies de rebords latéraux, comme dans la fig. 415, ou sont remplacées par des poulies à câbles, dont la rainure présente, en section, la forme d'un trapèze, fig. 416.

Fig. 414. Fig. 415. Fig. 416.



Exemple. Une poulie isolée destinée à une courroie de 120^{mm} de largeur peut avoir, d'après ce que nous venons de dire, une largeur de couronne égale à $\frac{5}{4}\cdot 120 = 150^{mm}$ et une épaisseur sur les bords de $2 + 1,5 = 3^{mm},5$; son bombement est de $\frac{120}{20} = 6^{mm}$, de telle sorte que l'épaisseur au milieu, ou $2k + s$, est égale à $2\cdot 3,5 + 6 = 13^{mm}$.

Dans ces dernières années, en garnissant de cuir la jante de la poulie, on est arrivé à obtenir une adhérence notablement plus prononcée, c'est-à-dire à augmenter le coefficient du frottement, qui s'oppose au glissement de la courroie sur la jante. Ainsi, pour une garniture complètement neuve, l'auteur a trouvé le rapport $\frac{T}{t}$ compris entre 6 et 7 (v. la formule 136); après quelque temps de service, cette valeur diminua, mais elle resta comprise entre 4 et 5; l'angle d'enroulement α était égal à π. Le rapport $\frac{T}{t} = 4$ correspond à 0,44 pour le coefficient de frottement et donne sensiblement $\frac{T}{P} = 1,18$; ces valeurs sont très-avantageuses et permettent, dans tous les cas, une réduction de largeur de la courroie. Nous devons faire remarquer qu'on parvient également à augmenter la valeur de $\frac{T}{t}$ et à l'amener à 3,5, 4 et même 5, en saupoudrant de résine sèche la surface de la couronne. En tous cas, pour cet effet spécial, l'emploi d'une garniture en cuir paraît au moins aussi avantageux et il ne présente pas les inconvénients de la résine à d'autres points de vue. On doit d'ailleurs apporter les plus grands soins à la fixation de cette garniture en cuir sur la jante.

§ 165.

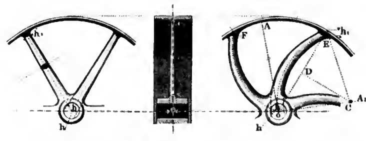
Bras ou rais d'une poulie.

On donne ordinairement aux bras d'une poulie une section ovale, dont la largeur, en chaque point, est la moitié de la hauteur (cette dernière étant mesurée dans le plan de la poulie). Le tracé du profil transversal s'effectue simplement au moyen de deux arcs de cercle, fig. 417, dont les centres se trouvent sur la circonférence décrite sur h' (hauteur de la section) comme diamètre; ces arcs de cercle se raccordent aux extrémités par deux parties arrondies. L'axe d'un bras peut être rectiligne, comme dans la fig. 418, ou simplement courbé, comme dans la fig. 419, ou enfin doublement recourbé (en forme d'un S).

Fig. 417.

La courbure des bras de la seconde espèce peut se déterminer convenablement de la manière suivante. On prend, fig. 419, l'arc AE égal aux $^2/_3$ de l'arc EF de division des bras et on mène à OA la perpendiculaire OA_1, sur laquelle doit se trouver le centre C de l'arc de courbure de l'axe du bras; ce point devant d'ailleurs se trouver sur la perpendiculaire à OE, menée par son milieu D, se trouve complètement déterminé.

Fig. 418. Fig. 419.



En désignant par $\mathfrak{A}$ le nombre des bras, on obtient une division convenable, si on prend:

$$\mathfrak{A} = {}^1/_2 \left(5 + \frac{R}{b}\right) \quad \cdots \cdots \quad (148)$$

relation qui fournit la série des valeurs suivantes :

$\frac{R}{b}$ =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mathfrak{A}$ =	3		4		5		6		7		8		9.

On obtient, en outre, de bonnes dimensions pour les bras, en déterminant leur hauteur h, près du moyeu de la poulie, par la formule :

$$h = 6 + \frac{b}{4} + \frac{1}{10}\frac{R}{\mathfrak{A}} \quad \cdots \cdots \quad (149)$$

et en prenant pour la hauteur, près de la jante, $h' = {}^2/_3\, h$. Ces expressions se déduisent, avec une certaine approximation, de formules plus rigoureuses, qu'on obtient en admettant que la tension, à l'origine du bras, près du moyeu, soit de 2^k. Pour les poulies d'une certaine importance, la formule (149) est directement applicable et la limite de tension est celle que nous venons d'indiquer ; mais, pour les poulies d'un poids peu considérable, il convient, en général, de forcer légèrement les dimensions fournies par le calcul, afin d'obtenir des pièces qui puissent se fondre facilement, sans exiger des précautions spéciales.

1er. Exemple. Une poulie, de 2764mm de diamètre et de 228mm de largeur, porte 6 bras, dont la hauteur, près du moyeu, est de 90mm. D'après la formule (148), le nombre des bras doit bien être, en réalité, de 6 et leur hauteur $h = 6 + \frac{228}{4} + \frac{1}{10}\frac{1382}{6} = 86^{mm}$.

2e. Exemple. Pour $R = 360^{mm}$ *et* $b = 144^{mm}$, *on trouve* $\mathfrak{A} = 4$ *et* $h = 6 + \frac{144}{4} + \frac{1}{10}\frac{360}{4} = 51^{mm}$. *Avec six bras, on aurait simplement* $h = 48^{mm}$.

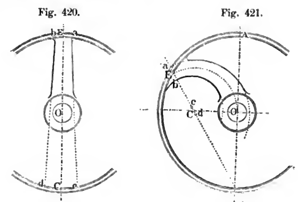


Fig. 420. Fig. 421.

Tracé du profil des bras. — a. *Bras droits*, fig. 420. Après avoir mené le diamètre EOC, on prend $ab = cC = Cd = {}^2/_3\, h$ et on trace les lignes ac et bd, qui fournissent, à droite et à gauche de OE, les limites du profil; il ne reste plus ensuite qu'à raccorder ces lignes, par des congés, à la couronne et au moyeu. b. *Bras courbes*, fig. 421. Le centre C étant déterminé, comme nous l'avons indiqué, on mène la droite ad, puis on prend $aE = Eb = \frac{h}{3}$ et $Cc = Cd = \frac{h}{6}$; les points c et d sont alors les centres des cercles destinés à former les courbes limites du profil, tandis que cb et da sont les rayons de ces mêmes cercles.

§ 166.

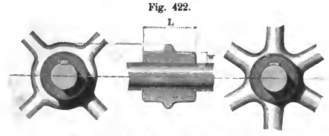
Moyeu d'une poulie.

On donne généralement au moyeu d'une poulie la forme d'un cylindre, qu'on raccorde par des congés avec les naissances des bras. L'épaisseur de la paroi du moyeu, calé sur un arbre de diamètre d, est donnée par l'expression:

$$w = 10 + \frac{d}{6} + \frac{R}{50} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (150)$$

quant à la longueur L du moyeu, elle ne doit pas être inférieure à 2,5 w; assez souvent elle est égale à la largeur même de la jante b, comme, par exemple, dans les poulies folles.

Fig. 422.



1er. Exemple. La poulie du 2e. exemple du paragraphe précédent est calée sur un arbre de 60mm. D'après la formule (150), son moyeu doit avoir, pour épaisseur, $w = 10 + \frac{60}{6} + \frac{360}{50} = 27^{\text{mm}}$ *et, pour longueur,* $2{,}5 \cdot 27$, *soit* 67^{mm}.

Dans les poulies folles, le diamètre intérieur du moyeu doit être légèrement supérieur à celui de l'arbre sur lequel il repose;

le plus souvent ce moyeu est garni d'une bague de bronze ou de métal blanc.

Les clavettes, que l'on emploie pour la fixation des poulies sur leurs arbres, appartiennent à la catégorie des clavettes de torsion (v. § 90); pour les poulies légères, on fait généralement usage de clavettes creuses; pour les poulies de dimensions moyennes, on ménage sur l'arbre un plat, tandis que pour les poulies de grands diamètres, les clavettes sont noyées dans une doublure rainure, pratiquée à la fois sur l'arbre et dans le moyeu. La largeur s et l'épaisseur s_1 de la clavette sont données respectivement par les formules:

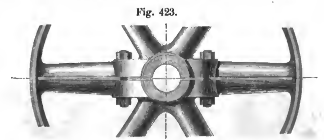
$$\left.\begin{aligned} s &= 4 + \frac{d}{5} \\ s_1 &= 4 + \frac{d}{10} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (151)$$

quant à l'inclinaison, elle varie de $^1/_{100}$ à $^1/_{200}$.

2°. *Exemple. Pour la poulie précédente la clavette doit avoir, comme largeur,* $s = 4 + \frac{60}{5} = 16^{mm}$ *et, comme épaisseur,* $s_1 = 4 + \frac{60}{10} = 10^{mm}$.

Dans ces derniers temps, on a fait assez fréquemment usage, surtout pour les forces peu considérables, de poulies en deux pièces, fig. 423, qui offrent l'avantage de pouvoir se placer sur les arbres plus facilement que les autres poulies.

Fig. 423.



Avec les poulies de ce genre, on supprime assez souvent la clavette de fixation, en raison de ce que les boulons d'assemblage des deux moitiés permettent d'obtenir un serrage du moyeu sur l'arbre, suffisant pour l'empêcher de glisser.

Les deux parties de la poulie sont fondues avec une couronne d'une seule pièce; après l'opération du tournage et de l'alésage, on divise cette couronne en deux, à l'aide d'une série de petits trous juxtaposés, correspondant à la rainure de

séparation des bras. Afin de faciliter l'opération du serrage, on a soin de donner au diamètre d'alésage du moyeu une valeur légèrement inférieure à celle du diamètre de l'arbre. Chacune des deux moitiés du bras, qui correspond à la rainure de séparation, doit présenter sensiblement la même résistance qu'un des autres bras.

§ 167.

Table des poids des poulies.

Les poids des poulies ne peuvent évidemment être calculés d'avance que d'une manière approximative, puisque l'alésage du moyeu dépend de l'arbre et que le poids des bras présente de petites variations, suivant qu'on les fait droits ou courbes. Sous la réserve de cette observation, on peut admettre qu'en moyenne le poids G d'une poulie, établie d'après les règles précédentes, se trouve convenablement représenté par la formule:

$$G = \left[4{,}73\,\frac{R}{b} + 0{,}44\left(\frac{R}{b}\right)^2 + 0{,}09\left(\frac{R}{b}\right)^3\right]b^3 \quad . \quad . \quad (152)$$

où R et b sont exprimés en décimètres. C'est d'après cette formule qu'a été calculée la table suivante.

$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$	$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$	$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$	$\frac{R}{b}$	$\frac{G}{b^3}$
1,0	5,26	2,5	15,98	5,0	45,90	8,25	119,51
1,1	5,86	2,6	16,85	5,2	49,15	8,50	127,26
1,2	6,47	2,7	17,75	5,4	52,54	8,75	135,37
1,3	7,09	2,8	18,67	5,6	56,09	9,00	143,82
1,4	7,73	2,9	19,61	5,8	59,80	9,25	152,63
1,5	8,39	3,0	20,58	6,0	63,66	9,50	161,82
1,6	9,06	3,2	22,59	6,2	67,69	9,75	171,36
1,7	9,75	3,4	24,71	6,4	71,88	10,00	181,30
1,8	10,46	3,6	26,92	6,6	76,26	10,25	191,63
1,9	11,19	3,8	29,27	6,8	80,81	10,50	202,35
2,0	12,66	4,0	31,72	7,0	85,54	11,00	225,06
2,1	12,71	4,2	34,30	7,25	91,72	11,50	249,46
2,2	13,49	4,4	37,00	7,50	98,19	12,00	275,64
2,3	14,30	4,6	39,83	7,75	104,98	12,50	303,65
2,4	15,13	4,8	42,79	8,00	112,08	13,00	333,58

Exemple. Pour la plus grande des poulies du 1er. exemple du § 161, on a $\frac{R}{b} = \frac{520}{120} = 4{,}33$ *et* $b = 120^{mm} = 1^d{,}2$. *D'après la colonne 4 (lignes 12 et 13) le poids approximatif de cette poulie est:* $G = \frac{34{,}30 + 37{,}00}{2} \cdot 1{,}2^3 = 35{,}56 \cdot 1{,}728 = 61^k{,}45$. *Le diamètre de la petite poulie étant de* 260^{mm}, *on a* $\frac{R}{b} = \frac{260}{120} = 2{,}17$ *et son poids est, par suite (col. 2, lignes 12 à 13):* $G = \frac{12{,}71 + 13{,}49}{2} \cdot 1{,}2^3 = 13{,}1 \cdot 1{,}728 = 22^k{,}64$.

XI. Transmission par câbles en fils de fer.

§ 168.

Disposition d'une transmission par câbles métalliques.

Le mode de transmission par câbles métalliques a été appliqué, pour la première fois, vers 1850, par les frères Hirn(1); l'emploi de ce genre de câbles, qui permet d'effectuer à de grandes distances (1000 mètres et au delà) la transmission de forces considérables, sans pertes notables, repose essentiellement sur les mêmes principes que la transmission par courroie; il n'en diffère, en définitive, qu'en ce que la courroie est remplacée par un câble en fils de fer, dont la tension est due à son propre poids.

Les deux poulies principales d'une transmission par câbles ont généralement leurs axes parallèles, ainsi qu'un plan moyen commun, de telle sorte que le câble se trouve guidé de lui-même. De plus, les axes de ces poulies se trouvent ordinairement dans un même plan horizontal et donnent, dans ce cas, ce qu'on appelle une transmission horizontale par câble. Une certaine inclinaison du plan de ces axes, par rapport à la surface du sol, constitue une transmission oblique. Les transmissions verticales par câbles sont d'un usage très-peu répandu. Lorsque la poulie menée doit transmettre à un nouvel arbre moteur la force qu'elle reçoit, la transmission est dite composée. Dans la transmission simple par câble, les deux poulies ont ordinairement le même diamètre.

(1) Dans cette première application, les axes des poulies présentaient un écartement de 85^m; le travail transmis était de 42 chevaux, avec une vitesse de rotation de 60 tours par minute.

Pour éviter que le câble, placé à une hauteur insuffisante, ne vienne toucher le sol, lorsque l'écartement des poulies est considérable, il convient de soutenir ce câble par des galets, qui peuvent être utilisés comme rouleaux-tendeurs, dans le cas où cet écartement est, au contraire, très-faible. L'inclinaison plus ou moins considérable, qu'on peut donner à ces galets, permet de guider convenablement le câble, dans le cas où les axes des poulies se coupent ou se croisent; on rencontre d'ailleurs très-peu d'exemples de l'application de la transmission par câbles à des axes non parallèles. Lorsqu'il s'agit de produire une assez forte déviation du câble, on peut interposer entre deux rouleaux-guides verticaux un rouleau horizontal, mais il est préférable, dans ce cas, de recourir à l'emploi d'une transmission composée avec roues d'angles.

La limite inférieure pour l'écartement des poulies, dans la transmission par câble, peut être évaluée à 15 ou 20 mètres.

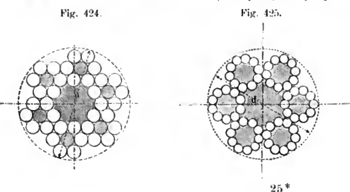
Les distances des rouleaux-supports se déterminent d'après le degré de flexibilité du câble et sa position au-dessus du sol.

§ 169.

Tensions d'un câble de transmission.

Les câbles de transmission, tels qu'on les emploie ordinairement, se composent de 36 fils de fer, divisés en 6 torons, dont chacun comprend 6 fils, enroulés autour d'une âme en chanvre; les six torons sont eux-mêmes disposés autour d'une âme, également en chanvre, d'un diamètre relativement considérable, fig. 424. Dans le cas où veut renforcer le câble, on peut, ce qui parait

Fig. 424. Fig. 425.



être sans inconvénients, remplacer cette âme centrale par un véritable toron en fils de fer, identique aux six autres. On a même proposé de remplacer par un fil métallique l'âme en chanvre des divers torons, afin d'éviter le relachement du câble, qui peut tendre à se produire par suite de l'usure du chanvre. On n'est pas encore fixé sur la valeur de cette disposition, qui a l'inconvénient de rendre le câble non élastique; ce qui est moins douteux, c'est qu'il convient de confectionner les âmes avec du chanvre de première qualité, et de ne pas utiliser, pour cet usage, comme on avait l'habitude de le faire à l'origine, les qualités inférieures de cette matière. Les divers fils sont serrés les uns contre les autres le plus possible, de telle sorte que le diamètre du câble terminé n'est, en définitive, que huit fois environ celui d'un fil.

Pour les câbles d'un nombre de fils supérieur à celui que nous venons d'indiquer, on conserve généralement les torons de six fils, avec âme en chanvre; ces torons sont eux-mêmes enroulés autour d'une âme centrale, également en chanvre.

Bien que rien n'implique la nécessité de conserver le nombre six pour le nombre des torons, c'est cependant ce nombre qu'on rencontre dans les divers câbles; dans les divers types employés, le nombre total des fils est de 36, 48, 54, 60, 66, 72 etc.

La fig. 425 représente, en coupe, un câble à 60 fils. Dans ces différents câbles, le diamètre extérieur d, rapporté au diamètre δ du fil, présente les valeurs suivantes:

pour le nombre de fils:

$i =$	36	48	54	60	66	72
$\frac{d}{\delta} =$	8,00	10,25	11,33	12,80	13,25	14,20.

Pour obtenir les tensions T et t du brin conducteur et du brin conduit, fig. 426, il convient d'employer les formules (133), dans lesquelles on doit faire:

$$u = \frac{f_1 D}{2R},$$

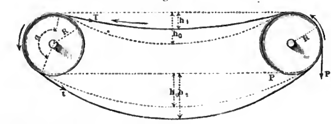
f_1 désignant le coefficient de frottement des tourillons, D le diamètre de ces tourillons et R le rayon des poulies. Dans cette expression de u nous n'avons pas fait entrer la raideur du câble, qui, pour les rapports adoptés, se trouve avoir une valeur très-faible, tout-à-fait négligeable. En moyenne $\frac{D}{R} = \frac{1}{16}$; si on prend ici encore $f_1 = 0,1$, la formule précédente donne:

$$u = 0,003.$$

Si, dans les relations (133), on prend $f = 0,24$ et $\alpha = \pi$, on obtient pour les tensions les plus faibles qu'on puisse adopter:

$$\frac{t}{P} = 0,97, \quad \frac{T}{P} = 2,02, \quad \frac{T+t}{P} = 2,99, \quad \frac{t}{T} = 0,48 \quad . \quad (153)$$

Fig. 426.



nous prendrons en nombres ronds:

$$\frac{t}{P} = 1, \quad \frac{T}{P} = 2, \quad \frac{T+t}{P} = 3, \quad \frac{t}{T} = \frac{1}{2} \quad . \quad . \quad (154).$$

Remarque. La perte de vitesse, due au glissement, que nous avons signalée dans le § 159, n'atteint pas, en moyenne, pour une transmission simple par câbles $^1/_{50}$ p%; elle est, par suite, complètement négligeable.

§ 170.

Calcul des diamètres du câble et des poulies de transmission.

Dans une transmission métallique par câble, comprenant i fils, à la tension T, dans le brin conducteur, correspond dans les fils une tension d'allongement $\mathfrak{S}_1$, qui doit être inférieure à 18^k. En partant de là, on est amené à prendre, pour le diamètre δ de ces fils, les valeurs suivantes:

1°. Pour une résistance P, agissant à la circonférence de la poulie du câble:

$$\delta = 1,60 \sqrt{\frac{1}{i}} \sqrt{\frac{P}{\mathfrak{S}_1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155).$$

2°. Pour une force N en chevaux à transmettre, avec une vitesse v (en mètres) à la circonférence de la poulie:

$$\delta = 13,86 \sqrt{\frac{1}{i}} \sqrt{\frac{N}{\mathfrak{S}_1 v}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

formule dans laquelle v ne doit pas dépasser 30 ou 32 mètres.

3°. Pour une force de N chevaux à transmettre, avec une vitesse de rotation de n tours par minute:

$$\delta = 1349 \sqrt[3]{\frac{1}{i}} \sqrt[3]{\frac{N}{\mathfrak{S}_1 R n}} \quad \ldots \quad (157).$$

4°. En désignant par $s = 18 - \mathfrak{S}_1$ la tension produite dans les fils par l'enroulement du câble autour des poulies et par (PR) le moment statique de rotation de la poulie menée:

$$\delta = 0{,}0634 \sqrt[3]{\frac{1}{i}} \sqrt[3]{\frac{s}{\mathfrak{S}_1}(PR)} \quad \ldots \quad (158).$$

5°. Ou enfin, quand, au lieu du moment PR, on donne N et n:

$$\delta = 5{,}67 \sqrt[3]{\frac{1}{i}} \sqrt[3]{\frac{s}{\mathfrak{S}_1}\frac{N}{n}} \quad \ldots \quad (159).$$

Il importe d'ailleurs que le rapport du rayon R des poulies au diamètre des fils ne soit jamais inférieur à la limite:

$$\frac{R}{\delta} = \frac{10000}{s} \quad \ldots \quad (160).$$

Cette relation a servi à calculer la table suivante:

$\mathfrak{S}_1$	s	$\frac{R}{\delta}$	$\mathfrak{S}_1$	s	$\frac{R}{d}$
0,5	17,5	571	9	9	1111
1	17	588	10	8	1250
2	16	625	11	7	1429
3	15	667	12	6	1667
4	14	714	13	5	2000
5	13	769	14	4	2500
6	12	833	15	3	3333
7	11	909	16	2	5000
8	10	1000	17	1	10000

Pour une valeur constante de $\mathfrak{S}_1 + s$, le minimum du rayon de la poulie est donné par cette table, en faisant $\frac{s}{\mathfrak{S}_1} = 2$ (1). Ce minimum correspond, par suite, à $\mathfrak{S}_1 = 6$, $s = 12$, $\frac{R}{\delta} = 833$; pour

(1) On tire, en effet, des formules (159) et (160), $R = K \sqrt[3]{\frac{1}{s^2 \mathfrak{S}_1}}$; la somme $s + \mathfrak{S}_1$ étant constante, le maximum du produit $s^2 \mathfrak{S}_1$ a lieu pour $\frac{s}{\mathfrak{S}_1} = 2$.

les valeurs voisines de celles-là, la valeur numérique de R diffère très-peu de son minimum. On peut, d'ailleurs, sans inconvénients, prendre R supérieur à cette valeur, lorsqu'on veut, par exemple, utiliser des modèles existants.

§ 171.

Tables relatives aux diamètres des fils de câbles de transmission.

Des deux tables suivantes, la première a été calculée à l'aide des formules (155) à (157), tandis que, pour la seconde, on s'est servi de (158) et (159). Afin d'éviter d'avoir dans la première table des nombres trop petits, la valeur $\frac{N}{\mathfrak{S}_1 R n}$, qui entre dans la formule (157), a été remplacée par $1000 \frac{N}{\mathfrak{S}_1 R n}$.

Diamètre du fil δ pour un nombre de fils					$\frac{P}{\mathfrak{S}_1}$	$\frac{N}{\mathfrak{S}_1 v}$	$\frac{1000\,N}{\mathfrak{S}_1\,R\,n}$
$i = 36$	$i = 42$	$i = 48$	$i = 60$	$i = 72$			
0,5	0,46	0,43	0,39	0,35	3,52	0,047	0,005
0,6	0,55	0,52	0,46	0,42	5,06	0,068	0,007
0,7	0,65	0,61	0,54	0,49	6,89	0,092	0,010
0,8	0,74	0,69	0,62	0,57	9,00	0,121	0,013
0,9	0,83	0,78	0,70	0,64	11,39	0,153	0,016
1,0	0,92	0,87	0,77	0,71	14,06	0,188	0,020
1,2	1,11	1,04	0,93	0,85	20,25	0,279	0,028
1,4	1,29	1,21	1,08	0,99	27,56	0,369	0,039
1,6	1,48	1,39	1,24	1,13	36,00	0,482	0,051
1,8	1,66	1,56	1,39	1,27	45,56	0,610	0,064
2,0	1,85	1,73	1,55	1,41	56,25	0,753	0,079
2,2	2,03	1,91	1,70	1,26	68,06	0,912	0,096
2,4	2,22	2,08	1,86	1,70	81,00	1,085	0,114
2,6	2,40	2,25	2,01	1,84	95,06	1,273	0,134
2,8	2,59	2,42	2,17	1,98	110,25	1,477	0,155
3,0	2,77	2,60	2,32	2,12	126,56	1,700	0,178

Dans les câbles de transmission, on fait rarement usage de fils d'un diamètre inférieur à $0^{mm},5$ ou notablement supérieur à 2^{mm}. Dans notre première table, ainsi que dans la suivante,

toutes les colonnes, depuis la seconde jusqu'à la cinquième, donnent les diamètres des fils, exprimés en centièmes de millimètre; cela tient simplement à ce que les nombres de ces colonnes ont été calculés directement au moyen de ceux de la première, et il est inutile de faire remarquer que, dans la pratique, ils doivent être arrondis. La qualité du fil de fer, employé pour les câbles de transmission, a une très-grande importance au point de vue de leur durée et il convient, par suite, de la choisir avec le plus grand soin. Le meilleur fer à employer, pour ces fils, est le fer de Suède, qui possède à la fois une ténacité spéciale et une très-grande résistance. Les fabricants de câbles doivent surtout s'attacher à n'employer que des fils très-longs, afin de réduire le plus possible le nombre des joints. L'expérience a démontré que, pour les câbles de transmission, l'emploi du fil d'acier était moins avantageux que celui du fil de fer.

Diamètre du fil δ pour un nombre de fils					$\frac{s}{\mathfrak{S}_1}(PR)$	$\frac{s}{\mathfrak{S}_1}\frac{N}{n}$
$i=36$	$i=42$	$i=48$	$i=60$	$i=72$		
0,5	0,47	0,45	0,42	0,40	17 658	0,025
0,6	0,57	0,55	0,51	0,48	30 513	0,043
0,7	0,66	0,64	0,59	0,56	48 451	0,068
0,8	0,76	0,73	0,67	0,63	72 328	0,101
0,9	0,85	0,82	0,76	0,71	102 982	0,144
1,0	0,95	0,91	0,84	0,79	141 265	0,197
1,2	1,14	1,09	1,01	0,95	244 106	0,341
1,4	1,33	1,27	1,18	1,11	387 631	0,542
1,6	1,52	1,45	1,35	1,27	578 621	0,894
1,8	1,71	1,64	1,52	1,43	823 857	1,152
2,0	1,91	1,82	1,69	1,59	1130 120	1,580
2,2	2,09	2,00	1,86	1,75	1504 190	2,103
2,4	2,28	2,18	2,02	1,90	1952 847	2,730
2,6	2,47	2,36	2,19	2,06	2482 874	3,471
2,8	2,66	2,54	2,36	2,22	3101 049	4,335
3,0	2,85	2,73	2,53	2,38	3814 155	5,332

Remarque. (V. § 161). Dans les formules (155) à (157) le rayon R des poulies est supposé connu; les valeurs qu'elles fournissent pour δ ne sont admissibles qu'autant que le rapport

$\frac{R}{\delta}$ donne, pour la tension s, une valeur qui, ajoutée à $\mathfrak{S}_1$, ne dépasse pas 18ᵏ. Dans le cas où la somme $s + \mathfrak{S}_1$ se trouve supérieure à cette limite, il convient de recommencer le calcul, en admettant pour R une valeur plus grande (v. § 173). Pour pouvoir se servir des formules précédentes et des tables qui en dérivent, on doit commencer par fixer la valeur de la tension $\mathfrak{S}_1$. Cette détermination peut se faire très-simplement, en se reportant aux considérations du paragraphe suivant et, dans les exemples que nous allons donner, nous supposerons cette opération préliminaire effectuée.

1ᵉʳ *Exemple. On propose de transmettre, au moyen d'un câble, enroulé sur des poulies de* 3ᵐ, *une force de* 250ᵏ, *agissant tangentiellement à l'une de ces poulies; quel est le diamètre à donner aux fils de ce câble, en supposant qu'ils soient au nombre de 36? Si on fait* $\mathfrak{S}_1 = 7^k$, *on a* $\frac{P}{\mathfrak{S}_1} = \frac{250}{7} = 35{,}71$; *ce qui, d'après la première table (col. 6, ligne 9), correspond à un diamètre de* 1ᵐᵐ,6; *on en déduit:* $\frac{R}{\delta} = \frac{1500}{1{,}6} = 937$; *comme, d'après la table calculée à l'aide de la formule (160), pour* $\mathfrak{S}_1 = 7$ *et* $s = 11$, *on doit avoir:* $\frac{R}{\delta} \geq 909$, *la valeur précédente de* $\frac{R}{\delta}$ *est admissible. Si on avait pris* $R = 1200^{mm}$ *seulement, on arriverait à* $\frac{R}{\delta} = \frac{1200}{16} = 750$, *valeur inférieure à la limite précédente et on devrait, par suite, augmenter le rayon* R.

2ᵉ *Exemple. Transmettre par câble un travail de 300 chevaux. Pour n'avoir pas à employer un câble d'un trop grand diamètre, supposons qu'on lui donne une vitesse* $v = 25^m$; *prenons, en outre,* $\mathfrak{S}_1 = 8$ *et, par suite,* $s = 10$; *nous aurons alors:* $\frac{N}{\mathfrak{S}_1 v} = \frac{300}{8.25} = 1{,}5$. *Dans la première table, le nombre qui s'en rapproche le plus est 1,477 (colonne 7, ligne 15), qui correspond à un diamètre de* 2ᵐᵐ,8 *pour un câble de 36 fils et de* 2ᵐᵐ,17, *soit* 2ᵐᵐ,2, *pour 60 fils. Maintenant, d'après le § 170, pour* $s = 10$, *on doit prendre* $R = 1000.2{,}2 = 2200^{mm}$; *la relation* $v = \frac{2R\pi . n}{60.1000}$ *donne, en outre:* $n = \frac{60.1000.25}{2.2200.\pi} = 108$.

3ᵉ *Exemple. Quel est le travail en chevaux que peut transmettre un câble de 36 fils, de* 2ᵐᵐ *de diamètre, s'enroulant sur des poulies de* 3ᵐ, *dont le nombre de tours est de 90 par minute? On a, dans ce cas,* $\frac{R}{\delta} = \frac{1500}{2} = 750$, *ce qui, d'après la formule (160), donne:* $s = \frac{10000}{750} = 13^k{,}33$ *et, par suite,* $\mathfrak{S}_1 = 4^k{,}67$. *Pour* $\delta = 2^{mm}$, *la première table fournit* $\frac{1000}{\mathfrak{S}_1 R}\frac{N}{n} = 0{,}079$; *d'où on déduit:* $N = \frac{0{,}079.n.\mathfrak{S}_1.R}{1000} = \frac{0{,}079.90.4{,}67.1500}{1000} = 49^{ch}{,}8$.

Avec une poulie de $2^m,5$ *de diamètre, on aurait* $\frac{R}{\delta} = \frac{1250}{2} = 625$ *ou* $s = 16^k$ *et* $\mathfrak{S}_1 = 2^k$; *par conséquent:* $N = \frac{0,079.90.2.1250}{1000} = 17^{ch} \cdot 78$.

4°. Exemple. Sur l'arbre mené d'une transmission par câble, la résistance à vaincre, qui est de 50^k, *agit, d'une façon continue, avec un bras de levier de* 1000^{mm}; *quel diamètre de fil doit-on prendre, pour un câble de 36 fils, en supposant qu'on donne aux poulies de transmission le plus petit rayon admissible? Pour satisfaire à cette dernière condition, on doit, d'après ce que nous avons vu (§ 170), prendre:* $s = 12^k$ *et* $\mathfrak{S}_1 = 6^k$, *ce qui donne* $\frac{s}{\mathfrak{S}_1} PR = 2.50.1000 = 100000$. *A cette valeur correspond, dans la seconde table (colonne 6, ligne 5),* $\delta = 0^{mm},9$: *on tire ensuite de la table du § 170:* $R = 833.0,9 = 750^{mm}$.

5°. Exemple. Un câble de 42 fils doit transmettre un travail de 30 chevaux, avec une vitesse de 100 tours par minute. Si on suppose $\mathfrak{S}_1 = 6^k$, *on a* $s = 12$ *et* $\frac{s}{\mathfrak{S}_1} \frac{N}{n} = 0,6$; *pour ce nombre, qui est compris entre ceux des lignes 8 et 9 de la 7°. colonne, la seconde table donne, pour le diamètre du fil,* $\delta = 1^{mm},4$ *environ. D'après la formule (160), on a alors, pour le rayon des poulies,* $R = 1,4.833 = 1166^{mm}$; *on peut donc prendre* $R = 1200^{mm}$, *en nombre rond.*

§ 172.

Flèches des deux brins d'un câble dans une transmission horizontale. Table relative à ces flèches.

Pour que, dans les deux brins d'un câble de transmission, les tensions T et t aient des valeurs convenables (ni trop petites, car le câble glisserait constamment, ni trop grandes, car les frottements se trouveraient augmentés), la flèche que l'on donne à chacun des deux brins, à l'état de repos, doit avoir une grandeur déterminée; il est également important de connaître les flèches qui se produisent pendant le mouvement, pour pouvoir évaluer l'espace à laisser disponible pour le passage de la transmission. La flèche d'un câble dépend de la tension des fils.

Désignons par

- A l'écartement des poulies d'une transmission horizontale, évalué en mètres.
- h la flèche du câble, également évaluée en mètres (h_1 pour le brin menant, h_2 pour le brin mené, h_0 à l'état de repos).
- $\mathfrak{S}$ la tension par millimètre carré dans ces fils ($\mathfrak{S}_1$ pour le brin conducteur, $\mathfrak{S}_2$ pour le brin conduit, $\mathfrak{S}_0$ à l'état de repos).

Pour un câble métallique, d'un nombre quelconque de fils, on a les relations:

$$\frac{h}{A} = 0{,}3535\left(160\,\frac{\mathfrak{S}}{A} - \sqrt{\left(160\,\frac{\mathfrak{S}}{A}\right)^2 - 1}\right) \quad . \quad . \quad (161)$$

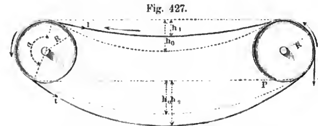
et

$$\frac{\mathfrak{S}}{A} = 0{,}00877\left(\frac{h}{A} + \frac{A}{8h}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (162).$$

C'est au moyen de ces formules qu'a été calculée la table suivante. Comme première approximation, on peut poser simplement:

$$\frac{h}{A} = \frac{1}{912}\,\frac{A}{\mathfrak{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163).$$

Fig. 427.



Pour pouvoir se servir de la table, on doit commencer par former, au moyen des quantités données, le quotient $\frac{A}{\mathfrak{S}}$ de l'écartement des poulies et de la tension développée dans les fils, puis on cherche, dans la table, le nombre qui s'en rapproche le plus; on en déduit alors la valeur de $\frac{h}{A}$, qui sert elle-même à calculer la hauteur de la flèche h. La tension $\mathfrak{S}_0$ du câble à l'état de repos n'est pas la moyenne arithmétique de $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ et on peut, par un moyen d'ailleurs assez compliqué, la déterminer d'après la longueur des deux brins. La valeur dont on a besoin est la flèche h_0 des deux brins en repos et on a approximativement:

$$h_0 = \sqrt{\frac{h_2^{\,2} + h_1^{\,2}}{2}} = 0{,}67\,h_2 + 0{,}28\,h_1 \quad . \quad (164).$$

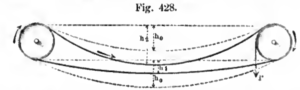
Table relative aux flèches des câbles.

$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{\mathfrak{S}}$	$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{\mathfrak{S}}$	$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{\mathfrak{S}}$	$\frac{h}{A}$	$\frac{A}{\mathfrak{S}}$
0,003	2,74	0,033	29,84	0,063	55,69	0,093	79,33
0,004	3,65	0,034	30,72	0,064	56,52	0,094	80,07
0,005	4,56	0,035	31,61	0,065	57,34	0,095	80,81
0,006	5,47	0,036	32,49	0,066	58,17	0,096	81,54
0,007	6,38	0,037	33,38	0,067	58,99	0,097	82,27
0,008	7,29	0,038	34,26	0,068	59,80	0,098	83,00
0,009	8,20	0,039	35,14	0,069	60,62	0,099	83,72
0,010	9,11	0,040	36,02	0,070	61,43	0,100	84,44
0,011	10,02	0,041	36,91	0,071	62,24	0,101	85,16
0,012	10,93	0,042	37,79	0,072	63,05	0,102	85,88
0,013	11,86	0,043	38,67	0,073	63,85	0,105	88,05
0,014	12,75	0,044	39,51	0,074	64,66	0,110	91,51
0,015	13,66	0,045	40,39	0,075	65,45	0,115	94,85
0,016	14,56	0,046	41,25	0,076	66,25	0,120	98,13
0,017	15,47	0,047	42,12	0,077	67,04	0,125	101,36
0,018	16,37	0,048	42,98	0,078	67,83	0,130	104,42
0,019	17,28	0,049	43,85	0,079	68,62	0,135	107,47
0,020	18,18	0,050	44,71	0,080	69,41	0,140	110,38
0,021	19,08	0,051	45,56	0,081	70,19	0,145	113,23
0,022	19,99	0,052	46,42	0,082	70,97	0,150	116,00
0,023	20,89	0,053	47,27	0,083	71,47	0,155	118,65
0,024	21,77	0,054	48,13	0,084	72,51	0,160	121,17
0,025	22,69	0,055	48,97	0,085	73,28	0,165	123,53
0,026	23,59	0,056	49,82	0,086	74,05	0,170	126,00
0,027	24,48	0,057	50,67	0,087	74,81	0,175	128,27
0,028	25,37	0,058	51,53	0,088	75,57	0,180	130,47
0,029	26,27	0,059	52,35	0,089	76,33	0,185	132,43
0,030	27,16	0,060	53,19	0,090	77,08	0,190	134,46
0,031	28,06	0,061	54,02	0,091	77,84	0,195	136,41
0,032	28,95	0,062	54,86	0,092	78,58	0,200	138,21

Cette expression donne pour h_0 une valeur qui est un peu trop forte, mais qui se rapproche d'autant plus de la valeur véritable que les tensions $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$ sont plus faibles. L'erreur se trouve encore diminuée, lorsqu'on remplace les valeurs exactes de h_1 et h_2 par celles que fournit la formule (163).

Le brin conducteur n'occupe pas nécessairement la position la plus élevée, comme on l'a supposé dans la fig. 427; il peut aussi être placé à la partie inférieure, comme dans la fig. 428, où l'espace, exigé par la flèche du câble, se trouve notablement

Fig. 428.



réduit par rapport à celui de l'autre figure. Les deux brins ne se coupent pas, tant qu'on a $h_2 - h_1 < 2R$. Dans les installations, on place généralement, au point le plus bas de la courbe du câble, une échelle graduée, qui permet d'observer à chaque instant l'état de tension de ce câble; la graduation de cette échelle peut d'ailleurs être faite de manière à donner directement, par une simple lecture, la tension $\mathfrak{S}$.

1er Exemple. Dans le cinquième exemple du § 171, l'écartement A des poulies est supposé de 110m et on prend $\mathfrak{S}_1 = 6^k$; *quelles sont les flèches des brins du câble? (a) Pour le brin conducteur, le rapport* $\frac{A}{\mathfrak{S}} = \frac{110}{6} = 18{,}33$ *correspond très-sensiblement, dans la table (colonne 2, ligne 18), à la valeur* $\frac{h}{A} = 0{,}02$. *On en déduit* $h_1 = 110 . 0{,}02 = 2^m{,}20$. *(b) Pour le brin mené, on a, d'après la formule (154):* $\mathfrak{S} = \frac{6}{2} = 3$ *et, par suite,* $\frac{A}{\mathfrak{S}} = \frac{110}{3} = 36{,}67$; *pour ce rapport la table donne (colonne 4, ligne 9):* $\frac{h}{A} = 0{,}041$, *d'où on déduit* $h_2 = 110 . 0{,}041 = 4^m{,}51$. *(c) Enfin, d'après la formule (164), la flèche du câble à l'état de repos est* $h_0 = 0{,}67 . 4{,}51 + 0{,}28 . 2{,}20 = 3^m{,}64$. *Maintenant on a:* $h_2 - h_1 = 4^m{,}51 - 2^m{,}20 = 2^m{,}31$ *et* $2R = 2 . 1{,}20 = 2^m{,}40$; *cette dernière valeur étant supérieure à la précédente, il en résulte qu'on peut, au besoin, utiliser la disposition de la fig. 428 (v. le 1er exemple du § 173).*

2e Exemple. Dans le troisième exemple du § 171, la hauteur disponible au-dessous de la ligne des centres des poulies est de 3m, quel écartement doit-on adopter pour ces poulies? En supposant que la disposition de la fig. 428 soit applicable, la plus grande valeur admissible pour cet écartement se déduit de la grandeur de la flèche du câble au repos. En faisant

usage de la formule approximative (163) et en nous rappelant que $\mathfrak{S}_1 = 4{,}67$, *nous aurons d'abord* $h_1 = \frac{A^2}{912 . 4{,}67}$, *puis* $h_2 = 2h_1$; *la formule (164) donne alors:* $h_0 = 3^m = \frac{(2 . 0{,}67 + 0{,}28)A^2}{912 . 4{,}67}$, *d'où on déduit:* $A = \sqrt{\frac{3 \cdot 912 \cdot 4{,}67}{1{,}62}} = \sqrt{7887{,}11} = 88^m{,}8$. *L'écartement des poulies doit donc être, dans ce cas, de 88 ou de 89 mètres. Une autre conclusion qu'on peut tirer du calcul, c'est que la disposition de la fig. 428 peut être adoptée dans ce cas, ainsi que nous l'avions supposé tout d'abord.*

§ 174.

Transmission par câble à tension renforcée.

Pour un grand écartement des poulies de transmission, les valeurs des flèches, fournies par les calculs précédents, peuvent être assez considérables pour qu'il devienne indispensable, soit de donner aux massifs des supports une grande élévation, soit d'établir dans le sol un fossé d'une certaine profondeur, lorsqu'on veut se dispenser de faire reposer le câble sur des rouleaux intermédiaires (v. plus bas § 179). Dans un assez grand nombre de cas, on peut arriver au même résultat par un procédé beaucoup plus simple et qui consiste à donner au câble une tension plus considérable que celle qui serait strictement nécessaire pour empêcher le glissement, en ayant soin d'ailleurs de prendre un diamètre de câble suffisant pour tenir compte de cet excès de tension. Cet artifice si simple peut s'employer d'autant plus facilement qu'il s'agit de transmettre des forces moins considérables et que, par suite, le diamètre du câble est plus faible. Il suffit d'ailleurs d'examiner, avec quelque attention, les règles que nous allons donner pour reconnaître que l'emploi rationnel de ce procédé ne présente, en réalité, aucune difficulté.

Une transmission par câble, établie dans ces conditions, constitue, par rapport à la transmission ordinaire par câble, ce qu'on peut appeler une transmission à tension renforcée; on peut la distinguer de la première en affectant du signe s les forces et les dimensions qui s'y rapportent (T_s, t_s, $\mathfrak{S}_s$, δ_s au lieu de T, t, $\mathfrak{S}$, δ). Cela posé, la tension T. dans le mode ordinaire de transmission, doit simplement ne pas être inférieure à $2P$; dans le nouveau procédé, la tension doit être augmentée dans un certain rapport que nous désignerons par m et nous aurons [v. les formules (131)]:

$$T_s = mT, \quad t_s = (2m - 1)t, \quad \frac{t_s}{T_s} = \frac{2m-1}{2m} \quad . \quad . \quad (165).$$

La tension $\mathfrak{S}_1$, dans les fils du brin conducteur, ne doit pas changer; mais, dans les fils du brin conduit, la tension $\mathfrak{S}_{2s}$ n'est plus égale à $\frac{\mathfrak{S}_1}{2}$ et on doit poser:

$$\mathfrak{S}_{2s} = \mathfrak{S}_1 \frac{2m-1}{2m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (166).$$

Le diamètre δ_s du fil se déduit du diamètre δ, donné par l'une des formules de (155) à (157), au moyen de la relation:

$$\delta_s = \delta \sqrt{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167).$$

Si, au contraire, δ a été calculé par l'une des formules (159) ou (161), il faut prendre:

$$\delta_s = \delta \sqrt[3]{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168).$$

$m = \frac{T_s}{T}$	$\frac{T_s}{P}$	$\frac{t_s}{t} = \frac{t_s}{P} = \frac{\mathfrak{S}_{2s}}{\mathfrak{S}_2}$	$\frac{\mathfrak{S}_{2s}}{\mathfrak{S}_1} = \frac{t_s}{T_s}$	$\frac{\delta_s}{\delta} = \sqrt{m}$	$\frac{\delta_s}{\delta} = \sqrt[3]{m}$
1,2	2,4	1,4	0,58	1,10	1,06
1,4	2,8	1,8	0,64	1,18	1,12
1,6	3,2	2,2	0,69	1,26	1,17
1,8	3,6	2,6	0,72	1,34	1,22
2,0	4,0	3,0	0,75	1,41	1,26
2,2	4,4	3,4	0,77	1,48	1,30
2,4	4,8	3,8	0,79	1,55	1,34
2,6	5,2	4,2	0,81	1,61	1,38
2,8	5,6	4,6	0,82	1,67	1,41
3,0	6,0	5,0	0,83	1,73	1,44
3,2	6,4	5,4	0,84	1,79	1,47
3,4	6,8	5,8	0,85	1,84	1,50
3,6	7,2	6,2	0,86	1,90	1,53
3,8	7,6	6,6	0,87	1,95	1,56
4,0	8,0	7,0	0,88	2,00	1,59
4,2	8,4	7,4	0,88	2,05	1,61
4,4	8,8	7,8	0,89	2,10	1,64
4,6	9,2	8,2	0,89	2,14	1,66
4,8	9,6	8,6	0,90	2,19	1,69
5,0	10,0	9,0	0,90	2,24	1,71
5,5	11,0	10,0	0,91	2,36	1,75
6,0	12,0	11,0	0,92	2,45	1,82
6,5	13,0	12,0	0,92	2,55	1,87
7,0	14,0	13,0	0,93	2,65	1,91
7,5	15,0	14,0	0,93	2,74	1,96
8,0	16,0	15,0	0,94	2,83	2,00

C'est au moyen des relations précédentes qu'ont été calculés les nombres de la table ci-dessus. Il importe de remarquer que, dans les câbles à tension renforcée, les fils ne se trouvent pas soumis à des efforts plus considérables que dans les câbles ordinaires, puisque leur diamètre est déterminé en tenant compte de l'excès de tension. En d'autres termes, le câble est plus lourd que dans le cas normal et, en raison de la plus grande section qu'il présente, il doit être plus fortement tendu, ce qui a pour conséquence de réduire dans une certaine proportion la hauteur de la flèche du brin mené.

1er Exemple. Le brin mené, dans le 1er exemple du § 172, avait une flèche h_2 égale à $4^m,5$, et le diamètre du fil δ était de $1^{mm},4$. Cette dimension doit être augmentée, si on veut obtenir une diminution de la valeur de h_2, en faisant usage d'un câble à tension renforcée. Si on prend $m = 2$, la table donne (colonne 4, ligne 5): $\mathfrak{S}_{2s} = 0,75\ \mathfrak{S}_1 = 0,75 \cdot 6 = 4$ et, par suite, $\frac{A}{\mathfrak{S}_{2s}} = \frac{110}{4,5} = 24,44$; à ce nombre correspond, dans la table du § 172, $h_2 = 0,027 \cdot 110 = 2^m,97$. La tension de flexion s conservant la valeur qu'elle avait primitivement, le quotient $\frac{s}{\mathfrak{S}_1} \frac{N}{n}$ ne change pas et, par suite, δ peut être déterminé par la formule (159). La table précédente donne alors (colonne 6, ligne 5): $\delta_s = 1,26\ \delta = 1,26 \cdot 1,4 = 1^{mm},76$, soit $1^{mm},8$.

Lorsque, dans le calcul du diamètre δ pour un câble ordinaire à 36 fils, on arrive à une valeur très-faible, le câble lui-même peut se trouver avoir un diamètre tellement petit que son exécution entraine une dépense presque aussi considérable que celle d'un câble d'un plus grand diamètre. Dans les cas de ce genre, on ne saurait donc trop recommander l'emploi d'une transmission par câble à tension renforcée, qui présente l'avantage de réduire la flèche du bras mené, sans augmenter la dépense d'une manière appréciable. En partant de là, on peut poser comme règle de n'employer jamais de fil d'un diamètre inférieur à 1^{mm}, de telle sorte que le minimum de diamètre des câbles soit de 8^{mm}. L'adoption de cette limite a pour résultat de simplifier, dans une certaine mesure, la fabrication des transmissions par câbles.

2e Exemple. Pour une transmission par câble, on donne: $N = 5^{ch},5$, $n = 100$, $A = 180^m$. Si on suppose d'abord $\mathfrak{S}_1 = 10$, $s = 8$, on a: $\frac{s}{\mathfrak{S}_1} \frac{N}{n} = \frac{8}{10} \frac{5,5}{100} = 0,044$, ce qui, pour $i = 36$ (2e table, § 171), donne, pour le diamètre du fil, $\delta = 0^{mm},6$. On a, en outre: $\frac{A}{\mathfrak{S}_1} = \frac{180}{10} = 18$, $\frac{A}{\mathfrak{S}_2} = \frac{180}{5} = 36$

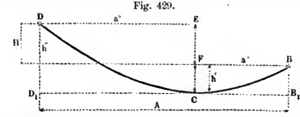
et, par suite (v. la table du § 172), $h_1 = 0{,}0198 \cdot 180 = 3^m{,}56$, $h_2 = 0{,}04 \cdot 180 = 7^m{,}2$, $h_2 - h_1 = 7{,}20 - 3{,}56 = 3^m{,}64$. *Mais, comme en même temps* $R = 1250 \cdot 0{,}6 = 750^{mm}$, *il en résulte que* $h_2 - h_1$ *est plus grand que* $2R$; *dans ce cas, on ne pourrait pas placer le brin conduit à la partie supérieure et les axes des poulies devraient, par suite, être établis, au-dessus du sol, à une hauteur au moins égale à* $R + h_2 = 0{,}75 + 7{,}2 = 7^m{,}95$. *Admettons maintenant qu'on donne au câble un diamètre de* 8^{mm} *au lieu de* $8 \times 0{,}6 = 4^{mm}{,}8$, *c'est-à-dire qu'on prenne* 1^{mm} *pour le diamètre des fils. On a alors* $\delta_s = \frac{1}{0{,}6} = 1{,}67\ \delta$, *et, d'après la table précédente (ligne 18, colonne 6 et 4),* $\mathfrak{S}_{2s} = 0{,}89 \cdot \mathfrak{S}_1 = 0{,}89 \cdot 10 = 8{,}9$; *par conséquent* $\frac{A}{\mathfrak{S}_{2s}} = \frac{180}{8{,}9} = 20{,}22$ *et* $h_{2s} = 0{,}0228 \cdot 180 = 4^m{,}01$, $h_{2s} - h_1 = 4{,}01 - 3{,}56 = 0^m{,}45$; *comme d'ailleurs* $R = 1250 \cdot \delta_s = 1250$ *et* $2\,R = 2^m{,}5$, *l'inégalité* $h_{2s} - h_1 < 2\,R$ *est ici satisfaite et on peut placer le brin mené à la partie supérieure. Le maximum de flèche correspond, dans ce cas, à l'état de repos, pour lequel on a, d'après la formule (164):* $h_{0s} = 3^m{,}88$: *la hauteur à laquelle doivent être établis les axes des poulies, au-dessus du sol, est alors* $h_{0s} + R = 3{,}88 + 1{,}25 = 5^m{,}13$, *c'est-à-dire inférieure de* $2^m{,}82$ *à celle qui était nécessaire dans la première hypothèse.*

§ 174.

Transmission par câble inclinée.

De toutes les dispositions qu'on peut employer dans les transmissions par câbles, celle qui a pris le plus grand développement correspond au cas où les axes des deux poulies sont placés à des niveaux différents et constitue, par suite, ce qu'on appelle la transmission inclinée. Nous allons donner ici les règles applicables à l'établissement de cette disposition. Dans le câble BCD_1 fig. 429, qui fait partie d'une transmission inclinée, le sommet C de la courbe de l'axe du câble ne tombe pas au milieu

Fig. 429.



de la distance comprise entre les verticales des points de suspension et les flèches sont nécessairement différentes de celles d'un câble appartenant à une transmission horizontale. Toutefois,

ces flèches et les abscisses du sommet peuvent se déterminer facilement, comme nous allons l'indiquer, en fonction des éléments d'une transmission horizontale, ayant le même écartement de poulies et présentant très-sensiblement le même degré de tension.

Soient:

h et A la flèche du câble et l'écartement des poulies d'une transmission horizontale,

$\mathfrak{S}$ la tension correspondant au point de suspension du brin considéré,

h' et h'' la plus petite flèche et la plus grande (FC et EC) dans une transmission inclinée, pour laquelle la distance des poulies, mesurée horizontalement, est égale à A,

a' et a'' les distances CB_1 et CD_1 du sommet de la courbe aux verticales des points de suspension,

$\mathfrak{S}'$ et $\mathfrak{S}''$ les tensions (en B et D) aux points de suspension inférieur et supérieur,

H la différence de niveau (EF) de ces points de suspension.

On commence par déterminer, au moyen des règles indiquées précédemment, les valeurs h et $\mathfrak{S}$ et on a alors:

$$h' = h\left(1 + \frac{1}{16}\frac{H^2}{h^2}\right) - \frac{H}{2},\ h'' = H + h' \ . \ . \quad (169)$$

$$a' = \frac{A}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{H}{h}\right),\quad a'' = A - a' \ . \ . \ . \quad (170)$$

$$\mathfrak{S}' = \mathfrak{S} - \frac{h - h'}{114},\ \mathfrak{S}'' = \mathfrak{S} + \frac{h'' - h}{114},\ \mathfrak{S}'' - \mathfrak{S}' = \frac{H}{114} \ . \quad (171).$$

Dans certains cas, la valeur de a' peut être négative; le sommet de la courbe du câble prolongée se trouve alors au delà de la poulie située au niveau le plus bas. La tension de flexion s et, par suite, le diamètre des poulies se déterminent, quand on a calculé la tension $\mathfrak{S}''$, qui le plus souvent est très-peu différente de $\mathfrak{S}$. La différence entre ces deux valeurs ne devient, en réalité, importante que dans le cas où plusieurs transmissions inclinées se succèdent sur le même câble ascendant. La différence entre la tension du point de suspension le plus bas et celle du point le plus haut se trouve ensuite exprimée par le rapport de la différence de niveau de ces deux points à 114^{m}.

Exemple. Une transmission par câble, dont les données sont celles du 5e exemple du § 171 et du § 172, a ses poulies établies à des hauteurs différentes; en supposant la différence de niveau égale à 5m, on demande les valeurs des flèches et les positions des sommets de la courbe du câble?

(a) Pour le brin menant, on a: $\mathfrak{S}_1 = 6$, $h_1 = 2^m,20$, $H = 5^m$, $A = 110^m$; *en partant de la poulie la plus rapprochée du sol, les formules (169) donnent:* $h'_1 = 2,2\left(1 + \frac{1}{16}\,\frac{5^2}{2,2^2}\right) - \frac{5}{2} = 2,91 - 2,5 = 0^m,41$, $h''_1 = 5 + 0,41 = 5^m,41$; $a'_1 = \frac{110}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{5}{2,2}\right) = 55 \cdot 0,432 = 23^m,76$, $a''_1 = 110 - 23,76 = 86^m,24$.

(b) Pour le brin mené, $\mathfrak{S}_2 = 3$, $h_2 = 4^m,51$ *et, par suite,* $h'_2 = 4,51\left(1 + \frac{1}{16}\,\frac{5^2}{4,51^2}\right) - \frac{5}{2} = 4,86 - 2,50 = 2^m,36$. $h''_2 = 5 + 2,36 = 7^m,36$.

(c) Enfin, pour le câble à l'état de repos, $h_0 = 0,67 \cdot 4,5 + 0,28 \cdot 2,2 = 3^m,64$, *par conséquent,* $h'_0 = 3,64\left(1 + \frac{1}{16}\,\frac{5^2}{3,64^2}\right) - \frac{5}{2} = 4,07 - 2,50 = 1^m,43$, $h''_0 = 5 + 1,43 = 6^m,43$; $a'_0 = \frac{110}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{5}{3,64}\right) = 55.0,657 = 36^m,14$, $a''_0 = 110 - 36,14 = 73^m,86$.

Les tensions dans le brin conducteur sont les suivantes: $\mathfrak{S}'_1 = 6 - \frac{2,2 - 0,41}{114} = 6 - 0,007 = 5,993$, $\mathfrak{S}''_1 = 6 + \frac{5,41 - 2,2}{114} = 6 + 0,028 = 6,028$; *ces deux derniers nombres diffèrent assez peu de 6 pour qu'on puisse négliger cette différence. Même pour trois renvois successifs, offrant chacun la même grandeur que le câble précédent, on pourrait ne pas tenir compte de la variation de tension.*

Les hauteurs, que fournit le calcul, pour les flèches d'une transmission inclinée, doivent être, autant que possible, reportées dans le tracé, à une échelle triple ou quintuple de celle des lignes horizontales; on trace ensuite la courbe du câble comme un arc de parabole (v. le paragraphe suivant) et on vérifie si la disposition du terrain se prête à l'installation de la courbe obtenue. S'il n'en est pas ainsi, on doit recommencer le calcul, en adoptant de nouvelles valeurs pour la tension, jusqu'à ce qu'on arrive à une courbe satisfaisant aux conditions d'emplacement. Avec quelque habitude, on arrive rapidement à déterminer, par un simple coup d'œil, les quantités à admettre, de sorte qu'en réalité ce procédé ne présente aucune difficulté.

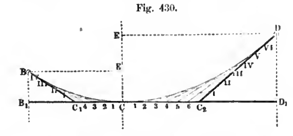
§ 175.

Tracé des courbes de câbles.

Le tracé d'une courbe de câble s'effectue, avec une approximation très-satisfaisante, en assimilant cette courbe à un arc de parabole ordinaire. Après avoir déterminé, fig. 430, le sommet C d'un brin BCD (v. le § précédent), on partage en deux parties égales, aux points C_1 et C_2, les deux segments B_1C et D_1C de

la distance horizontale $B_1 D_1$, tangente à la courbe à son sommet, et, par les points C_1 et C_2, on mène les lignes $B C_1$ et $D C_2$,

Fig. 430.



qui donnent les directions du brin aux deux points où il quitte les poulies. On partage ensuite les longueurs $C C_1$ et $C_1 B$ en un même nombre de parties égales aux points 1, 2, 3... et I, II, III...; en joignant 1 II, 2 II, 3 III etc., on obtient une série de lignes enveloppes tangentes à la parabole cherchée. En opérant de même pour $C C_2 D$, on détermine l'autre partie de la courbe du câble. Lorsque le sommet C tombe en dehors des poulies, du côté de celle qui est au niveau le plus bas, une partie de la parabole dans le voisinage de ce sommet, ne se trouve pas utilisée, mais la construction ne se trouve en rien modifiée.

§ 176.

Transmission par câble pour un faible écartement de poulies.

Lorsque l'écartement des poulies d'une transmission par câble est peu considérable, il convient de s'attacher avant tout à ce que les flèches aient une assez grande valeur, afin que le câble s'enroule convenablement et qu'on puisse le raccourcir, sans avoir à redouter le danger d'augmenter notablement la tension. On adopte alors, pour $\mathfrak{S}_1$, une valeur très-faible et on s'arrange de manière à obtenir, pour la flèche, une valeur déterminée; puis, au moyen de la formule (161) et de la table qu'on en a déduite, on obtient $\mathfrak{S}_1$; i et R se calculent ensuite, comme nous l'avons indiqué précédemment. Pour une résistance tangentielle d'assez faible importance et un petit écartement de poulies, la transmission par câble peut encore être réalisée dans des conditions assez satisfaisantes.

Exemple. Un câble doit transmettre, à une distance de 20 mètres, un travail de 6 chevaux, avec une vitesse de rotation de 180 tours par minute; de plus, le brin menant doit présenter une flèche de 1ᵐ. On a alors $\frac{h}{A} = 0{,}05$, *valeur qui, d'après le § 172, correspond à* $\frac{A}{\mathfrak{S}} = 44{,}71$, *d'où on déduit, pour la tension,* $\mathfrak{S}_1 = \frac{20}{44{,}71} = 0{,}45$. *Afin de pouvoir déterminer* δ *au moyen de la table du § 171, il est nécessaire de connaître la valeur de s; en admettant, comme précédemment, que la somme* $s + \mathfrak{S}_1$ *doit être égale à* 18^k, *on a:* $s = 17{,}55$, *ce qui donne:* $\frac{s}{\mathfrak{S}_1}\frac{N}{n} = \frac{17{,}55 \cdot 6}{0{,}45 \cdot 150} = 156$; *on tire alors de la seconde table du § 171 (col. 7, ligne 11):* $\delta = 2^{mm}$ *pour* $i = 36$. *D'après la formule (160), on doit prendre:* $R = 2\,\frac{10000}{17{,}55} = 1140^{mm}$ *environ; ces deux dernières dimensions de* δ *et de R sont admissibles. Si on voulait que* $d = 8\delta$ *fût égal à* 12^{mm}, *c'est-à-dire que* δ *fût réduit à* $1^{mm},5$, *il suffirait de donner à R une valeur plus considérable; dans ce cas, la table du § 171 (colonne 7, lignes 8 et 9) fournirait* $\frac{s}{\mathfrak{S}_1}\frac{N}{n} = 0{,}718$ *et, par suite,* $s = 0{,}718\ \mathfrak{S}_1 \frac{n}{N} = 0{,}718 \cdot 0{,}45 \cdot 25 = 8{,}08$; *en portant cette dernière valeur et celle de* δ *dans la formule (160), on trouve:* $R = \frac{1{,}5 \cdot 10000}{8{,}08} = 1856^{mm}$. *Il peut se faire que, dans le cas dont il s'agit, des poulies d'un aussi grand rayon ne puissent pas s'établir convenablement et que, par conséquent, on soit obligé de recourir aux valeurs que nous avons précédemment trouvées et qui fournissent des poulies d'un diamètre convenable, ainsi que des flèches suffisamment grandes. Pour la transmission de forces considérables, on n'obtient de bons résultats qu'à la condition, d'ailleurs facile à réaliser, de donner aux poulies une vitesse de rotation convenable. Les limites auxquelles on doit avoir égard, dans ce cas, se trouvent indiquées à la fin du paragraphe suivant.*

§ 177.

Couronne ou jante d'une poulie de câble.

Au début les jantes des poulies de câbles étaient en bois, recouvert d'une garniture de cuir; mais la pratique n'a pas tardé à démontrer que les couronnes métalliques étaient bien préférables, et aujourd'hui ce sont ces dernières qu'on emploie, presque exclusivement, dans toutes les installations qui doivent être de longue durée. Les fig. 431 et 432 représentent deux couronnes en fonte, l'une simple, l'autre double. Les faces de la rainure de la première sont inclinées, toutes les deux, de 30° sur le plan moyen de la poulie. Dans la couronne double, une semblable inclinaison entraînerait un poids trop considérable pour la saillie du milieu;

aussi convient-il de donner aux faces de cette saillie une inclinaison moindre qu'aux deux autres; dans la figure 432 (qui cor-

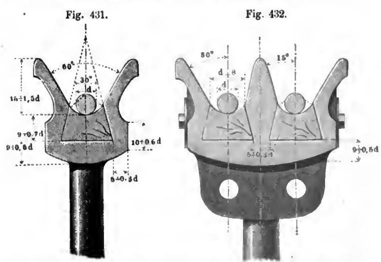


Fig. 431. Fig. 432.

respond à une poulie de grandes dimensions), cette inclinaison n'est, en réalité, que de 15°. Tous les nombres proportionnels, indiqués sur les deux figures, sont rapportés au diamètre d du câble. Comme on emploie très-rarement des câbles d'un diamètre inférieur à 10 mm, il en résulte que généralement la valeur d = 10 mm peut être considérée comme la limite inférieure du module de construction des poulies. Le fond de chaque rainure se termine par une entaille en queue d'hironde, destinée à recevoir une garniture, qui se compose, soit d'une bande de gutta-percha (fig. 431), fortement tassée, soit d'une série de petites douves en bois de saule, qu'on introduit successivement dans l'entaille par une ouverture latérale ménagée sur le pourtour de la couronne et qu'on bouche après coup, au moyen d'une pièce rapportée; la fig. 432 présente deux ouvertures de ce genre et les pièces qui les ferment sont réunies par des boulons. Pour les câbles d'un très-grand poids, on est revenu, dans ces derniers temps, à l'emploi de la garniture en cuir; on utilise très-avantageusement, dans ce but, les vieilles courroies grasses, qu'on découpe en lanières et qu'on introduit dans l'entaille parallèlement à son plan moyen. Le professeur Fink a employé avec succès une garniture composée de ficelle, qu'on enroule sur le fond de

l'entaille et qui, par la compression, ne tarde pas à former une masse très-résistante. La garniture en liége est d'un prix très-modéré, mais elle n'a pas été suffisamment expérimentée pour les transmissions par câbles, exposées à des glissements. Lorsqu'on fait usage de ficelle, la profondeur de l'entaille, au-dessous du câble, peut être plus faible que ne l'indiquent les nombres inscrits sur les figures précédentes. Dans les trois premiers modes de garnitures (gutta-percha, bois et cuir), le profil de la rainure proprement dite, dans laquelle se place le câble, peut être tourné, après l'introduction de la garniture. Les poulies de 4 à 5^m de diamètre sont ordinairement fondues en deux pièces (disposition qui déjà se trouve motivée par la question de transport sur les chemins de fer); des saillies transversales, ménagées sur la couronne et le moyeu permettent de réunir les deux moitiés de la poulie par des boulons.

Pour que la force centrifuge ne devienne pas une cause de danger sérieux pour la jante, il convient de ne pas dépasser 30 à 32^m, pour la vitesse à la circonférence, ainsi que d'ailleurs nous l'avons déjà fait remarquer au § 170. La vitesse de 28^m, qu'on adopte souvent aujourd'hui pour les câbles, paraît n'entraîner aucun inconvénient.

§ 178.

Bras et moyeu d'une poulie de câble.

Pour les poulies de câbles, le corps est ordinairement en fonte, comme la couronne; toutefois, dans les poulies-supports on rencontre aussi des bras en fer forgé, encastrés dans la fonte du moyeu et de la couronne (v. fig. 446). Dans les deux cas, le nombre $\mathfrak{A}$ des bras de la poulie est donné par la relation:

$$\mathfrak{A} = 4 + \frac{1}{40}\frac{R}{d} \quad \ldots \ldots \quad (172).$$

Les bras en fonte sont à section en croix ou ovale; dans les deux cas, la hauteur h de cette section, dans le plan moyen de la poulie, a pour expression:

$$h = 4d + \frac{1}{4}\frac{R}{\mathfrak{A}} \quad \ldots \ldots \quad (173).$$

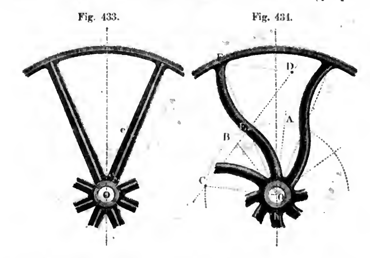
Dans la section en croix, l'épaisseur de la nervure principale $e = \frac{h}{5}$ et celle des nervures secondaires $e' = {}^2/_3\, e$. Pour

la section ovale, la largeur est, en chaque point, la moitié de la hauteur, comme dans les poulies à courroies. Près de la couronne, cette hauteur n'est plus que les deux tiers de sa valeur mesurée près du moyeu.

Les bras à section en croix sont droits et généralement au nombre de huit, fig. 433, tandis que ceux à section ovale sont courbés, soit une seule fois (d'après les règles du § 165), soit deux fois, comme dans la fig. 434.

Pour arriver, dans ce second cas, à déterminer une courbure convenable, on commence par décrire un cercle avec le rayon $OA = \frac{R}{2}$, puis on porte sur ce cercle des longueurs AB, BC, etc. correspondant à la division des bras; on trace alors l'arc OE représentant la courbure d'une partie du bras, exactement comme on l'a fait dans le § 165 pour le bras à une seule courbure. Par le centre de courbure C de cet arc (qui pour

Fig. 433. Fig. 434.



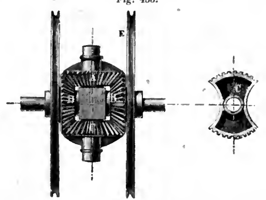
8 bras se trouve précisément sur la circonférence ABC), on mène la ligne CED et, en prenant $ED = EC$, on obtient le second rayon de courbure correspondant à la partie EF du bras. Pour tracer ensuite les courbes limites du profil du bras, il suffit de suivre la méthode indiquée au § 165, en remarquant que les centres des cercles, qui forment ces courbes limites, se trouvent sur CD.

Lorsqu'on fait usage de bras droits, il convient de fondre le moyeu, en ménageant des rainures, qu'on garnit ensuite avec des cales, lesquelles se trouvent solidement maintenues par deux anneaux en fer, rapportés à chaud, de manière à produire un serrage énergique. Les dimensions du moyeu se déterminent de la même manière que pour les poulies à courroies (v. § 166).

Exemple. *Dans une transmission par câble, on a à établir une poulie en fonte, de* 1250^{mm} *de rayon, supportée par un arbre de* 120^{mm} *de diamètre et destinée à recevoir un câble de* 12^{mm}. *D'après la formule (172), le nombre de bras de cette poulie sera égal à* $4 + \frac{1}{40}\frac{1250}{12} = 6,6$, *ou 7 et, d'après (173), on devra prendre, pour la hauteur de chaque bras à l'origine:* $h = 4 \cdot 12 + \frac{1250}{4 \cdot 7} = 48 + 45 = 93^{mm}$. *La formule (150) donne, pour l'épaisseur de la paroi du moyeu:* $w = 10 + \frac{120}{6} + \frac{1250}{50} = 10 + 20 + 25 = 55^{mm}$; *quant à sa longueur L, elle doit être au moins égale à* $2,5 \cdot 55$, *soit* 140^{mm}.

Pour les transmissions très-importantes, il est prudent d'avoir un câble de réserve, c'est-à-dire de répartir la force sur deux câbles, d'une force suffisante pour qu'un seul puisse transmettre toute la force. C'est ce qu'on a fait dans l'installation d'une transmission par câbles de 600 chevaux à Schafhouse, dont il sera question plus loin. Dans cette installation, les deux poulies sont disposées sur l'arbre moteur, comme le représente la fig. 435. Ces deux poulies, qui sont folles sur cet arbre,

Fig. 435.



sont reliées, d'une manière invariable, avec les deux roues dentées B et D, qui engrènent avec les roues intermédiaires A et C;

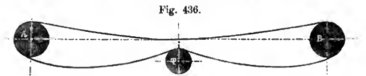
ces deux dernières roues sont elles-mêmes folles sur deux tourillons, reliés invariablement à l'arbre moteur. En vertu de cette disposition, lorsque le mouvement commence à se produire, les poulies arrivent à prendre des positions telles que les forces transmises par les deux câbles aient toutes les deux la même valeur. Si l'un des câbles vient à se rompre, la poulie correspondante devenue libre se met à tourner en arrière; dans ce cas la mise en marche des roues d'engrenages se produit d'elle-même. Pour que, dans ce mouvement à vide, la poulie devenue folle ne puisse pas prendre une vitesse dangereure, l'installation de Schafhouse comprend un frein puissant, qui permet d'arrêter presque instantanément les turbines, qui fournissent la force. Il y aurait peut être lieu de remplacer les roues intermédiaires *A* et *C* par de simples secteurs, comme nous l'avons indiqué sur la droite de la figure; aussitôt que se produirait la rupture d'un câble, ces secteurs se mettraient en mouvement et comme ils pourraient être facilement disposés de manière à passer de la position de mouvement à la position de repos, on comprend qu'il y aurait là un moyen de prévenir tout danger pour la transmission.

§ 179.

Poulies supports et poulies intermédiaires.

Lorsque les deux poulies d'une transmission sont très-éloignées l'une de l'autre et qu'elles sont à une hauteur trop faible au-dessus du sol, il est indispensable de soutenir le câble par d'autres poulies. Dans certains cas, il peut être suffisant de soutenir en un seul point le brin mené, tandis que le brin menant reste complètement libre, comme l'indique la fig. 436; lorsqu'il

Fig. 436.



est nécessaire d'employer plusieurs poulies-supports, le brin conducteur en a généralement une de moins que le brin conduit, fig. 437; dans d'autres cas, au contraire, le nombre de ces poulies est le même pour les deux brins; mais alors il convient de placer les poulies des deux brins, les unes au-dessous des

autres, au lieu de les juxtaposer, comme on l'a essayé plusieurs fois; dans cette dernière disposition, en effet, le câble éprouve une usure très-rapide, par suite des frottements sur les bords des poulies et, de plus, il est exposé à tomber très-facilement. Dans la disposition de la fig. 438, afin de gagner le plus pos-

Fig. 437.

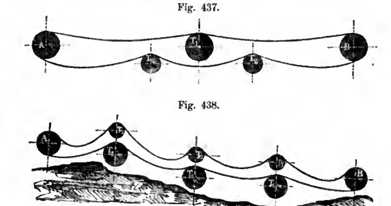
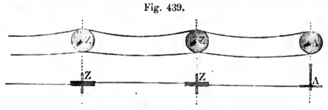


Fig. 438.

sible sur la hauteur, les poulies-supports du brin menant se trouvent au-dessous de celles du brin mené.

Dans la plupart des cas, lorsqu'elle conduit à trop multiplier le nombre des points d'appui, cette disposition peut être remplacée avec avantage par l'emploi d'une série de transmissions successives (Ziegler), fig. 439. Les poulies-supports des figures

Fig. 439.



précédentes sont alors remplacées par des poulies intermédiaires à double rainure, qu'on dispose, autant que possible, à la même distance les unes des autres (1); de cette manière, en effet, un

(1) Ainsi que l'a fait Ziegler, dans sa belle installation d'Oberursel à Francfort-sur-le-Mein, où il est parvenu à transmettre, avec un plein succès, un travail de 100 chevaux à une distance de 984 mètres.

câble en réserve peut servir à remplacer un quelconque des câbles de la série, qui viendrait à se rompre.

Les divers points, où le câble se trouve supporté, portent le nom de stations de la transmission; celles qui correspondent aux poulies principales de la transmission constituent les stations d'extrêmités, tandis que les autres sont les stations intermédiaires. Dans certains cas, à une station de cette dernière espèce, on peut se trouver obligé de changer la direction du câble; Hirn a proposé de réaliser ce changement de direction au moyen d'une poulie horizontale, fig. 440; d'autres ingénieurs, et avec raison, préfèrent employer des roues d'angles, fig. 441.

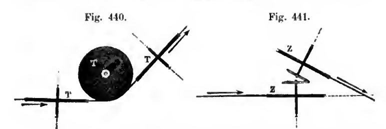


Fig. 440. Fig. 441.

L'emploi des transmissions par câbles permet encore d'arriver facilement à ce résultat de répartir, entre plusieurs établissements appartenant à des propriétaires différents, une force mécanique importante, produite en un seul point; il suffit évidemment, pour cela, de faire partir de certaines stations d'autres transmissions par câbles de moindre importance. Les stations de ce genre portent le nom de stations de partage.

Les poulies-supports trouvent encore leur emploi dans le cas particulier où les poulies de l'arbre moteur et de l'arbre mené se trouvent placées presque verticalement l'une au-dessus de l'autre. Il y aurait, en effet, un inconvénient sérieux à employer un câble incliné, reliant directement les deux poulies A et B, fig. 442 et 443, et il est bien préférable de recourir à l'emploi de poulies-supports $T\,T$, disposées de manière à ce qu'une partie TA ou TB de la transmission soit horizontale; il suffit alors de déterminer, au moyen des données précédentes, les tensions qu'il convient de donner aux deux brins de cette partie de la transmission, sans avoir égard à la partie inclinée.

L'emploi des câbles, pour la transmission de forces à de grandes profondeurs, dans les puits de mines, par exemple, en

est encore à la période de développement; nous pouvons dire toutefois que, d'après les essais faits jusqu'à ce jour, on en attend de bons résultats (1).

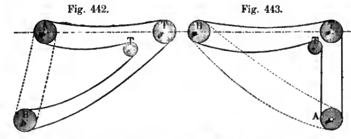


Fig. 442. Fig. 443.

On rencontre un exemple remarquable de ce mode de transmission dans l'installation de Schafhouse, où une force de 600 chevaux environ, due à la vitesse du courant du Rhin (qu'il ne faut pas confondre avec la chute du Rhin), est recueillie par des turbines sur la rive gauche et doit être transmise sur la rive droite, pour être répartie de ce côté entre différentes usines. Cette importante application, qui est due à la société des appareils hydrauliques de Schafhouse, est presque entièrement terminée et elle offre, dans ses différents détails d'installation, des renseignements du plus grand intérêt pour les constructeurs (2).

§ 180.

Dimensions des poulies supports.

Les poulies, destinées à soutenir le brin conducteur, doivent toujours avoir le même diamètre que les poulies de transmission proprement dites. Celles du brin mené, au contraire, dans les transmissions normales, doivent avoir des dimensions plus faibles; le tableau suivant indique les limites au-dessous desquelles il convient de ne pas descendre, pour le rayon R_0 de ces poulies.

Les nombres de ce tableau ont été calculés au moyen de la formule :

$$\frac{R_0}{\delta} = \frac{10000}{18 - \frac{\mathfrak{S}_1}{2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

(1) Revue de la société des Ingénieurs Allemands, 1866, P. 371. Werner, Emploi des transmissions par câbles métalliques pour les puits de mines.

(2) Revue polytechnique Suisse, 1867, P. 1.

$\mathfrak{S}_1$	s	$\frac{R_0}{\delta}$	$\mathfrak{S}_1$	s	$\frac{R_0}{\delta}$
0,5	17,5	563	9	9	741
1	17	571	10	8	769
2	16	588	11	7	800
3	15	606	12	6	833
4	14	625	13	5	870
5	13	645	14	4	909
6	12	667	15	3	952
7	11	690	16	2	1000
8	10	714	17	1	1053

et ils fournissent des dimensions très-convenables de R_0, principalement pour des valeurs assez élevées de $\mathfrak{S}_1$. Dans les transmissions à tension renforcée (§ 173), la différence entre R_0 et R est assez peu importante pour qu'on puisse prendre, sans inconvénient, $R = R_0$. Dans les transmissions composées (179), il n'existe, au point de vue de la grandeur, aucune différence entre les poulies principales des extrémités et les poulies intermédiaires.

§ 181.

Pression sur les axes des poulies supports.

Dans une transmission par câbles, qu'on a eu le soin de calculer sur toute sa longueur, on connaît, pour chaque station, les tensions et (d'après les tracés des courbes des câbles, § 175),

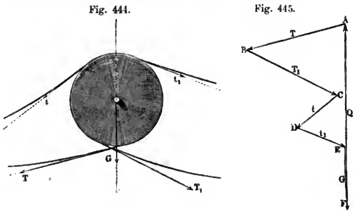


Fig. 444. Fig. 445.

les directions des différents brins à soutenir, c'est-à-dire que, pour une poulie intermédiaire, par exemple, fig. 444, on connaît les grandeurs des forces appliquées T, t, T_1 et t_1 et leurs directions; on peut déterminer, en outre, au moyen des formules que nous donnons ci-après, le poids approximatif de la poulie, ce qui permet de tracer graphiquement, fig. 445, la résultante Q de ces différentes forces partielles. A cet effet, on trace les lignes AB, BC, CD, DE et EF, respectivement égales et parallèles à T, T_1, t, t_1 et G. La ligne AF, qui ferme le polygone, représente, en grandeur et en direction, la résultante Q. Les poulies supports offrent ordinairement une construction identique à celle des poulies principales, pour le même diamètre de câble; en vertu des règles des § 177 et 178, leurs poids se trouvent alors donnés approximativement par les formules suivantes:

pour une poulie à une seule rainure:

$$\frac{G}{d^3} = \left[\left(45 + \frac{36,4}{d} + \frac{7,22}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right) + \left(0,33 + \frac{0,116}{d} + \frac{0,0072}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \left(0,005 + \frac{0,0007}{d}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^3\right] \quad (175)$$

pour une poulie à deux rainures:

$$\frac{G}{d^3} = \left[\left(84 + \frac{66,4}{d} + \frac{13,30}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right) + \left(0,33 + \frac{0,116}{d} + \frac{0,0072}{d^2}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^2 + \left(0,005 + \frac{0,0007}{d}\right)\left(\frac{R}{d}\right)^3\right] \quad (176).$$

Dans ces formules R et d sont exprimés en décimètres.

1er Exemple. Dans le 4e exemple du § 171, pour un rayon de poulie $R = 750^{mm}$, le diamètre des fils du câble, supposés au nombre de 36, était de $0^{mm},9$, c'est-à-dire que le diamètre du câble lui-même devait être $8 \cdot 0,9 = 7^{mm},2$; ce qui donne $\frac{R}{d} = \frac{720}{7,2} = 104$. Le poids de la poulie, dans le cas d'une rainure unique, est alors: $G = 0,072^3 [(45 + 13,89 \cdot 36,4 + 13,89^2 \cdot 7,22)104 + (0,33 + 13,89 \cdot 0,116 + 13,89^2 \cdot 0,0072)104^2 + (0,005 + 13,89 \cdot 0,0007)104^3] = 95^k$ environ.

2e Exemple. Pour la transmission de 300 chevaux du second exemple du § 171, on a trouvé $\delta = 2^{mm},2$, ce qui, pour un câble de 60 fils, donne: $d = 12,8 \cdot 2,2 = 28^{mm}$, $R = 2200^{mm}$ et, par suite, $\frac{R}{d} = \frac{2200}{28} = 79$. Le poids de la poulie, dans l'hypothèse d'une double rainure, est alors, d'après la formule (176): $G = 0,28^3[(84 + 3,57 \cdot 66,4 + 3,57^2 \cdot 13,30)79 + 0,33 + 3,57 \cdot 0,116 + 3,57^2 \cdot 0,0072)79^2 + (0,005 + 3,57 \cdot 0,0007)79^3 = 1050^k$.

Pour les grandes poulies des transmissions importantes, le poids, comme le montre le dernier exemple, devient très-con-

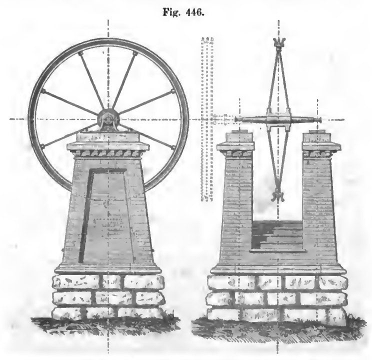
sidérable; on comprend dès lors qu'on ait cherché à réduire le poids, en modifiant le système de construction des poulies et en adoptant, par exemple, la disposition de la fig. 446, où les bras sont formés par deux tiges inclinées venant se rejoindre sur la couronne; on peut arriver à réduire ainsi d'un quart environ le poids que nous avons trouvé pour la poulie précédente. En Suède, où la transmission par câbles est déjà sérieusement implantée, on emploie avec succès des poulies formées de tôle de fer (1).

§ 182.

Piliers de stations.

La fig. 446 représente la disposition d'une station pour les poulies intermédiaires d'une transmission composée. Pour supporter les paliers de l'axe d'une poulie de ce genre, on peut,

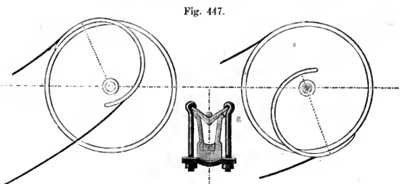
Fig. 446.



(1) V. Annales de la société des Ingénieurs Allemands 1868, P. 591.

à la rigueur, établir une charpente en bois, mais il est bien préférable de recourir à un véritable massif en briques ou en pierre, sur lequel se fixent les paliers, lesquels peuvent être des paliers d'une faible hauteur, comme ceux que représente la figure ou, au contraire, des paliers surélevés par l'addition de bâtis, présentant l'une des formes des fig. 348 à 350; cette dernière disposition est surtout avantageuse, lorsque les piliers se trouvent déjà avoir une très-grande hauteur depuis le sol jusqu'aux plaques de fixation de ces bâtis. Ces plaques sont solidement reliées au massif par quatre forts boulons à ancre, qui, après avoir traversé les piliers, pénètrent dans la maçonnerie de fondation. La longueur de l'axe, entre les milieux des tourillons, est généralement égale au rayon R de la poulie. Pour les stations à deux poulies, le massif se trouve divisé sur une grande hauteur et l'axe de la poulie supérieure repose sur des paliers à bâtis métalliques. Dans certains cas, les poulies se trouvent établies en porte-à-faux, comme l'indique le tracé pointillé de la figure précédente. Cette disposition est surtout commode pour la mise en place d'un câble neuf. Pour cette dernière opération, l'Ingénieur Ziegler a employé avec avantage un dispositif analogue au monte-courroie d'Herland; ce dispositif, que représente la fig. 447, se compose d'un fer à cornière, qui se fixe sur la rainure de l'une des poulies,

Fig. 447.



au moyen de boulons à crochet. Dans la figure de gauche, le câble est à côté de la poulie, tandis que, dans celle de droite, il se trouve reposer dans la rainure de cette poulie.

Bien que, dans tout le cours de ce chapitre, nous ayons constamment supposé que les deux poulies de transmission avaient

la même grandeur, il ne s'ensuit pas cependant qu'on ne puisse pas adopter un rapport différent pour ces deux poulies. En réalité, l'inégalité des rayons de ces poulies peut souvent se trouver sérieusement motivée. Dans tous les cas de ce genre, il convient de se borner à déterminer la grandeur de la plus petite des deux poulies et le diamètre correspondant du câble, en ayant soin d'ailleurs de ne pas perdre de vue que, pour obtenir une transmission dans de bonnes conditions, il est surtout essentiel de donner à cette poulie un diamètre suffisant.

XII. Roues dentées.

§ 183.

Disposition des roues dentées.

Les axes géométriques de deux roues dentées, qui se commandent mutuellement, peuvent présenter, l'un par rapport à l'autre, quatre positions principales, analogues à celles que nous avons indiquées pour les poulies, § 156; suivant les positions relatives des axes, les roues présentent d'ailleurs des formes et des dispositions différentes.

Les roues, destinées à des arbres parallèles, reçoivent une forme cylindrique (roues droites); pour des arbres qui se coupent, elles ont une forme conique (roues coniques ou roues d'angle); enfin, pour les arbres qui se croisent, sans se couper, la forme de chaque roue est celle d'un cylindre ou d'un conoïde (engrenages hyperboloïdes). Les axes des dents des roues peuvent être droits (c'est le cas le plus ordinaire), ou courbés suivant des arcs d'hélices; dans ce dernier cas, la forme de la roue est une de celles que nous avons indiquées précédemment. Lorsque la transmission doit s'effectuer, sans modifier la loi du mouvement, les roues doivent présenter (abstraction faite des dents) la forme de solides de révolution autour de leurs axes. Les roues de cette espèce sont les plus simples et ce sont celles dont nous allons nous occuper.

A. Dentures des roues droites.

§ 184.

Généralités sur la matière et la forme des dents des roues droites.

Dans les roues droites, on peut adopter pour les dents une forme telle que toutes les roues *de même pas* puissent engrener rigoureusement les unes avec les autres, c'est-à-dire que le rapport des vitesses angulaires de deux quelconques de ces roues soit toujours constant. Les roues qui jouissent de cette propriété peuvent être désignées sous le nom de roues *harmoniques.*

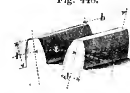
Dans chaque paire de roues engrenant l'une avec l'autre, on désigne, sous le nom de *cercles proportionnels*, deux cercles décrits des centres des deux roues, avec des rayons tels qu'à chaque instant la vitesse soit la même à la circonférence. Dans les engrenages droits, les cercles proportionnels sont tangents et constituent *les cercles primitifs ou de division.* C'est sur ces cercles, en effet, que se compte le pas des dents, c'est-à-dire la distance des plans moyens de deux dents consécutives. Pour les roues droites, à dents également droites, dont nous allons d'abord nous occuper exclusivement, l'axe de chaque dent se trouve être une génératrice du cylindre mené par le cercle de division.

Les dents des roues droites affectent la forme prismatique; les deux bases d'un prisme de ce genre constituent les extrémités des dents; la partie qui se trouve en dehors du cylindre de division est la *tête de la dent*, tandis que l'autre partie en est le *pied;* la surface qui limite la tête est le *sommet de la dent* et la surface qui sépare le pied de la dent du corps de la roue en est *la base ou la racine.* Les surfaces, qui relient la base au sommet de la dent, se nomment *les flancs;* la forme qu'il convient de donner à ces surfaces a une très-grande importance et constitue spécialement le problème de la denture des roues. L'espace compris entre deux dents consécutives constitue le vide ou le creux des dents.

Dans une roue droite, la longueur l de la dent, fig. 448, est la distance comprise entre la base et le sommet, la largeur b

est l'écartement des surfaces extrêmes, et enfin l'épaisseur *d*, la longueur de l'arc du cercle primitif, compris entre les flancs; le creux des dents est également représenté par la longueur de l'arc de ce même cercle, compris entre les parties pleines de deux dents consécutives. Comme le creux est légèrement supérieur à l'épaisseur et que la longueur de la tête est, au contraire, inférieure à celle du pied, il en résulte qu'il existe toujours un certain jeu entre les flancs des dents d'une paire de roues, ainsi qu'entre les sommets et les bases des creux.

Fig. 448.



Dans la construction des roues d'engrenages, on doit s'attacher particulièrement à donner aux dents une forme convenable, pour que l'engrènement de deux roues s'opère d'une manière satisfaisante. Toutefois, comme une erreur dans la forme des dents offre encore moins d'inconvénients qu'une erreur commise dans la division des cercles, il convient d'effectuer cette dernière opération avec la plus grande exactitude possible. A ce point de vue, on est beaucoup plus sûr des résultats obtenus, lorsqu'on fait usage, pour la construction des roues d'engrenages, de machines à diviser ou de machines à tailler les dents. L'emploi des machines de ce genre tend d'ailleurs à se répandre de plus en plus et on ne saurait trop s'en féliciter. Pour les tours à fileter, par exemple, on ne devrait jamais employer que des roues divisées à la machine; les imperfections, que comportent nécessairement les roues simplement fondues et non taillées, ne permettent pas d'obtenir une régularité suffisante pour les divers filets de vis. Ces imperfections ont des conséquences plus fâcheuses encore, lorsqu'on se sert du tour pour tailler les dents d'une roue destinée à engrener avec une vis (v. plus loin § 202). Avec les roues à vis sans fin, on se propose généralement d'obtenir une transmission de mouvement d'une grande douceur et sans chocs et ce but peut se trouver très-imparfaitement atteint, si les portions de filets, qui forment les dents d'une roue de ce genre, présentent certaines irrégularités, produites par l'emploi d'un tour à engrenages défectueux. Dans une usine de construction de machines, la forme des dents, qu'il convient d'adopter pour une classe déterminée de roues, ne doit être arrêtée qu'après avoir examiné avec le plus grand soin toutes les circonstances qui peuvent influer

sur le choix de cette forme. Nous avons cherché à réunir ici les principes qui doivent guider pour cette détermination.

§ 185.

Rayon du cercle primitif.

Dans une roue dont le nombre de dents est $\mathfrak{Z}$ et le pas t, le rayon R du cercle primitif est donné par la relation:

$$\frac{R}{t} = \frac{\mathfrak{Z}}{2\pi} = 0{,}15915\,\mathfrak{Z} \quad . \quad . \quad . \quad (177).$$

Le rayon qu'on obtient par cette formule est irrationnel, à cause du nombre π. Pour faciliter son calcul, on peut recourir à la table du paragraphe suivant, qui a été calculée à l'aide de la formule (177). Si l'on veut éviter que R ne soit irrationnel, il faut choisir la valeur du pas de manière à ce qu'elle soit une partie aliquote ou un multiple, non de l'unité de mesure (millimètre), mais bien de π fois cette unité; ce procédé est en usage dans plusieurs usines de construction. t étant exprimé au moyen de cette nouvelle unité, l'équation précédente fournit pour R une valeur toujours rationnelle:

$$R = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178).$$

Exemple. Une roue de 24 dents a un pas de $6 \times 3{,}14\ldots$ millimètres; d'après la formule (178), le rayon du cercle de division a pour valeur: $R = \frac{24}{2} \cdot 6 = 72^{mm}$.

Pour porter sur la circonférence le pas et ses subdivisions, il est commode de se servir d'une *échelle de périphérie.* Pour obtenir une échelle de ce genre, dans le système métrique, on prend sur une règle prismatique, en bois ou en métal, une longueur de 314 millimètres, qu'on divise en demi-millimètres; sur le côté opposé, on prend la même longueur, qu'on partage en 100 parties, chacune d'elles étant ensuite subdivisée en deux. Les longueurs, qui, sur les deux côtés, portent les mêmes chiffres, se trouvent être dans le rapport de $1:\pi$.

Cette échelle peut être employée avec avantage pour la rectification des arcs de cercles.

Dans ce qui va suivre, nous emploierons constamment les deux méthodes que nous venons d'indiquer; dans la première, le pas, rapporté à l'échelle ordinaire, est rationnel et, par suite,

le rayon du cercle ne peut pas l'être, tandis que, dans la seconde, le pas, exprimé en unités de l'échelle de périphérie, est encore rationnel, ainsi que le rayon, ce dernier étant rapporté à l'échelle métrique ordinaire. La table de la page suivante ne doit pas être confondue avec celle de Donkin, calculée au moyen de l'expression $\frac{r}{t} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{180^\circ}{\mathfrak{z}}\right)}$, qui donne le rayon du cercle circonscrit à un polygone régulier de $\mathfrak{z}$ côtés, de longueur t. Ce rayon, surtout pour les faibles valeurs de $\mathfrak{z}$, est différent du rayon R, défini précédemment. La confusion qu'on a faite quelquefois entre ces deux tables a eu pour résultat de donner des roues d'une construction vicieuse.

§ 186.

Table relative au rayon du cercle primitif des dents.

$\mathfrak{z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,159	0,318	0,477	0,637	0,798	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,59	1,75	1,91	2,07	2,23	2,39	2,55	2,71	2,86	3,02
20	3,18	3,34	3,50	3,66	3.82	3,98	4.14	4,30	4,46	4.62
30	4,77	4,93	5,09	5,25	5,41	5,57	5.73	5,89	6,05	6,21
40	6,37	6,53	6,68	6,84	7,00	7,16	7.32	7,48	7,64	7,80
50	7,96	8,12	8,28	8,43	8.59	8,75	8,91	9,07	9,23	9,39
60	9,55	9,71	9,87	10,03	10,19	10,34	10,50	10,66	10,82	10.98
70	11,14	11,30	11,46	11,62	11.78	11.94	12.10	12,25	12,41	12,57
80	12,73	12,89	13,05	13.21	13,37	13,53	13,69	13,85	14,01	14,16
90	14,32	14,48	14,64	14.80	14,96	15,12	15,28	15,44	15,60	15,76
100	15,92	16,07	16,23	16,39	16,55	16,71	16,87	17,03	17,19	17,35
110	17,51	17,67	17,82	17,98	18.14	18,30	18,46	18,62	18,78	18,94
120	19,10	19,26	19,42	19.58	19,73	19,89	20,05	20,21	20,37	20,53
130	20.69	20,85	21,01	21,17	21,33	21,49	21,64	21,80	21,96	22,12
140	22,28	22,44	22,60	22,76	22,92	23,08	23,24	23,40	23,55	23,71
150	23,87	24,03	24,19	24,35	24,51	24,67	24,83	24,99	25,15	25,30
160	25,46	25,62	25,78	25,94	26.10	26,26	26,42	26,58	26,74	26,90
170	27,06	27,21	27,37	27,53	27,69	27,85	28,01	28.17	28,33	28,49
180	28,65	28,81	28,97	29,12	29,28	29,44	29,60	29,76	29,92	30,08
190	30,24	30,40	30,56	30.72	30,88	31,03	31,19	31,35	31,51	31,67
200	31,83	31,99	32,15	32,31	32.47	32,63	32,78	32,94	33,10	33.26
210	33,42	33,58	33,74	33,90	34,06	34.22	34,38	34,54	34.69	34,85
220	35,01	35,17	35,33	35,49	35,65	35,81	35,97	36,13	36,29	36,45
230	36,60	36,76	36,92	37,08	37,24	37,40	37,56	37,72	37,88	38,04
240	38,20	38,36	38,51	38,67	38.83	38,99	39.15	39,31	39,47	39,63
250	39,79	39,95	40,11	40,26	40,42	40,58	40,74	40,90	41,06	41,22
260	41,38	41,54	41,70	41,86	12,02	42,17	42,33	42,49	42,65	42.81
270	42,97	43,13	43,29	43,45	43,61	43.77	43,93	44,08	44,24	44,40
280	44,56	44,72	44,88	45,04	45,20	45,36	45,52	45,68	45,84	45,99
290	46,15	46,31	46,47	46,63	46,79	46,95	47,11	47,27	47,43	47,59

Premier mode d'emploi de la table précédente.

Exemple. Quel doit être le rayon du cercle primitif d'une roue de 63 dents avec un pas de 30mm? La colonne 5, ligne 7, donne: $\frac{R}{t} = 10{,}03$, *par suite,* $R = 10{,}03 \cdot t = 10{,}03 \cdot 30 = 300^{mm}{,}9$ *ou, en nombre rond,* 301^{mm}.

Second mode d'emploi. On peut encore, à l'aide de la table, déterminer le nombre des dents d'une roue, quand on connaît le pas (calculé) et qu'on se donne le rayon du cercle primitif.

Exemple. Quel doit être le nombre de dents d'une roue dont le rayon du cercle primitif est de 1000^{mm}, *pour un pas de* 40^{mm}? *On a, dans ce cas,* $\frac{R}{t} = \frac{1000}{40} = 25$. *Dans la table, on trouve (col. 9, ligne 16) le nombre 24,99 qui s'en rapproche beaucoup et on doit prendre, par suite, pour la roue,* $150 + 7 = 157$ *dents. A la rigueur, le rayon devrait être réduit à* $24{,}99 \cdot 40 = 999^{mm}{,}6$; *mais la différence entre cette dernière valeur et la précédente est tout-à-fait négligeable.*

Troisième mode d'emploi. La table permet encore de déterminer le pas d'une roue, lorsqu'on connaît le rayon R et le nombre de dents.

Exemple. On donne $R = 400$ *et* $\mathfrak{Z} = 54$. *A cette dernière valeur correspond dans la table (col. 6, ligne 6) le quotient* $\frac{R}{t} = 8{,}59$. *On doit donc prendre:* $t = \frac{R}{8{,}59} = \frac{400}{8{,}59} = 46^{mm}{,}56$.

Pour obtenir les divisions des dents sur la roue, le procédé le plus exact consiste à tracer le cercle, dont le rayon R a été déterminé avec soin, comme nous venons de l'indiquer, et à diviser la circonférence en $\mathfrak{Z}$ parties égales.

§ 187.

Problème général du tracé des dents.

Dans un système de deux roues droites, les surfaces des dents qui doivent se commander mutuellement constituent des parties cylindriques, dont les bases sont déterminées par une section faite perpendiculairement aux axes des roues; on peut donc se borner à tracer le profil des dents dans une section de ce genre et, en particulier, dans l'un des plans qui limitent les dents. Le problème de la denture à adopter, dans toute sa généralité, revient donc à celui-ci: étant donné le profil d'une dent pour l'une des roues, déterminer celui de la dent de la

seconde roue, qui doit engrener avec la première, dans l'hypothèse où la transmission du mouvement doit s'effectuer d'une manière uniforme.

I. *Premier procédé (Reuleaux).* Fig. 449. On connaît le profil de dent $a\,S\,b\,c$ et le cercle primitif de la roue O, ainsi que le cercle primitif de la roue O_1; il s'agit de déterminer le profil de dent $a_1 S\ldots$ pour cette roue O_1. Si la courbe donnée est placée de telle manière que son point d'intersection S avec le cercle primitif se trouve sur la ligne des centres $O\,O_1$, le point S appartient également au profil cherché. Pour déterminer un second point a_1 de ce profil, qui, dans le mouvement des roues, doit venir coïncider avec le point a de la première courbe, menons la normale $a\,1$ à cette courbe, prenons l'arc $S\,1'$ égal à l'arc $S\,1$, la ligne $1\,s_1$ égale à la corde $S\,1'$ et $S\,s_1 = 1\,1'$; si maintenant, des points S et $1'$, comme centres, avec $s_1 a$ et $1\,a$ respectivement pour rayons, nous décrivons deux arcs de cercle, le point d'intersection a_1 de ces arcs sera le point cherché. Les points du profil donné, qui, comme le point c, occupent une position telle que leurs normales ne viennent pas rencontrer le cercle correspondant, ne peuvent pas être utilisés avec les cercles primitifs tels qu'ils sont donnés. Pour qu'il en fût autrement, il serait nécessaire de modifier ces cercles (les augmenter dans le cas de la figure). La courbe trouvée peut d'ailleurs présenter des nœuds, des points de rebroussement, en

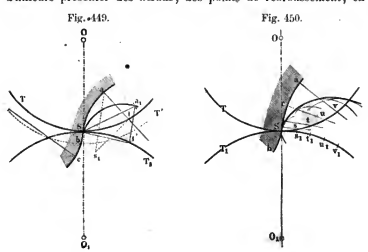


Fig. 449. Fig. 450.

un mot une forme complètement inexécutable, sans cesser pour cela d'être admissible au point de vue purement géométrique.

II. *Procédé abrégé (Poncelet).* Fig. 450. Sur le cercle primitif T_1, on détermine les points s_1, t_1, u_1, v_1... qui doivent venir coïncider, avec les points s, t, u, v... de l'autre cercle T; si des points s_1, t_1, u_1... etc., comme centres, avec les longueurs des normales à la courbe donnée, va, uc etc., on décrit des arcs de cercle, il suffit de tracer une courbe continue, tangente à tous ces arcs, pour obtenir le profil cherché. Les points s, t, u, v... doivent être pris suffisamment rapprochés les uns des autres.

Si, dans les deux procédés différents que nous venons d'indiquer, on porte, à partir des points s_1, t_1, u_1... les longueurs des normales va, uc... en sens inverse, on obtient pour la roue $O_1 T_1$, un profil de dent correspondant à l'hypothèse où la denture est intérieure.

III. *Second procédé (Reuleaux).* Fig. 451. On donne, comme précédemment, le profil $abcSde$ et les deux cercles primitifs T et T_1. On mène les normales $a1$, $b2$, $c3$...; par les points a, b, c... on décrit, du point O, des arcs de cercle, sur lesquels on prend des points I, II, III..., tels que $S\text{I} = a1$, $S\text{II} = b2$, $S\text{III} = c3$... etc. et on trace la courbe passant par ces points I, II, III, IV, V...; cette courbe, qu'on désigne sous le nom de ligne d'engrènement, est le lieu géométrique des points

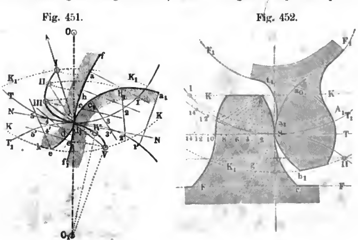


Fig. 451. Fig. 452.

de contact des dents, c'est-à-dire que le contact a lieu aux points a, b, c... du profil donné, lorsque ces points se trouvent dans les positions I, II, III... Si maintenant, du point O_1, on décrit des arcs de cercle passant par les points I, II, III..., que sur T_1 on prenne les arcs $S1'$, $S2'$, $S3'$... égaux aux arcs $S1$, $S2$, $S3$... et qu'on fasse, en outre, $1'a_1 = 1a$, $2'b_1 = 2b$, $3'c_1 = 3c$..., la courbe continue $a_1\, b_1\, c_1$..., qu'on obtient en réunissant les points a_1, b_1, c_1... ainsi déterminés, représente le profil cherché. Ce procédé, qui est plus simple que celui du n°. I, est au moins aussi exact et il a, de plus, l'avantage de donner la ligne d'engrènement (v. le paragraphe suivant).

Profil théorique de la partie inférieure des dents. Fig. 452. Il arrive souvent que, pour donner au pied de la dent une résistance suffisante, on est obligé de le renforcer de chaque côté par un congé, qui vient occuper une partie du vide; il est bien évident d'ailleurs que ce congé doit être disposé de manière à se trouver en dehors du chemin décrit par l'arête de la dent de la seconde roue et qui peut se déterminer de la manière suivante. Soient aSb et a_1Sb_1 les profils des dents des roues T et T_1, a_1a_0 le prolongement du profil du pied de la seconde dent, $ISII$ la ligne d'engrènement, limitée par les cercles de tête K et K_1. A partir du point S, prenons, sur les cercles T et T_1, des longueurs d'arcs, respectivement égales, $S1$, 12, 23... $S1'$, $1'2'$, $2'3'$... et, avec des ouvertures de compas, successivement égales aux droites Sa, $1a$, $2a$, $3a$... décrivons, des points $1'$, $2'$, $3'$..., des arcs de cercle, l'enveloppe aa_1g de ces cercles déterminera ce qu'on appelle le profil théorique de la base de la dent, auquel on substitue, en réalité, le profil a_1f_1, qui lui est tangent en S et qui vient se raccorder avec le cercle limite F_1. Le profil théorique est une courbe cycloïdale allongée ou raccourcie (v. § 190); dans la figure, où le cercle T se réduit à une ligne droite (crémaillère), cette courbe est une portion de développante (v. § 195).

§ 188.

De l'engrènement des dents.

Le troisième des procédés que nous venons d'indiquer permet de déterminer, non seulement le profil des dents, mais encore la ligne d'engrènement de deux roues qui se commandent mutuelle-

ment; pour compléter cette question de la denture, nous devons ajouter ici quelques observations assez importantes.

La ligne d'engrènement passe par le point d'intersection du profil de chaque dent avec le cercle primitif et elle rencontre ce profil à angle droit, c'est-à-dire que la tangente NN à cette ligne est normale, en S, au profil de la dent. A chaque point de la ligne d'engrènement correspond un contact de dents et, par suite, un point de contact sur chacun des cercles primitifs; ainsi, par exemple, au point II de cette ligne, correspondent les points 2 et 2′ sur T et T_1. La longueur de l'arc du cercle primitif, compris entre le point de rencontre de ce cercle avec la ligne d'engrènement et le point de contact sur ce même cercle, correspondant à un point quelconque de cette ligne, se nomme le cercle de roulement pour le point d'engrènement considéré. Ainsi, $S2$ et $S2'$ représentent respectivement, sur les cercles T et T_1, les arcs de roulement correspondant au point d'engrènement II.

La somme des arcs de roulement, pour les points d'engrènement les plus éloignés ($1S + S5$ ou $1'S + S5'$), constitue ce qu'on appelle l'arc d'engrènement; sa longueur, exprimée en nombre de pas, représente la durée de l'engrènement des dents considérées, qu'il est facile ici de déterminer graphiquement. Cette durée dépend de la longueur de la partie utilisée de la ligne d'engrènement. Comme la longueur du pied de la dent doit être augmentée par suite de l'addition d'un congé et de la nécessité de donner un passage suffisant à la tête de la dent de l'autre roue, il en résulte que, dans les roues ordinaires, cette partie utilisée (V-I) se trouve limitée par les cercles de tête K et K_1.

Dans une roue, à un profil de dent donné, sur un cercle primitif connu, correspond une seule ligne d'engrènement et, réciproquement, pour une ligne d'engrènement donnée, il n'existe qu'un seul profil de dent satisfaisant. Ce profil ne peut d'ailleurs se déterminer, à l'aide de l'autre ligne, que dans le cas où l'on connaît les arcs de roulement, correspondant aux différents points de cette ligne; lorsqu'il en est ainsi, le profil de la dent peut se tracer facilement et le problème se réduit alors à celui que nous avons résolu, à l'aide du procédé indiqué à la fin du paragraphe précédent.

Dans les profils qui appartiennent au genre cycloïdal, l'arc de roulement est précisément égal à la longueur de l'engrène-

ment; les dents de cette espèce présentent donc une simplicité toute spéciale, au point de vue de leurs propriétés géométriques.

Dans les roues dentées, qui se commandent convenablement, les lignes d'engrènement sont congruentes et les arcs de roulement pour les points homologues de ces lignes sont d'égale longueur. En satisfaisant à cette condition, on peut construire un nombre indéterminé de roues, destinées à engrèner avec une roue donnée.

Les roues de ce genre sont ce que nous avons appelé des roues harmoniques (v. § 181), lorsque la ligne commune d'engrènement a une forme telle qu'elle soit divisée en deux parties congruentes, non seulement par le cercle primitif, mais encore par le rayon de son point d'intersection avec ce cercle.

Dans toutes les roues harmoniques, engrènant avec une crémaillère, les deux parties du profil, au-dessus et au-dessous du cercle primitif, sont congruentes.

Si, par le point d'intersection de la ligne d'engrènement avec le cercle primitif, on mène un rayon aboutissant à un autre point quelconque de cette ligne ($S1$, par ex. fig. 151), ce rayon donne la direction et le point d'application de la pression exercée sur la dent, pour le point d'engrènement considéré. Pour que cette pression, qui tend à écarter les axes des deux roues, ne soit pas trop considérable, il convient que sa direction ne fasse pas un angle trop faible avec la ligne des centres.

§ 189.

Courbes décrites par un point d'un cercle roulant.

Les courbes, décrites par le roulement d'un cercle, sont celles qui se prêtent le mieux aux tracés des dents des roues harmoniques ou, plus particulièrement, aux tracés de dents, pour lesquels on tient à déterminer d'avance les propriétés géométriques. Lorsqu'un cercle roule sur un autre cercle, sans glisser, chaque point d'un rayon de ce cercle décrit une courbe qu'on désigne sous les noms de cycloïde, simple, allongée ou raccourcie, suivant que le point décrivant se trouve sur la circonférence même du cercle roulant, sur le prolongement du rayon ou à l'intérieur.

Le cercle fixe est le *cercle directeur* de la courbe et nous désignerons son rayon par R; le cercle mobile, de rayon r, est le *cercle générateur ou de roulement*. Dans le cas où l'un des deux cercles est intérieur à l'autre, son rayon conserve le signe +, tandis qu'on affecte le second du signe —; avec cette convention, on peut diviser en cinq classes distinctes les courbes obtenues par les différentes combinaisons de R et r, ainsi que de leurs signes.

Cercle directeur.	Cercle de roulement.	Courbes correspondantes.
$+R$	$+r$	*Épicycloïde.*
$\pm\infty$	$+r$	*Cycloïde.*
$-R$	$+r$	*Hypocycloïde.*
$+R$	$\pm\infty$	*Développante de cercle.*
$+R$	$-r$	*Péricycloïde.*

Ces cinq espèces de courbes jouissent toutes des deux propriétés suivantes:

1. *La normale en un point de la courbe décrite passe par le point de contact correspondant du cercle générateur.*

2. *Le centre de courbure, pour un point de la courbe, est donné par l'intersection de la normale en ce point avec la ligne qui réunit le centre du cercle directeur au point diamètralement opposé au point décrivant.*

Dans le cas où il s'agit de courbes allongées ou raccourcies, le point qu'il faut joindre au centre du cercle directeur est le point d'intersection du prolongement du rayon et de la perpendiculaire menée à la normale par le point de contact.

C'est à la première propriété qu'est due la supériorité de l'emploi des courbes cycloïdales pour les tracés de dents; la seconde propriété fournit le moyen de remplacer, sans inconvénients, dans le tracé des dents, les profils cycloïdaux par de simples arcs de cercle.

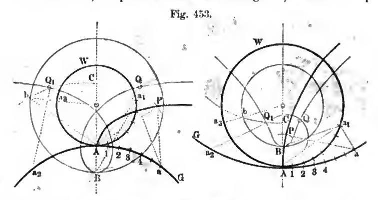
§ 190.

Tracés des courbes cycloïdales.

Procédé exact. Fig. 453. G est le cercle directeur, W le cercle de roulement, A le point de départ de la courbe. A partir

du point A, et sur les deux circonférences G et W, on porte, du même côté, de petits arcs de même longueur; soient a et a_1

Fig. 453.



deux points de division correspondants. Si, du point A, avec la distance $a a_1$ et du point a, avec la corde $A a_1$, on décrit deux arcs de cercle, le point d'intersection P de ces deux arcs sera un point de la courbe cherchée. Ce procédé, qui, dans la fig. 453, a été simplement appliqué à l'Epicycloïde et à l'Hypocycloïde, peut être également employé pour les trois autres espèces de courbes cycloïdales.

II. *Procédé abrégé.* Si des points de division 1, 2, 3, — a... comme centres, avec les longueurs des cordes correspondantes sur le cercle générateur, mesurées à partir du point A, on décrit des arcs de cercle, ces arcs doivent tous être tangents à la courbe cherchée et peuvent, par suite, permettre de la tracer, dans le cas où la longueur des arcs de division $A - 1$, $1 - 2$... a été prise suffisamment petite.

Dans le cas d'une courbe allongée ou raccourcie, ayant son point de départ en B, on commence par déterminer le point P (il n'est pas nécessaire pour cela de tracer la courbe simple elle-même); on décrit ensuite des points a et P, avec $a_1 B$ et AB, comme rayons, deux arcs de cercle, dont l'intersection Q est un point de la courbe cherchée.

On peut encore opérer d'une autre manière; mener par le point a_3 le rayon $a_3 b$ du cercle générateur, faire passer par le point b un arc concentrique au cercle directeur et prendre $a_2 Q_1 = Ab$; le point Q_1 est alors le point de la courbe correspondant au roulement sur l'arc $A a_2 = A a_3$.

§ 191.

Profils des dents des roues harmoniques.

Dans les roues de cette espèce, le profil des dents peut être rigoureusement formé par un arc d'épicycloïde et un arc d'hypocycloïde, ces arcs étant d'ailleurs engendrés tous les deux par un cercle mobile, d'un rayon déterminé pour chaque valeur du pas.

I. *Tracé d'une roue à dents extérieures.* Fig. 454. On donne le nombre de dents $\mathfrak{Z}$ et le pas t ou le rapport $\frac{t}{\pi}$.

Prenons $OS = R = \frac{\mathfrak{Z} t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$ et, pour le rayon r_0 du cercle roulant W, $r_0 = 0{,}875\, t = 2{,}75 \left(\frac{t}{\pi}\right)$; traçons le cercle de tête K et le cercle de pied F, distants du cercle primitif T, le premier de $0{,}3\, t$, le second de $0{,}4\, t$ et fixons l'épaisseur des dents à $^{19}/_{40}\, t$. L'arc Sb étant pris égal à l'arc ab et l'arc Sc égal à l'arc ic, Sa est un arc d'épicycloïde, engendré par le roulement de W à l'extérieur de T et Si un arc d'hypocycloïde, engendré par le roulement d'un cercle de même rayon à l'intérieur de T.

Dans le cas où le nombre des dents est égal à onze, l'arc Si se réduit à une droite, dirigée suivant le rayon. Cette forme de dents peut encore s'appliquer convenablement, lors même qu'on descend jusqu'à sept pour le nombre des dents de la roue; mais, pour $\mathfrak{Z} < 11$, la courbure de l'arc d'hypocycloïde est différente de celle qui est représentée sur la figure, de telle sorte que l'épaisseur de la dent, à partir du cercle primitif, irait en diminuant jusqu'au cercle de pied. Au lieu de donner entièrement aux flancs de la dent ce profil théorique, on ne l'utilise que sur une partie de sa longueur, en le raccordant par de forts congés avec la couronne de la roue (v. § 187, où la fig. 452 donne un exemple de ce genre de denture pour un pignon de sept dents engrènant avec une crémaillère); dans ce cas, il convient également de renforcer les dents, au moyen de disques latéraux, venus de fonte avec elles. Les rapports indiqués précédemment donnent, comme jeu, $^{1}/_{10}\, t$ à l'extrémité des dents et $^{1}/_{20}\, t$ entre les flancs.

II. *Tracé d'une roue à dents intérieures.* Fig. 455. En faisant abstraction du jeu, la forme des dents pour une roue intérieure

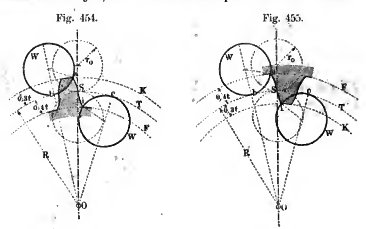


Fig. 454. Fig. 455.

est exactement la même que pour une roue dentée extérieurement, de même grandeur. Soient O le centre de la roue, T le rayon du cercle primitif, K le cercle de tête, tracé à l'intérieur de T, à une distance égale à $0,3\,t$, F le cercle de pied, tracé à l'extérieur de T et distant de $0,4\,t$; prenons $r_0 = 0,875\,t = 2,75\frac{t}{\pi}$ et, pour l'épaisseur des dents, $^{19}/_{40}\,t$. Sa représente un arc d'épicycloïde, engendré par le roulement de W sur T, et Si un arc d'hypocycloïde, engendré par le roulement du même cercle à l'intérieur de T.

Pour la crémaillère, on a $R = \infty$. Sa et Si deviennent, dans ce cas, des arcs congruents de cycloïde ordinaire (v. fig. 452, § 187). — Avec le système de denture indiqué précédemment, la ligne d'engrènement se trouve coïncider avec le cercle générateur; l'arc d'engrènement a pour valeur l'arc ba, augmenté de l'arc $b_1\,a_1$, qui lui correspond sur l'autre roue, lorsque les deux roues sont dentées extérieurement; dans le cas où l'une des roues est à dents intérieures, cet arc est égal à l'arc ba, augmenté de l'arc ci sur cette roue. La durée de l'engrènement ε varie de 1,22 à 1,60.

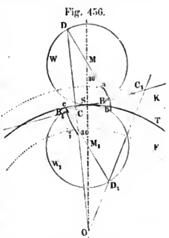
§ 192.

Tracé des arcs de cycloïde par arcs de cercle.

Les arcs de cycloïde, qui constituent les profils des dents, peuvent pratiquement être remplacés, avec une approximation suffisante, par deux portions d'arcs des cercles de courbure.

Fig. 456. Du point O comme centre on décrit le cercle primitif T et les cercles de tête et de pied K et F, déterminés comme nous l'avons indiqué précédemment; de même, des centres M et M_1, on décrit les cercles de roulement W et W_1, tangents tous les deux en S au cercle T. Cela fait, on trace les diamètres BMD et $B_1 M_1 D_1$, qui font tous les deux avec la ligne des centres un angle de 30° et on mène la droite $C_1 BSB_1$, qui passe par les trois points B, S et B_1; en joignant les points D et D_1 au point O, on obtient les droites OD et OD_1C_1, dont les points d'intersection C et C_1 avec la droite précédente sont précisément les centres de courbure des arcs aBb et cB_1i. Si on trace ces arcs, en les arrêtant aux cercles décrits primitivement du point O, on n'a plus qu'à les rapprocher pour obtenir le profil complet de la dent.

Fig. 456.



Par le calcul on trouve pour l'expression des rayons de courbure:

$$\frac{\varrho}{t} = 0{,}45\,\frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \quad \text{et} \quad \frac{\varrho}{\left(\frac{t}{\pi}\right)} = 1{,}42\,\frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \quad . \quad . \quad (179).$$

Le signe + correspond au rayon de courbure CB (ϱ_a) de l'arc d'épicycloïde et le signe — au rayon de courbure $C_1 B_1$ (ϱ_i) de l'arc d'hypocycloïde. Le pied de la dent doit d'ailleurs, comme nous l'avons vu, être raccordé par un congé avec la couronne de la roue.

1er Exemple. En supposant $\mathfrak{Z} = 63$, $t = 30$, *on obtient, pour le rayon de courbure de l'arc d'épicycloïde:* $\varrho_a = 30 \cdot 0{,}45 \frac{126 + 11}{63 + 11} = 30 \cdot 0{,}45 \cdot \frac{137}{74} = 0{,}833 \cdot 30$, *ou, très-approximativement,* 25^{mm}; *de même, on a, pour le rayon de courbure de l'arc intérieur:* $\varrho_i = 30 \cdot 0{,}45 \frac{126 - 11}{63 - 11} = 30 \cdot 0{,}45 \cdot \frac{115}{52} = 0{,}995 \cdot 30 = 30^{mm}$.

2e Exemple. On donne $\mathfrak{Z} = 11$, $\frac{t}{\pi} = 10$. *On a alors:* $\varrho_a = 10 \cdot 1{,}42 \; \frac{33}{22} = \frac{42{,}6}{2} = 21^{mm}{,}3$, *et* $\varrho_i = 10 \cdot 1{,}42 \frac{11}{0} = \infty$, *c'est-à-dire que, dans ce cas, les flancs se composent de simples lignes droites, tracées par le centre de la roue.*

3e Exemple. On donne $\mathfrak{Z} = 7$, $t = 50$. *On a:* $\varrho_a = 50 \cdot 0{,}45 \frac{14 + 11}{7 + 11} = 50 \cdot 0{,}45 \frac{25}{18} = 31^{mm}{,}2$, *ou, en nombre rond,* 31^{mm}. *On trouve ensuite, pour le rayon de l'arc intérieur:* $\varrho_i = 50 \cdot 0{,}45 \cdot \frac{14 - 11}{7 - 11} = -50 \cdot 0{,}45 \cdot \frac{3}{4} = -50 \cdot 0{,}3375 = -17^{mm}$ *approximativement. Dans ce cas les flancs de la dent se trouvent disposés comme l'indique la fig. 452 (§ 187).*

Remarque. Lorsque le nombre des dents est inférieur à 15, il est préférable de recourir au tracé exact indiqué dans le § 191, car, dans ce cas, la forme approximative que fournirait le tracé par arcs de cercle ne donnerait pas une marche suffisamment régulière.

§ 193.

Denture à flancs droits.

Le tracé des flancs droits est un cas simple du tracé des cycloïdes; les roues qu'on obtient de cette manière sont des roues non harmoniques (v. § 184); ce genre de tracé convient spécialement pour les engrenages coniques, puisqu'il conduit, dans ce cas, à adopter, pour les flancs des dents de bois, des surfaces planes qui sont, à tous égards, les plus avantageuses pour cette matière.

I. *Roues engrènant extérieurement.* Fig. 457. Soient $\mathfrak{Z}$ le nombre des dents, R le rayon de la roue à dents de bois, $\mathfrak{Z}_1$ et R_1 les données correspondantes pour la roue à dents de fonte, t le pas, k et f, k_1 et f_1 les longueurs de tête et de pied des dents pour les deux roues, W le cercle de roulement, qui engendre le profil des dents de la roue R_1. On doit prendre

$R = \frac{\mathfrak{Z} t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, le rayon de W égal à $\frac{R}{2}$, $R_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, $k = 0{,}1\,t$, $f = 0{,}6\,t$, $k_1 = 0{,}5\,t$, $f_1 = 0{,}2\,t$ et l'épaisseur des dents, pour les deux roues, égale à $\frac{19}{40}t$. Le profil aSi de la dent à flancs droits se compose de la droite Si, dirigée suivant un rayon du cercle O et d'un quart d'arc de cercle Sa, dont le rayon est égal à $\frac{t}{10}$. L'arc Sb_1 étant pris égal à l'arc $b_1 a_1$, Sa_1 représente un arc d'épicycloïde, engendré par le roulement du cercle W sur le cercle T_1; l'arc $a_1 S$ est prolongé par nne portion de droite Si_1, qui se raccorde par un congé avec l'arc de la roue; l'ensemble de ces deux lignes $a_1 S$ et Si_1, ou $a_1 S i_1$, donne le profil de la dent à flancs courbes.

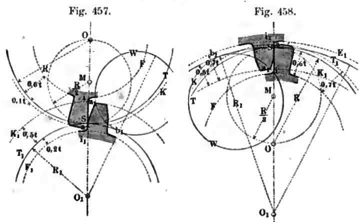


Fig. 457. Fig. 458.

II. *Roues à engrènement intérieur.* Fig. 458. La roue à denture intérieure porte les dents courbes en fonte; son rayon est R_1 et le nombre des dents $\mathfrak{Z}_1$; pour la seconde roue, le nombre des dents est $\mathfrak{Z}$ et le rayon R; le cercle générateur W a pour rayon $\frac{R}{2}$; quant aux longueurs de la tête et du pied de chaque dent, elles ont les mêmes expressions que précédemment. Le profil de la dent en bois est la droite aSi, qui est légèrement arrondie à la partie supérieure; le profil de la dent en fonte est $a_1 S i_1$, qui se compose de l'arc d'hypocycloïde $a_1 S$, engendré par le roulement de W sur T_1 et de la partie de raccordement Si_1.

Si on voulait mettre les dents à flancs droits sur la roue à denture intérieure, il faudrait adopter, pour le profil des dents de l'autre roue, un arc de péricycloïde, engendré par le roulement, sur le cercle primitif de cette roue, d'un cercle générateur, dont le rayon serait le moitié de celui de la première roue. Au point de vue de l'exécution, les formes de dents ainsi obtenues seraient moins avantageuses que celles fournies par la méthode précédente.

Dans le tracé par flancs droits, pour la denture d'une crémaillère et de son pignon, on peut opérer de deux manières: prendre R_1 infini, en conservant pour R une valeur finie; dans ce cas, le profil des dents du pignon serait formé de lignes droites, tandis que celui des dents de la crémaillère se composerait d'arcs de cycloïde ordinaire; si, au contraire, on prenait R infini, R_1 conservant une valeur finie, la crémaillère aurait des dents à flancs droits, tandis que celles du pignon seraient formées par des développantes de cercle.

Dans le tracé par flancs droits, la ligne d'engrènement coïncide avec le cercle générateur $\left(\frac{R}{2}\right)$; la longueur de l'arc d'engrènement est égale à l'arc $b_1\,a_1$; enfin la durée de l'engrènement ε est comprise entre 1,7 et 3,7. Quand les deux profils de la dent à flancs courbes viennent à se couper, avant de rencontrer le cercle de tête, cette dent n'est admissible qu'à la condition que ε reste plus grand que 1; dans le cas contraire, il convient d'augmenter le nombre des dents.

§ 194.

Dentures à fuseaux. Dentures mixtes.

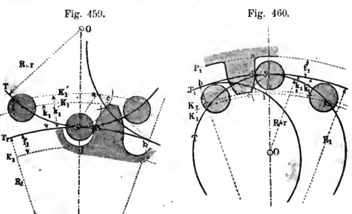
On utilise encore assez souvent le tracé par lignes droites, en munissant les deux roues de dents, dont le pied est formé de flancs droits et la tête de flancs courbes. Mais les dents qu'on obtient ainsi ne jouissent pas de la propriété d'engrener rigoureusement l'une avec l'autre et, pour ce motif, ne doivent pas être admises dans la construction ordinaire des machines. Il n'y a guère que les engrenages d'horlogerie pour lesquels on puisse, à la rigueur, conserver cette méthode de tracé, par ce qu'elle permet à la fois de tailler facilement les vides à la lime et d'employer des roues d'un petit nombre de dents.

Si on prend le diamètre du cercle générateur supérieur d'une certaine fraction au rayon du cercle primitif correspondant, on obtient des dentures qui sont encore d'une exécution possible, mais qui, en pratique, ne sont admissibles que pour des cas tout particuliers.

Lorsqu'on prend, pour cercle générateur, le cercle primitif d'une des deux roues, on obtient, pour le profil des dents de la roue correspondant au cercle primitif sur lequel il roule, des arcs d'épicycloïde, tandis que, pour l'autre roue, le profil des dents se réduit à un point. C'est dans ce genre de tracés que rentrent les engrenages à fuseaux.

Engrenages extérieurs à fuseaux. Fig. 459. Du point auquel se réduit le profil de la dent de la roue R, on décrit, avec $\frac{19}{80}t$ pour rayon, un cercle, qui donne le profil du fuseau correspondant à ce point. Quant au profil de la dent sur la roue R_1, il est formé par une courbe parallèle (ou équidistante) à l'arc d'épicycloïde Sa, engendré par le point S, dans le roulement de T sur T_1 (l'arc ab = l'arc Sb); l'enveloppe des cercles, décrits des différents points de Sa, avec un rayon égal à celui du fuseau, donne le profil cd d'une partie de cette dent; l'autre partie di est formée par un quart de cercle. La ligne d'engrènement coïncide avec le cercle T; sa longueur SI, dont la limite I est déterminée par le cercle de tête K'_1 et qui est égale à l'arc d'engrènement, doit être supérieure à t et, par suite, au moins

Fig. 459. Fig. 460.



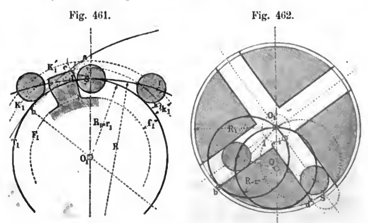
égale à 1,1 t. Cette dernière valeur sert à déterminer la longueur k'_1 et la longueur réelle de la tête k_1, qui s'en déduit.

Engrenage intérieur à fuseaux. Fig. 460. La marche à suivre est identique à la précédente. La partie cd du profil de la dent est formée par une courbe parallèle à l'arc d'hypocycloïde Si, engendré par le roulement de T sur T_1 (l'arc Sb = l'arc ib); la longueur SI de l'engrènement, qui est la même que celle de l'arc, doit être prise au moins égale à 1,1 t. Le profil da du pied de la dent est une droite, dirigée suivant le rayon et qui n'a pas besoin d'être raccordée avec la couronne par un arc de cercle d'aussi grand rayon que dans la fig. 459.

Dans la fig. 461, c'est la roue creuse qui porte les fuseaux; le profil cd est parallèle à l'arc de péricycloïde Sa, engendré par le roulement de T sur T_1 (l'arc Sb = l'arc ab); la longueur SI de l'engrènement, qui, comme précédemment, est la même que celle de l'arc, doit être au moins égale à 1,1 t; le profil di du pied de la dent est une droite radiale.

La fig. 462 représente un cas particulier du tracé de la fig. 460. On a, dans ce cas, $R = \frac{1}{2} R_1$ et, par suite, $\mathfrak{Z} = \frac{1}{2}\mathfrak{Z}_1$, ce qui, pour $\mathfrak{Z} = 2$, donne $\mathfrak{Z}_1 = 4$. Le profil cd est une parallèle à la droite Si, à laquelle se réduit ici l'hypocycloïde (l'arc Sb = l'arc bi); la longueur SI de l'engrènement a encore la même valeur que l'arc d'engrènement. Cet arc est ici nécessairement

Fig. 461. Fig. 462.



plus petit que t; toutefois, comme la forme droite des flancs des dents de la roue R_1 permet de supprimer tout jeu, de telle sorte

que le même fuseau engrène avec les deux flancs opposés, il en résulte que la valeur de l'arc d'engrènement peut être considérée comme égale au double de SI.

Plusieurs auteurs regardent ce genre d'engrenage comme un mécanisme spécial; du reste, dans les installations où on en fait usage, les fuseaux sont de véritables rouleaux mobiles, munis de tourillons.

Si, dans la fig. 460, on fait croître indéfiniment le rayon R_1, on obtient le mécanisme à crémaillère, dans lequel les profils des dents, sur la crémaillère elle-même, sont formés par des lignes parallèles à des cycloïdes ordinaires.

Si, au contraire, c'est le rayon R qu'on fasse croître indéfiniment, dans la fig. 461, on obtient une forme de crémaillère très-simple, d'une exécution commode, qui est le plus souvent employée de préférence à la première; sur le pignon les profils des dents sont formés par des parallèles à des développantes de cercle.

Les engrenages à fuseaux, pour les installations qui exigent une certaine précision et qui ne se répètent pas souvent, offrent cet avantage que les fuseaux peuvent être exécutés très-simplement et très-exactement au moyen du tour; les crémaillères à fuseaux, en fer forgé, sont très-employées, dans la pratique, pour tous les appareils qui sont très-exposés au froid, comme les appareils de manœuvre des écluses, des ponts tournants, etc.

Denture à deux points. Fig. 463. Si on réunit ensemble deux dentures à un seul point, on obtient une nouvelle denture, qui permet

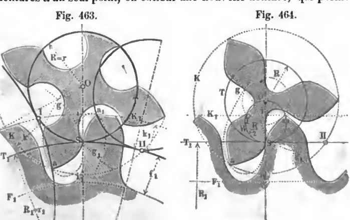


Fig. 463. Fig. 464.

d'adopter, pour l'une des roues, un nombre de dents très-faible et de passer, par suite, d'une vitesse à une autre très-différente, en employant des roues de dimensions peu considérables. Dans la figure, les deux cercles primitifs sont en même temps cercles générateurs. Sa est un arc d'épicycloïde (engendré par le roulement de T_1 sur T) qui, sur la longueur SI, engrène avec le point S de la roue T; Sa_1 est un second d'arc d'épicycloïde (engendré par le roulement de T sur T_1), qui, sur la longueur SII, engrène avec le point S de la roue T_1. Si et Si_1 sont les profils des pieds des dents pour les roues R et R_1, Sag et Sa_1g_1 les profils théoriques des vides des mêmes roues (v. IV, § 187). La petite roue est d'un emploi très-convenable, à la condition d'encastrer les dents entre deux couronnes latérales; ce mode d'engrenage se rencontre fréquemment dans les treuils de voitures et les appareils d'élévation.

Denture mixte. Fig. 464. Ce genre de denture, qui est très-convenable pour les petits pignons des appareils d'élévation, a l'avantage de diminuer l'évidement du pied de la dent. Ce résultat est dû à l'emploi de flancs droits pour le pied des dents de la petite roue. Pour obtenir une durée d'engrènement suffisante (dans la roue à trois dents avec crémaillère elle atteint 1,15), il convient d'utiliser, sur les deux roues, les courbes qui déterminent la tête des dents, jusqu'à leur point de rencontre. Dans la figure, Sa est un arc de développante de cercle, engendré par le roulement sur T du cercle primitif T_1 (qui ici, pour la crémaillère, se réduit à une ligne droite); Si est une ligne droite radiale, engendrée par le roulement sur T du cercle W de rayon $\frac{R}{2}$, Sa_1g_1 est le profil théorique du vide de la roue T. L'engrènement de Sa avec le point S de la crémaillère a lieu sur la longueur SII. L'arc de cycloïde Sa_1, engendré par le roulement de W sur T_1, engrène, sur la longueur SI, avec le flanc Si du pied de la dent de la roue T.

§ 195.

Dentures à développantes de cercle.

Dentures extérieure et intérieure. Fig. 465 et 466. Supposons donnés le nombre $\mathfrak{Z}$ des dents et le pas t, ou le rapport

$\frac{t}{\pi}$ de la roue, dont il faut tracer les dents, avec un profil formé par un arc de développante de cercle. Prenons $OS = R = \frac{\mathfrak{Z}t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, puis traçons les cercles de tête et de pied, F et K, à des distances f et k du cercle primitif, respectivement égales à 0,4 t

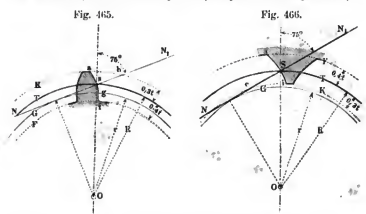


Fig. 465. Fig. 466.

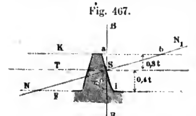
et 0,3 t et adoptons $^{19}/_{40}\, t$ pour l'épaisseur des dents. Par le point S menons la ligne NSN_1, inclinée de 75° sur la ligne OS; le cercle G, mené tangentiellement à cette droite, aura pour rayon $r = 0{,}966\, R = 0{,}154\, \mathfrak{Z}t = 0{,}483\, \mathfrak{Z}\left(\frac{t}{\pi}\right)$. Les arcs Sa et Sg, décrits par le point S de la droite, pendant son déroulement et son enroulement sur le cercle G, donnent le profil cherché aSg de la dent qui, dans le cas de la denture extérieure et pour un nombre de dents inférieur à 55, doit être prolongé par une partie droite radiale gi et raccordé par un congé avec la couronne de la roue.

La ligne d'engrènement est NN_1; sa longueur totale se compose des deux segments Sb et Sb_1, déterminés par les intersections de cette ligne avec les cercles de tête; pour la roue à denture intérieure (fig. 466), le segment inférieur est Sc. Pour déterminer la durée ε de l'engrènement, il suffit de mener, par les extrémités d'un arc égal au pas, pris sur le cercle primitif, deux rayons et de prendre l'arc qu'ils comprennent sur le cercle de rayon r, comme unité de mesure, pour la longueur de l'engrène-

ment. Pour deux roues de même grandeur, ayant chacune 14 dents, ε n'est que très-peu supérieur à l'unité; en général, ε se trouve compris entre 1 et 2,5.

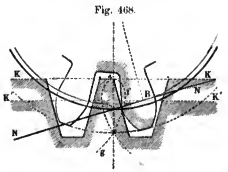
Crémaillère. Fig. 467. Le profil des dents se réduit à une droite aSi, inclinée de 75° sur le cercle primitif T, qui est ici une ligne droite. L'angle de 75° s'obtient facilement en juxtaposant deux équerres ordinaires, l'une à 45°, l'autre à 30°.

Fig. 467.



Dans les roues d'un petit nombre des dents, le cercle de rayon r, qui limite la partie courbe du profil des dents, se rapproche beaucoup du cercle primitif. Il en résulte un inconvénient assez grave au point de vue de l'engrènement. Dans ce cas, en effet, le segment SB de la droite NN, qui se trouve compris entre les deux cercles, est plus petit que l'autre segment, déterminé par l'intersection de la droite NN avec le cercle de tête de la dent de la roue conductrice (fig. 468), de telle sorte que l'arête a tend à entailler le

Fig. 468.



pied de l'autre dent suivant le profil correspondant à l'arc afg (v. fig. 452). Pour que cet inconvénient ne puisse pas se produire, il faudrait que la ligne limitant la tête de la dent, à laquelle appartient le point a, ne s'élevât pas au-dessus de la ligne KK', menée par le point B (1).

(1) La contradiction qu'impliquerait ce résultat d'une denture géométriquement exacte, conduisant à un engrènement inadmissible, n'est, en réalité, qu'apparente. D'après les hypothèses faites relativement à la longueur des têtes de dents, le profil du pied de la dent sur la petite roue devrait



Avec le mode de denture que nous venons d'indiquer, la condition précédente ne se trouve réalisée, pour les roues engrènant avec une crémaillère, que lorsque $\mathfrak{z}$ est au moins égal à 28. Un autre moyen de prévenir cet arc-boutement consiste à supprimer l'arête a et à la remplacer par une partie arrondie; ce moyen est souvent usité dans la pratique; nous devons ajouter toutefois que, dans certains cas, on est obligé d'aller assez loin, pour faire disparaître tout danger d'arc-boutement.

§ 196.

Frottement des dents d'engrenages droits.

Le frottement des dents d'engrenages, dans les roues droites, dépend essentiellement des courbes adoptées pour les profils et se détermine d'après la forme, la grandeur et la position de la ligne d'engrènement. D'une manière générale, le frottement augmente avec la durée ε de l'engrènement. Dans l'expression de ce frottement, ε se trouve affecté d'un coefficient, variable avec la position de la ligne d'engrènement et qui est égal à $\frac{1}{2}$ lorsque l'arc d'engrènement, comme cela a ordinairement lieu pour les dents à profils cycloïdaux, se trouve partagé en deux parties égales par la ligne des centres des cercles primitifs; il est égal à 1, lorsque cet arc se trouve tout entier situé d'un même côté de la ligne des centres, comme dans les dents à flancs droits; enfin il peut être pris égal à $\frac{3}{4}$, lorsque la division de la ligne d'engrènement, comme dans les dentures par développantes, se trouve intermédiaire entre les deux précédentes. Le frottement dépend, dans une assez forte mesure, du nombre des dents, puisqu'il est inversement proportionnel à ce nombre et il diminue, par suite, très-rapidement, à mesure que ce nombre augmente.

Si on désigne par f le coefficient de frottement, par $\mathfrak{z}$ et $\mathfrak{z}_1$ les nombres de dents, la perte de travail p_r, due au frottement des dents, est exprimée par les formules suivantes:

a) pour les dentures à profils cycloïdaux:

$$p_r = \pi f \left(\frac{1}{\mathfrak{z}} \pm \frac{1}{\mathfrak{z}_1}\right) \frac{\varepsilon}{2} \quad \cdots\cdots \quad (180)$$

être formé, non pas d'un arc à simple courbure, mais d'une double courbe (♈), composée de deux arcs de développantes venant se raccorder en pointe sur le cercle de rayon r; de ces deux arcs, l'un tomberait dans le vide et serait, par suite, inexécutable. Il s'agit donc ici, en réalité, de l'un des cas traités précédemment (I, § 187). La courbe de pied, indiquée dans la fig. 468, n'est pas admissible, puisqu'elle retranche une partie de la courbe rigoureuse.

b) pour les dentures à flancs droits:

$$p_r = \pi f \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}} \pm \frac{1}{\mathfrak{Z}_1}\right) \varepsilon \,. \quad .$$

c) pour les dentures à développantes: . . . . . . (180).

$$p_r = \pi f \left(\frac{1}{\mathfrak{Z}} \pm \frac{1}{\mathfrak{Z}_1}\right) {}^3/_4\, \varepsilon \,.$$

Le coefficient f, même pour les roues dont les dents sont parfaitement graissées, conserve une assez grande valeur, car la pression par unité de surface est généralement très-forte; le plus souvent on peut adopter la valeur $f = 0{,}15$; toutefois, pour les roues neuves et celles qui ne sont pas graissées, f s'élève à 0,20 ou 0,25 et même au delà. Dans les formules on doit prendre le signe —, lorsqu'une des roues ($\mathfrak{Z}_1$) est à denture intérieure.

1er Exemple. Dans une paire de roues, ayant toutes les deux sept dents, à profils cycloïdaux, la durée de l'engrènement a pour valeur $\varepsilon = 1{,}225$. *En prenant* $f = 0{,}15$, *la formule (180 a) donne, pour la perte de travail par le frottement:* $p_r = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 2 \cdot 1{,}225}{2 \cdot 7} = 0{,}08243$ *ou* $8\,{}^1/_4\, p^0/_0$.

2e Exemple. Denture à profils cycloïdaux. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$. *Dans ce cas* $\varepsilon = 1{,}44$ *et on a:* $p_r = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 2 \cdot 1{,}44}{2 \cdot 40} = 0{,}016995$ *ou* $1{,}7\ p^0/_0$.

3e Exemple. Denture à profils cycloïdaux. $\mathfrak{Z} = 7$, $\mathfrak{Z}_1 = 60$ *(roue à denture intérieure). On a alors* $\varepsilon = 1{,}40$ *et, par suite,*
$p_r = 3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}7 \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{60}\right)$ *ou* $4{,}2\ p^0/_0$.

4e Exemple. Denture à profils cycloïdaux. $\mathfrak{Z} = 7$, $\mathfrak{Z}_1 = \infty$ *(crémaillère). Dans ce cas* $\varepsilon = 1{,}37$ *et* $p_r = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}37}{2} \left(\frac{1}{7} + 0\right)$, *ou* $4{,}6\, p^0/_0$.

5e Exemple. Denture à flancs droits. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$. *On trouve, dans ce cas,* $\varepsilon = 1{,}85$ *et la formule (180 b) donne alors:* $p_r = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}15 \cdot 1{,}85 \cdot 2}{40}$, *ou* $4{,}3\ p^0/_0$, *c'est-à-dire une perte qui est sensiblement 2 fois ½ celle que nous avons trouvée pour l'exemple n° 2.*

6e Exemple. Denture à développantes. $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_1 = 40$. *On a alors:* $\varepsilon = 1{,}92$ *et la formule (180 c) donne:* $p_r = \frac{3{,}14 . 0{,}15 . 2 . 0{,}75 . 1{,}92}{40} = 0{,}0339$ *ou* $3{,}4\ p^0/_0$, *valeur double de celle de l'exemple n° 2.*

On peut conclure de là que, pour les trois genres de dentures, le maximum de perte par le frottement correspond aux flancs droits et le minimum aux profils cycloïdaux.

L'usure des dents ne dépend pas seulement de la valeur du coefficient de frottement, mais encore des variations de la pression mutuelle des dents aux différents points et du rapport des longueurs des parties frottantes des profils des dents des

deux roues. Il est évident, d'après cela, que, dans les dents à pression constante, l'usure n'est pas nécessairement, par cela même, égale pour tous les points et c'est une grave erreur de supposer, comme on le fait souvent, que dans les dentures à développantes (où la pression est constante), l'usure ne modifie pas la forme des dents. C'est, au contraire, pour ce genre de denture, que les déformations, dues à l'usure, se trouvent être relativement les plus considérables, puisque, dans ce cas, la différence de longueur entre les parties frottantes (le flanc compris à l'intérieur du cercle primitif, et la tête de l'autre dent) est précisément plus grande que dans les autres systèmes. On a, du reste, souvent l'occasion de vérifier, dans la pratique, l'exactitude de cette remarque; de deux roues engrènant ensemble et munies de dents à développantes, la plus petite (le pignon) présente fréquemment des creux d'une assez grande profondeur, dans la partie du profil située à l'intérieur du cercle primitif. Au point de vue de l'usure, des trois systèmes principaux de dentures que nous avons examinés, le plus avantageux est encore celui des profils cycloïdaux.

Il nous reste, en terminant, à faire remarquer qu'on peut tracer géométriquement la perte de travail due au frottement et que nous venons de calculer. A cet effet, on prend les différences de longueur des parties frottantes des profils, on les divise par les cordes correspondantes de l'arc d'engrènement et on multiplie par le coefficient de frottement la somme des deux quotients ainsi obtenus. Le résultat est la perte de travail p_r. Dans les dentures par développantes, les deux cordes se confondent précisément avec les deux segments de la ligne d'engrènement. La même règle fournit également la valeur de p_r pour les dentures à fuseaux. Cette règle donne au dessinateur le moyen de tracer au compas, sur son dessin, la perte de frottement correspondant au système de denture qu'il a adopté.

§ 197.

Avantages et inconvénients des différents systèmes de dentures.

Les deux systèmes principaux de dentures à développantes et à profils cycloïdaux présentent chacun des avantages et des inconvénients que nous allons exposer successivement.

Dentures à profils cycloïdaux. Un des grands avantages de ce système consiste en ce que, pour des roues d'égale grandeur, la limite du nombre des dents peut être abaissée jusqu'à 7, tandis que, dans le système à développantes, pour les roues de même grandeur, la limite inférieure est 14 et, pour des roues inégales, de 11 sur la plus petite. Avec les profils cycloïdaux, la perte de travail, due au frottement, est relativement très-faible et l'usure ne modifie que très-légèrement la forme des dents. Un inconvénient, d'ailleurs assez faible, est la double courbure (en forme d'un S) que doivent présenter les profils et qui rend leur exécution un peu plus difficile. Un second inconvénient tient à ce que l'écartement des axes des deux roues engrènant ensemble ne peut pas être modifié sensiblement, sans altérer la régularité de la transmission de mouvement.

Dentures par développantes. Les avantages les plus importants de ce système tiennent, en premier lieu, à la forme très-simple des dents et, en second lieu, à ce que les axes des deux roues peuvent être légèrement déplacés, sans que ces roues cessent de transmettre le mouvement dans un rapport constant. Mais ces avantages sont compensés, du moins pour les roues d'un petit nombre de dents, par l'inconvénient que nous avons signalé précédemment et qui consiste en ce que, dans ce cas, la tête de la dent d'une des roues doit décrire par rapport à la dent qui engrène avec elle, ou, plus exactement, par rapport à son flanc droit, un chemin tel qu'elle lui communique forcément une vitesse irrégulière.

Cet inconvénient peut-d'ailleurs être corrigé, en écartant les axes des deux roues d'une quantité assez forte pour que, dans ces deux roues, les dents viennent au moins sortir en même temps de la ligne d'engrènement. Il en résulte que cette denture fournit par elle-même le moyen de corriger un de ses défauts; toutefois, lorsqu'il s'agit de transmissions importantes et où on a à redouter des chocs assez fréquents, il convient d'éviter de marcher avec des roues ainsi écartées, surtout lorsque le nombre des dents est peu considérable.

La denture par développantes ne doit donc, en général, être recommandée que pour les roues d'un grand nombre de dents (celles où le pignon n'en a pas moins de 30), car, dans ce cas, on peut utiliser convenablement les propriétés qu'elle présente, tandis que pour les engrenages, où des conditions spé-

ciales conduisent à l'emploi de pignons d'un diamètre aussi faible que possible, il est indispensable de recourir à l'emploi des profils cycloïdaux. Ce dernier système de denture est d'ailleurs excellent, comme nous l'avons dit, pour les roues d'un grand nombre de dents et il présente de très-sérieux avantages au point de vue du frottement et de l'usure. Son emploi tend surtout à se généraliser, dans les usines de construction, pour les roues droites, qu'on établit de manière à ce qu'une roue quelconque jouisse de la propriété d'engrener convenablement avec toutes les roues de même pas; ce qui a l'avantage de réduire considérablement le nombre des modèles. Pour les roues coniques, auxquelles on ne cherche pas généralement à donner la même propriété, la denture par développantes est préférable, en raison de la forme plus simple des dents.

Dans les dentures à flancs droits qui, par suite de la forme également simple du profil, trouvent aussi avantageusement leur emploi dans les roues coniques, la partie droite, dirigée suivant le rayon, sur laquelle se produit l'engrènement, pour la dent en bois, est souvent d'une assez faible longueur (elle est d'autant plus petite que le nombre des dents de la roue à flancs droits est plus considérable); il en résulte que l'effet de l'usure sur cette dent peut être très-sensible, si on n'a pas la précaution de diminuer cette usure par le moyen simple, qui consiste à donner aux dents une largeur suffisamment considérable.

Les dentures à fuseaux, ainsi que celles qui ont été désignées sous le nom de dentures mixtes, rendent, comme nous l'avons dit, d'assez grands services dans quelques cas particuliers, pour les appareils d'élévation, par exemple, et d'autres encore, où on fait usage de roues à dents en fer. Pour tous les appareils de ce genre, les règles, que nous avons indiquées précédemment, trouvent naturellement leur application.

B. Tracés des dents des roues coniques.

§ 198.

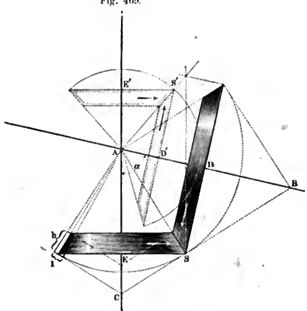
Généralités sur les dents des roues coniques.

Dans les roues coniques, les cercles proportionnels aux vitesses se trouvent situés sur les deux cônes principaux, dont les sommets coïncident avec le point d'intersection des axes

géométriques de ces roues. Nous prendrons comme cercles primitifs les deux cercles proportionnels SD et SE, fig. 469, qui forment les bases des deux cônes. Les longueurs des dents se mesurent, pour chaque roue, sur le cône supplémentaire du cône principal correspondant; SB et SC sont les génératrices des deux cônes supplémentaires, la ligne BC étant supposée perpendiculaire à AS. Les longueurs des dents sont alors comptées suivant SB et SC, la largeur suivant SA et l'épaisseur sur les cercles primitifs; les dents sont formés par des pyramides, qui ont pour sommet commun le point A.



Fig. 469.



Pour déterminer les rayons SD et SE des cônes principaux, il suffit de diviser l'angle α des axes des roues par la génératrice de contact SA, de telle manière que les perpendiculaires SD et SE, abaissées d'un point S de cette ligne sur les axes, soient directement proportionnelles aux nombres de dents de roues, ou inversement proportionnelles aux nombres de tours, c'est-à-dire de telle sorte qu'on ait: $\frac{SD}{SE} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}_1} = \frac{n_1}{n}$. On voit par là que le problème comporte deux solutions, suivant que la

ligne de division est menée à l'intérieur de l'angle α ou de l'angle supplémentaire, en d'autres termes, suivant qu'on considère, comme angle des axes, l'angle α ou son supplément. La différence entre ces deux solutions consiste en ce que, pour un même sens de rotation de l'arbre moteur, l'arbre mené tourne à droite dans l'un des cas et à gauche dans l'autre (fig. 469). L'une de ces solutions peut donner une roue à denture intérieure; c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsqu'on a: $\frac{n_1}{n} < \cos \alpha$.

Lorsque les roues coniques doivent satisfaire à la condition du § 184, c'est-à-dire qu'elles doivent être établies de telle sorte qu'une roue donnée puisse engrener convenablement avec une série d'autres, il faut non seulement que le pas soit le même, mais encore que la génératrice de contact (AS, fig. 469) ait la même longueur pour toutes ces roues. Cette dernière condition est très-rarement remplie et, par suite, les roues coniques, ayant le même pas et le même mode de denture, ne jouissent pas généralement de la propriété d'engrener convenablement les unes avec les autres. Du reste, dans la pratique, on considère comme admissibles, c'est-à-dire comme pouvant engrener suffisamment l'une avec l'autre, les roues établies avec des longueurs de lignes de contact, dont la différence ne dépasse pas 5 p %. Les roues qui, pour un même angle des axes, sont établies avec une différence de l'ordre de celle que nous venons de signaler, constituent ce qu'on appelle des *roues bâtardes*. Ainsi, par exemple, lorsque deux roues coniques, à angle droit, de 80 et de 45 dents, sont établies de manière à engrener convenablement l'une avec l'autre, la tolérance pratique, dont nous venons de parler, permet de faire engrener, à angle droit, avec la roue de 45 dents, une roue bâtarde, dont le nombre de dents soit compris entre 80 (1 + 0,05) et 80 (1 — 0,05), c'est-à-dire entre 84 et 76 dents.

§ 199.

Roues auxiliaires des roues coniques.

On obtient, pour les roues coniques, des formes de dents convenables, si on reporte, sur les surfaces développées des cônes supplémentaires, les profils de dents correspondant aux roues auxiliaires, considérées comme roues droites, et si on joint

les divers points de ces profils au point d'intersection des axes.

Les roues auxiliaires de deux roues coniques R et R_1 sont les roues droites de même pas, dont les rayons r et r_1 sont les génératrices BS et CS des cônes supplémentaires de ces roues.

Fig. 470.

Pour un valeur donnée α de l'angle des axes, le rayon r et le nombre de dents $\mathfrak{z}$ d'une roue auxiliaire se déduisent des valeurs connues des rayons R et R_1 des roues coniques et de leurs nombres de dents $\mathfrak{Z}$ et $\mathfrak{Z}_1$, au moyen des formules suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{R^2 + R_1^2 + 2\,R R_1 \cos\alpha}}{R_1 + R\cos\alpha} \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{Z}} = \dfrac{\sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2 + 2\,\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1 \cos\alpha}}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z}\cos\alpha} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (180).$$

Dans le cas où l'angle α est droit, ces formules deviennent:

$$\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{R^2+R_1^2}}{R_1}, \quad \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}^2+\mathfrak{Z}_1^2}}{\mathfrak{Z}_1}, \quad \frac{r}{r_1} = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2. \quad \cdot \quad (181).$$

Exemple. Pour deux roues coniques engrènant ensemble, les nombres de dents sont 30 et 50 et l'angle des axes $\alpha = 60^\circ$; *on a alors* $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ *et, par suite, pour la roue auxiliaire de la roue conique de 30 dents,* $\mathfrak{z} = \dfrac{30\cdot\sqrt{30^2 + 50^2 + 2\cdot 30\cdot 50\cdot 0{,}5}}{50 + 30\cdot 0{,}5} = \dfrac{6\cdot\sqrt{4900}}{13} = 32{,}3$; *on peut prendre 32. Pour l'autre roue de 50 dents, on aurait de même:* $\mathfrak{z}_1 = \dfrac{50\cdot\sqrt{4900}}{30+50\cdot 0{,}5} = \dfrac{50\cdot 70}{55}$, *ou approximativement 64. C'est avec ces éléments qu'on doit tracer les dents des roues auxiliaires.*

L'emploi d'un petit nombre de dents pour les roues coniques doit être évité autant que possible, en raison de l'importance que peuvent prendre, dans ce cas, les erreurs que comporte toujours nécessairement la méthode des roues auxiliaires. Lorsqu'on ne descend pas au-dessous de 24, pour le nombre des dents d'une roue conique, sa roue auxiliaire en a au moins 28 et on peut alors (v. § 195), adopter la denture par développantes. Les facilités qu'elle présente, pour l'exécution des dents, la rend, dans ce cas, préférable à toutes les autres, malgré les petits inconvénients auxquels elle donne lieu. Comme les erreurs d'exécution, dans la denture des roues coniques, sont encore plus à redouter

que pour les roues droites, il convient de prendre toujours, autant que possible, un nombre de dents assez considérable.

La perte de travail, due au frottement des dents, dans les roues coniques, est sensiblement la même que celle de leurs roues auxiliaires.

§ 200.

Roue plane.

Les roues coniques à denture intérieure ne sont pas admissibles au point de vue pratique, car l'exécution de leurs modèles et leur ajustage présenteraient beaucoup plus de difficultés que pour les roues ordinaires. Nous devons cependant signaler un cas limite intéressant, qui tient le milieu entre ces deux genres de roues. Si l'on suppose que le rapport des vitesses de deux roues coniques soit numériquement égal à $cos\,\alpha$, on voit que, dans l'une des deux solutions indiquées précédemment, le cône principal de l'une des roues (SE dans la fig. 471) se transforme en un disque plan. La roue conique correspondante devient alors ce qu'on peut appeler une roue plane. Le cône supplémentaire de cette roue est un cylindre et le rayon de sa roue auxiliaire devient infini, c'est-à-dire que la forme des dents de cette roue doit être celle des dents d'une crémaillère.

Avec le tracé par développantes, cette dernière forme est particulièrement simple, de telle sorte que la construction de la roue plane mérite, à ce point de vue, d'attirer l'attention.

Le rapport des vitesses angulaires est, comme nous l'avons dit:

$$\frac{R_2}{R_1} = cos\,\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (183)$$

ce qui, pour $\alpha = 60^0$, par exemple, conduit à $\frac{R_2}{R_1} = 1/2$.

On voit, d'après cela, que, pour un valeur déterminée de l'angle des axes, l'emploi de la roue plane ne permet qu'un rapport unique des vitesses angulaires. Ce rapport peut également s'exprimer en fonction du demi-angle au sommet γ_2 de la roue conique R_2 et on a:

$$\frac{R_2}{R_1} = sin\,\gamma_2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (184).$$

Nous devons faire remarquer que deux roues coniques d'une même paire de roues peuvent engrèner séparément avec la même

roue plane. En supposant que ces deux roues R_2 et R_3 (fig. 472) aient leurs axes rectangulaires et que leurs angles au sommet soient γ_2 et γ_3, le rapport de leurs vitesses angulaires est:

$$\frac{R_2}{R_3} = tg.\,\gamma_2 = cotg.\,\gamma_3$$

Fig. 471.

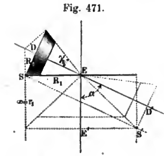
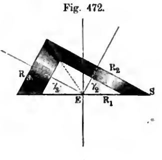


Fig. 472.



et on a:

pour

$\frac{R_2}{R_3} = tg.\,\gamma_2 =$	$^1/_4$	$^1/_3$	$^1/_2$	$^3/_4$	1	$^4/_3$	2	3	4
$\gamma_2 =$	14°	18°,30	26°,40	36°,50	45°	53°,10	63°,20	71°,30	76°
$\frac{R_2}{R_1} = sin.\,\gamma_2 =$	0,242	0,317	0,499	0,600	0,707	0,800	0,894	0,948	0,970.

L'une des deux roues R_2 et R_3 ne peut, à vrai dire, être employée avec la roue plane R_1 qu'autant que les nombres de dents permettent de réaliser, avec une approximation suffisante, le rapport $sin\,\gamma_2$. Bien que très-limitée dans son emploi, la roue plane peut cependant être utilisée avec avantage, dans certains cas particuliers, puisqu'elle fournit une solution d'une exécution très-facile.

C. Roues et vis sans fin.

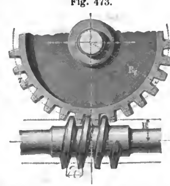
§ 201.

De la vis sans fin.

On désigne, sous le nom de *vis sans fin*, un dispositif spécial d'engrenage, composé d'une roue dentée cylindrique et d'une vis, et qui est employé pour établir une communication de mouvement entre deux arbres qui se croisent sans se couper. L'angle des axes de ces deux arbres est ordinairement un angle

droit, fig. 473. Dans ce cas, les dents de la roue doivent être inclinées sur les génératrices de la couronne de cette roue d'un angle γ, précisément égal à celui des filets de la vis, de telle sorte qu'on ait:

Fig. 473.



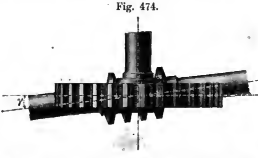
$$tg.\gamma = \frac{t}{2\pi R} = 0{,}15915\,\frac{t}{R},$$

t désignant le pas de la vis et R le rayon du cylindre sur lequel ce pas est mesuré.

Lorsque les deux axes peuvent être inclinés l'un sur l'autre, il est possible de faire usage d'une roue droite ordinaire, à la condition de placer l'axe de la vis dans une position qui fasse avec le plan de cette roue un angle γ. Cette disposition, que représente la fig. 474, est très-convenable, lorsque les plaques de fixation des paliers de la vis peuvent être établies parallèlement aux deux axes. On doit d'ailleurs remarquer que, dans ce cas, le pas de la vis, au lieu d'être, comme précédemment, le pas t de la roue, doit être pris égal à $\frac{t}{cos.\gamma}$.

En désignant par $\mathfrak{Z}$ le nombre de filets et n le nombre de tours de la vis, par $\mathfrak{Z}_1$ le nombre de dents et n_1 le nombre de

Fig. 474.



tours de la roue, le rapport de transmission ou des vitesses angulaires satisfait à la relation:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_1}.$$

Ordinairement $\mathfrak{Z} = 1$ (vis à un seul filet) et on a alors:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{1}{\mathfrak{Z}_1}.$$

Le frottement de la vis sur les dents de la roue est très-considérable, en raison du glissement longitudinal du filet sur les flancs des dents. En désignant par f le coefficient de frottement, la force P', qu'il faut appliquer réellement pour faire tourner la vis, et la force P qui, appliquée au même bras de levier, serait suffisante, si le filet n'éprouvait aucun frottement, sont entre elles dans le rapport:

$$\frac{P'}{P} = \frac{1 + f\frac{2\pi R}{t}}{1 - f\frac{t}{2\pi R}}.$$

Pour $f = 0{,}16$, cette expression se réduit sensiblement à

$$\frac{P'}{P} = 1 + \frac{R}{t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185).$$

D'où il résulte que, pour diminuer la perte par le frottement, il convient de faire $\frac{R}{t}$ aussi petit que possible.

Morin conseille de prendre $R = 3t$, ce qui donne $\frac{P'}{P} = 4$.

Redtenbacher - - $R = 1{,}6t$, - - $\frac{P'}{P} = 2{,}6$.

Nous proposons d'adopter $R = t$, - - $\frac{P'}{P} = 2$.

La valeur $\frac{R}{t} = 1$ est très-admissible, mais on ne pourrait guère descendre au-dessous, sans s'exposer à des difficultés d'exécution. Avec notre valeur limite $\frac{R}{t} = 1$, l'effet utile est encore assez faible, puisqu'il n'est que de 50 p %. On voit, d'après cela, que, dans ce dispositif d'engrenage, la vis peut conduire le pignon, mais que celui-ci ne peut conduire la vis, puisque, avec les valeurs admises pour f et $\frac{R}{t}$, le frottement de glissement se trouverait précisément égal à l'effort tendant à faire tourner en sens opposé. Nous devons faire remarquer, d'ailleurs, qu'au frottement que nous avons calculé viennent encore s'ajouter le frottement ordinaire des dents et celui des tourillons, lesquels

agissent dans le même sens. La denture à employer, pour une vis et sa roue, peut s'établir comme celle d'une crémaillère et de son pignon, en effectuant le tracé des dents dans un plan mené par l'axe de la vis, normalement à la surface cylindrique de la roue (v. § 203). Le tracé par développantes a l'avantage de donner, dans ce cas, des lignes droites pour les profils des dents de la roue, mais il ne faut pas oublier que le nombre de ces dents doit être supérieur à 28 (§ 195). Le contact, qui géométriquement n'a lieu qu'en un seul point, se répartit, en réalité, sur une petite surface. Si on veut obtenir un contact plus étendu, il convient de tailler les dents avec une fraise, disposée de manière à agir précisément comme la vis elle-même.

Les roues dentées, dans lesquelles le contact n'a lieu théoriquement qu'en un seul point, constituent ce qu'on désigne généralement sous le nom d'engrenages de précision, tandis qu'on réserve celui d'engrenages de force pour les roues dans lesquelles le contact des dents a lieu géométriquement suivant une ligne. Les différences d'applications, que semblent impliquer ces désignations, ne sont pas, du reste, parfaitement tranchées, ainsi qu'il résulte de l'exemple précédent, puisque les vis sans fin sont également bien employées pour la transmission de petites forces et d'efforts considérables.

§ 202.

Roues cylindriques à dents héliçoïdales.

Les roues cylindriques à dents héliçoïdales, qui constituent une généralisation du dispositif précédent, jouissent de propriétés spéciales. Les roues A et B, dans la fig. 475, sont munies toutes les deux de parties filetées à gauche. Les angles d'inclinaison γ et γ_1 de ces portions de filets sont déterminés de manière qu'au point de contact les hélices, situées sur les cylindres primitifs, aient une tangente commune, c'est-à-dire qu'en désignant par α l'angle des axes, on doit avoir:

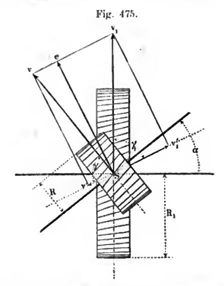
$$\gamma + \gamma_1 + \alpha = 180^0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)(1).$$

(1) Dans le tracé des roues à dents héliçoïdales, on doit veiller avec le plus grand soin à ce que les angles γ et γ_1 soient comptés dans le même sens, c'est-à-dire, par exemple, tous les deux à droite du plan moyen de chaque roue, comme dans la figure.

Si on décompose les vitesses à la circonférence v et v_1 suivant les directions de chaque tangente et de la normale correspondante, on obtient:

$$\frac{v_1}{v} = \frac{sin.\gamma}{sin.\gamma_1} \text{ et, par suite: } \frac{n_1}{n} = \frac{R\,sin.\gamma}{R_1\,sin.\gamma_1} \quad . \quad . \quad (187).$$

Fig. 475.



Comme, de plus, les pas des dents, mesurés perpendiculairement à la direction des filets et qui ont pour valeurs respectivement $\tau = t\,sin.\gamma$ et $\tau_1 = t_1\,sin.\gamma_1$, doivent être égaux, il en résulte qu'on doit avoir encore: $t : t_1 = sin.\gamma : sin.\gamma_1$, d'où on déduit, comme précédemment:

$$\frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}} = \frac{n_1}{n}.$$

Dans ce cas, les nombres de dents sont, comme on le voit, proportionnels, non aux rayons des roues, mais à leurs projections sur deux lignes, menées normalement aux hélices des dents; cette relation fournit le moyen de déterminer approximativement les rayons par une construction graphique.

En vertu des composantes v' et v'_1 des vitesses, les flancs des dents de l'une des roues glissent sur ceux de l'autre, avec une vitesse relative donnée par l'expression:

$$c' = v' + v'_1 = c(cotg.\gamma + cotg.\gamma_1) \quad . \quad . \quad . \quad (188).$$

La conséquence de ce glissement est une perte de travail et une usure assez considérable. Pour ce motif, les roues héliçoïdales doivent être réservées de préférence pour la transmission de faibles efforts. Le minimum de c' correspond à l'égalité des valeurs de v' et v'_{11} c'est-à-dire à $\gamma = \gamma_1$. Dans ce cas, la normale c aux flancs des dents divise en deux parties égales l'angle des plans moyens des deux roues.

Par suite des valeurs assez différentes qu'on peut adopter pour les inclinaisons des filets, on se trouve conduit, pour les engrenages héliçoïdaux, à une assez grande variété de dispositifs, ainsi que le montrent les exemples suivants:

1er Exemple. Données: $\frac{n_1}{n} = \frac{1}{2}$, *l'angle des axes* $\alpha = 40^\circ$ *et la plus courte distance de ces axes* $a = R + R_1$. *Si on prend* $\gamma = 60^\circ$, *la formule (186) fournit:* $\gamma_1 = 180^\circ - 60 - 40 = 80^\circ$ *(fig. 476) et on a, d'après la formule (187):* $\frac{R}{R_1} = \frac{\sin.\gamma_1}{\sin.\gamma}\frac{n_1}{n} = \frac{\sin.80^\circ}{\sin.60^\circ}\cdot\frac{1}{2} = \frac{0,9848}{0,8660}\cdot\frac{1}{2} = 0,5686$; *ce qui permet de déterminer* R *et* R_1. *Si l'on suppose, par exemple,* $a = 100^{mm}$, *on a:* $R_1 = \frac{a}{1 + \frac{R}{R_1}} = \frac{100}{1,5686} = 63^{mm},751$ *et* $R = 36^{mm},249$. *Pour* $\mathfrak{z} = 20$, $\mathfrak{z}_1 = 40$, *le pas, compté normalement aux dents, a pour valeur* $\tau = t \sin.\gamma = \frac{2\pi R}{\mathfrak{z}} \sin.\gamma = \frac{2\cdot\pi\cdot 36,249\cdot 0,866}{20} = 0,272\cdot 36,249 = 9^{mm},862$.
Pour les pas des filets des roues on a: $t = \frac{\tau}{\sin.\gamma} = \frac{9,862}{0,866} = 11^{mm},388$, $t_1 = \frac{9,862}{0,9848} = 10^{mm},014$. *La formule (188) fournit, pour la vitesse de glissement des dents;* $c' = c\,(\text{cotg}.\,60^\circ + \text{cotg}.\,80^\circ) = c\,(0,5774 + 0,1763) = 0,7537\,c$.

Fig. 476. Fig. 477. Fig. 478.

2e Exemple. Pour réduire c' *à son minimum, prenons* $\gamma = \gamma_1 = \frac{180 - \alpha}{2} = \frac{180 - 40}{2} = 70^\circ$ *(fig. 477). Il vient alors:* $\frac{R}{R_1} = \frac{1}{2}$, $R_1 = 66^{mm},667$, $R = 33^{mm},333$, $\tau = \frac{2\cdot\pi\cdot 33,333\cdot 0,9397}{20} = 9^{mm},840$, $t = t_1 = \frac{9,840}{0,9397} = 10^{mm},472$ *et* $c' = 2\cdot\text{cotg}.\,70^\circ\cdot c = 2\cdot 0,3640\cdot c = 0,728\,c$, *ce qui montre que la valeur précédente de* c' *était déjà très-rapprochée de son minimum.*

3e Exemple. Pour obtenir plus de facilité dans l'exécution, supposons $\gamma = 90^\circ$, *ce qui conduit à une roue droite ordinaire (fig. 478); nous aurons alors:* $\gamma_1 = 180 - 40 - 90 = 50^\circ$, $\frac{R}{R_1} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}7660 = 0{,}383$, *d'où* $R_1 = 72^{mm},307$, $R = 27^{mm},693$, $\tau = 11^{mm},842$, $t = \tau$, $t_1 = 15^{mm},459$ *et enfin* $c' = 0{,}8391\, c$.

Si, au lieu de a, on donne le pas τ, ce qui se fait ordinairement pour les roues taillées à la fraise, on choisit γ et γ_1 et on a alors: $R \sin.\gamma = \frac{\mathfrak{z}\tau}{2\pi}$, d'où on tire:

$$R = \frac{\mathfrak{z}\tau}{2\pi \sin.\gamma}, \quad R_1 = \frac{\mathfrak{z}_1 \tau}{2\pi \sin.\gamma_1} \quad . \quad . \quad . \quad (189).$$

On peut également donner R et τ; dans ce cas, γ n'est plus arbitraire; on a, en effet:

$$\sin.\gamma = \frac{\mathfrak{z}\tau}{2\pi R} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (190).$$

4e Exemple. $\alpha = 90^\circ$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1$. *Pour réduire le glissement au minimum, faisons* $\gamma = \gamma_1 = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ$. *Les deux roues, dans ce cas, sont égales, toutes les deux filetées à gauche, ou encore à droite, comme dans la fig. 479. La vitesse de glissement* $c' = 2 \cdot \text{cotg.}45^\circ \cdot c = 2c$.

5e Exemple. Etant données deux roues héliçoïdales A et B à angle droit (fig. 480), si avec la roue B on en fait engrener une troisième C, également à angle droit, les deux roues A et C se trouvent avoir des sens de rotation opposés. La roue intermédiaire B permet donc de changer le sens de la rotation, comme dans les roues coniques.

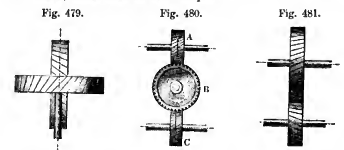
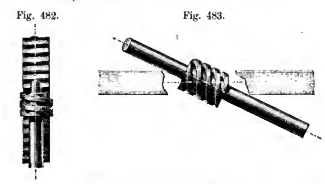


Fig. 479. Fig. 480. Fig. 481.

6e Exemple. Si on suppose $\alpha = 0^\circ$, *c'est-à-dire si les axes sont parallèles, les roues se réduisent à des roues droites avec des dents héliçoïdales, fig. 481; la somme des angles* γ *et* γ_1 *étant égale à 180°, il en résulte que l'une des roues est toujours filetée à gauche et l'autre à droite. Quant à la vitesse de glissement* c', *elle devient nulle. Si avec* $a = 0$ *on a, en outre,* $\gamma = 0$, *les roues héliçoïdales deviennent de véritables roues à coins.*

L'examen d'autres cas limites des roues à dents héliçoïdales fournit une série de dispositifs dignes d'attirer l'attention.

7e Exemple. $\alpha = 90°$, $\gamma = 10°$, *et, par suite* $\gamma_1 = 80°$, $R_1 = \infty$; *on obtient, dans ce cas, une crémaillère engrènant avec une vis (fig. 482). Si on fait* $\gamma = 10°$, $\gamma_1 = 10°$, α *devient égal à* $80°$. *Dans ses machines à raboter, Sellers donne aux dents de la crémaillère (fig. 483) une inclinaison telle que la pression latérale qui en résulte soit précisément susceptible d'annuler l'effort qui s'exerce de l'autre côté et qui provient du frottement de glissement entre les flancs des dents.*


Fig. 482. Fig. 483.

8e Exemple. $R = R_1 = \infty$; *on obtient, dans ce cas, deux crémaillères qui se déplacent toutes les deux, fig. 484. On a, comme précédemment,* $\frac{v_1}{v} = \frac{\sin.\gamma}{\sin.\gamma_1}$. *Si, comme dans la fig. 485, on a* $\alpha = 90°$ *et si, pour réduire le glissement à son minimum, on prend* $\gamma = \gamma_1 = 45°$, *on a* $v = v_1$. *Ce mécanisme se rencontre assez fréquemment dans les machines à rayer les canons et dans quelques machines à tailler les vis.*

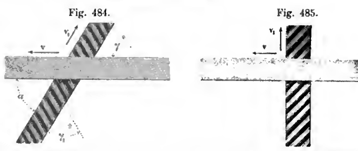


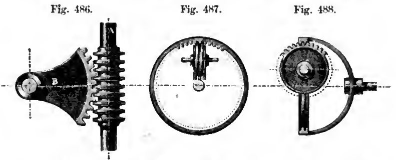
Fig. 484. Fig. 485.

9e Exemple. $\alpha = 90°$, $\gamma_1 = 90°$ *et, par suite,* $\gamma = 0°$; *avec deux rayons de grandeur finie, fig. 486, on obtient ce qu'on appelle une crémaillère à rotation, dont l'usage se rencontre assez souvent dans les régulateurs et les appareils du même genre. La rotation de l'axe A ne produit aucun déplacement de B.*

10e Exemple. L'engrenage à vis sans fin, comme nous l'avons déjà fait remarquer, est un cas particulier des roues héliçoïdales. Cet engrenage se présente encore, bien qu'assez rarement, sous deux autres formes parti-

culières, qui sont caractérisées par l'emploi d'une roue à denture intérieure (1). La fig. 487 représente une roue de ce genre à dents droites ou inclinées (2).

Fig. 486. Fig. 487. Fig. 488.



Dans le dispositif de la fig. 488, c'est la vis sans fin qui est creuse, la roue est une roue droite à denture extérieure (3).

§ 203.

Denture des roues héliçoïdales. Frottement.

Les dents des roues héliçoïdales sont le plus souvent taillées à la fraise. Ce résultat peut s'obtenir au moyen d'un tour à pointes, sur le porte-outil duquel on place la fraise obliquement. Le procédé est analogue à celui qu'on emploie pour fileter les vis. Le pas s des filets de la roue est donné par la relation:

$$s = 2\pi R \, tg\, \gamma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (191).$$

Dans le choix des angles d'inclinaison γ et γ_1, on doit prendre en considération les roues de rechange dont on dispose pour le tour (4).

Pour la forme des dents, on choisit celle qui correspond à la courbure du filet complémentaire de celui qu'il s'agit de tailler, c'est-à-dire de celui qui lui est perpendiculaire. Les rayons de courbure r et r_1, dont on doit faire usage, sont donnés par les relations:

$$r = \frac{R}{sin.^2\gamma}, \quad r_1 = \frac{R_1}{sin.^2\gamma_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (192).$$

(1) Les roues creuses correspondent au cas où le point d'engrènement doit se trouver sur a, en dehors des axes, au lieu de tomber entre ces axes.

(2) Employée dans l'horloge astronomique de Prague.

(3) Employée dans la machine à percer de Stehelin.

(4) Pour les diverses combinaisons qu'on peut obtenir avec la série des roues d'engrenages d'un tour, on peut consulter avec avantage l'ouvrage de Brocot (Calcul des rouages par approximation, Paris 1862).

Ces valeurs doivent être employées comme rayons des roues auxiliaires avec le pas t; d'après le mode de denture adopté, on obtient pour le vide des dents le profil même de la fraise.

1er Exemple. Pour les roues du 1er exemple du § précédent, on a:
$r = \frac{36{,}249}{\sin.^2 60^\circ} = \frac{4}{3}\, 36{,}249 = 48^{mm},332,\ r_1 = \frac{63{,}751}{\sin.^2 80^\circ} = \frac{63{,}751}{0{,}9848^2} = 65^{mm},734.$

La valeur de r, fournie par la formule (192), peut être obtenue graphiquement par le procédé du § 29.

Les résistances dues au frottement, dans les roues héliçoïdales, sont souvent très-considérables. Si elles étaient nulles, on aurait pour le rapport des forces P et Q, agissant respectivement à la circonférence de la roue motrice et de la roue menée:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin.\gamma}{\sin.\gamma_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (193).$$

Le frottement ordinaire des dents est le même que celui des roues auxiliaires et peut se calculer d'après les indications du § 196. Tant que α n'est pas nul, il a généralement une valeur très-inférieure à celle du frottement de glissement des flancs.

La valeur c' de la vitesse de glissement, que nous avons indiquée précédemment, donne une idée de la grandeur de ce dernier frottement. Pour calculer la perte de travail, qui en est la conséquence, on peut se servir de la relation:

$$\frac{P'}{P} = \frac{\sin.\gamma_1}{\sin.\gamma}\,\frac{\sin.(\gamma+\varphi)}{\sin.(\gamma_1-\varphi)} \quad , \ldots \ldots \quad (194)$$

où φ représente l'angle de frottement correspondant au coefficient f, c'est-à-dire qu'on a $tg.\varphi = f$. Pour $f = 0{,}16$, φ est égal à 9° environ.

2e Exemple. Pour les roues précédentes, la perte due au frottement est $\frac{P'}{P} = \frac{\sin.80^\circ \cdot \sin.69^\circ}{\sin.60^\circ \cdot \sin.71^\circ} = \frac{0{,}9848 \cdot 0{,}9336}{0{,}8660 \cdot 0{,}9455} = 1{,}12$ *(à cette perte s'ajoute celle qui provient du frottement ordinaire des dents).*

Une troisième perte de travail correspond aux forces latérales K et K_1, qui agissent dans les directions des axes. On a pour ces forces:

$$\frac{K}{P'} = cotg.(\gamma+\varphi), \quad \frac{K_1}{Q} = cotg.(\gamma_1-\varphi) \ . \quad (195).$$

3e Exemple. Pour les roues précédentes, on a $K = P'\ cotg.\ 69^\circ = 0{,}3839\ P'$, $K_1 = Q\ cotg.\ 71^\circ = 0{,}3443\ Q$; *de ces valeurs des forces on peut déduire la perte qu'elles entraînent, lorsqu'on connaît les dimensions des tourillons.*

Lorsque α est égal à 0^0, c'est-à-dire lorsque les axes sont parallèles, le rapport $\frac{P'}{P}$ devient égal à 1 (les angles γ et γ_1 sont alors supplémentaires) et, par conséquent, le glissement des flancs est nul; en d'autres termes, dans les roues héliçoïdales à axes parallèles, l'engrenage se produit sans glissement des flancs; toutefois, il reste, dans ce cas, le frottement ordinaire des dents, bien qu'il se trouve lui-même réduit dans une certaine mesure, et celui qui est dû aux forces K et K_1. Le frottement des dents peut d'ailleurs être amené à n'avoir qu'une valeur tout-à-fait négligeable, à la condition de donner aux flancs des dents de l'une des roues la forme d'arêtes aigues, de manière à ce que le contact de ces dents avec celles de l'autre roue (dont les flancs ont une surface d'une certaine étendue) ait lieu géométriquement en un seul point. Ce genre de denture, imaginé par Hook, ne peut guère être employé que pour les engrenages de précision, mais il rend, dans ce cas, de très-bons services (1). Les roues héliçoïdales ordinaires, à axes parallèles, avec des profils de dents suffisamment bien choisis se rapprochent des roues sans frottement de Hook. Dans ces dernières roues, on peut également arriver à annuler l'action des forces K et K_1, qui agissent suivant la direction des axes, en faisant usage de roues doubles à filets symétriques (fig. 489). On trouve des applications de roues de ce genre dans certaines machines de filatures. Dans ces dernières années, Wethli a proposé d'en faire usage pour les voies ferrées à rampes très-prononcées.

Fig. 489.



§ 204.

Roues à filets coniques.

Dans les roues coniques, on a cherché également à supprimer à peu près tout frottement par l'emploi de dents formées de portions de filets. Des roues de ce genre ne sont, en réalité, pas autre chose que les roues héliçoïdales qu'on obtient, en supposant nulle la distance a des axes. La courbure la plus convenable pour les axes des dents est celle qui est donnée par

(1) On le rencontre en usage dans plusieurs appareils de Bréguet, où les vitesses de rotation dépassent 2000 tours par seconde.

l'hélice conique à inclinaison constante, dont la projection sur la base du cône est une spirale d'Archimède. Les roues à filets coniques sont employées dans quelques machines de filatures. Mais la construction des roues de ce genre présente d'assez grandes difficultés, lors même qu'il s'agit des modèles les plus simples (1).

D. Engrenages hyperboloïdes.

§ 205.

Surfaces primitives des engrenages hyperboloïdes.

Les engrenages *hyperboloïdes*, qu'on désigne aussi par abréviation sous le nom d'hyperboliques, sont destinés à relier des arbres dont les axes se croisent sans se couper; le contact des dents ayant lieu suivant une ligne, ces engrenages rentrent dans la classe des engrenages de force (v. p. 455). Leurs surfaces primitives sont des hyperboloïdes de révolution, qui se touchent suivant une génératrice commune, qu'on peut déterminer de la manière suivante:

Dans la fig. 490, qui est une projection faite normalement à la plus courte distance des axes, partageons l'angle d'inclinaison α de ces axes en deux autres β et β_1, de telle manière que les perpendiculaires AB et AC, abaissées sur leurs directions d'un point quelconque A de la ligne de division SA, soient inversement proportionnelles aux nombres de tours des roues. SA est alors la génératrice de contact des deux hyperboloïdes; $AB = R'$ et $AC = R'_1$ représentent les projections des rayons des deux sections normales faites par le point A et on a:

$$\frac{R'}{R'_1} = \frac{sin.\beta}{sin.\beta_1} = \frac{n_1}{n} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196).$$

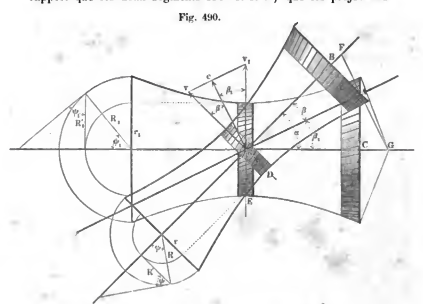
Les rayons véritables R et R_1 sont encore à déterminer, ainsi que les rayons $SD = r$ et $SE = r_1$ des cercles de gorge. Entre ces derniers on a d'abord la relation:

$$\frac{r}{r_1} = \frac{tg.\beta}{tg.\beta_1} = \frac{\frac{n_1}{n} + cos.\alpha}{\frac{n}{n_1} + cos.\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

(1) Voir dans le *Génie industriel*, Vol. XII, P. 255, la description d'une machine pour l'exécution rigoureuse des dents des roues à filets coniques.

c'est-à-dire que r et r_1 doivent être entre eux dans le même rapport que les deux segments AF et AG, que les projections

Fig. 490.



des axes déterminent sur la droite FG, menée par le point A perpendiculairement à la génératrice de contact.

En désignant par a la plus courte distance de ces axes, on a:

$$\frac{r}{a} = \frac{1 + \frac{n}{n_1}\cos.\alpha}{1 + 2\frac{n}{n_1}\cos.\alpha + \left(\frac{n}{n_1}\right)^2}, \quad \frac{r_1}{a} = \frac{1 + \frac{n_1}{n}\cos.\alpha}{1 + 2\frac{n_1}{n}\cos.\alpha + \left(\frac{n_1}{n}\right)^2} \quad (198).$$

Les rayons R et R_1 sont les hypothénuses des triangles rectangles, dont les côtés sont respectivement R' et r, R'_1 et r_1, et ont, par suite, pour valeurs:

$$R = \sqrt{R'^2 + r^2}, \quad R_1 = \sqrt{R'^2_1 + r_1^2} \; . \; . \; . \quad (199)$$

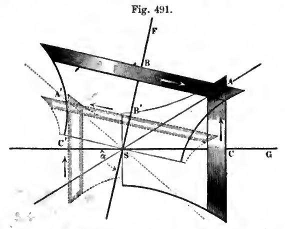
R' et R'_1 sont connus d'après ce qui précède, lorsqu'on se donne la longueur $SA = l$.

Quant aux angles β et β_1, ils sont déterminés par les relations:

$$tg.\beta = \frac{sin.\alpha}{\frac{n}{n_1} + cos.\alpha}, \quad tg.\beta_1 = \frac{sin.\alpha}{\frac{n_1}{n} + cos.\alpha} \; . \; . \quad (200).$$

De même que dans le cas des roues coniques (p. 449), le problème comporte deux solutions, suivant que la ligne SA est menée à l'intérieur de l'angle α ou à l'extérieur (c'est-à-dire dans l'angle supplémentaire), fig. 491. Ces deux solutions diffèrent

Fig. 491.



par le sens de la rotation de l'arbre mené. L'une de ces solutions peut, comme précédemment, conduire à une roue à denture intérieure; mais ce dispositif, à notre connaissance, n'a jamais été exécuté et il n'aurait, du reste, aucune valeur pratique. Lorsque l'angle d'inclinaison α est égal à 90°, on a:

$$\frac{r}{r_1} = tg^2\beta = \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (201)$$

et

$$\frac{r}{a} = \frac{n_1^2}{n^2 + n_1^2}, \quad \frac{r_1}{a} = \frac{n^2}{n^2 + n_1^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (202).$$

Il est facile de voir, d'après cela, que les engrenages hyperboloïdes fournissent des solutions en nombre plus limité que les roues héliçoïdales, avec lesquelles elles présentent d'ailleurs beaucoup d'analogies. Dans ces dernières roues, en effet, pour une valeur déterminée de l'angle α, on peut donner une valeur arbitraire à l'angle d'inclinaison des filets d'une des deux roues, tandis que, dans les engrenages hyperboloïdes, il n'y a qu'un seul couple de valeurs d'angles d'inclinaison qui soit admissible, condition dont on ne paraît pas toujours tenir compte suffisamment. Les surfaces primitives des deux engrenages sont formées par deux zônes correspondantes des deux hyperboloïdes. Lorsque

la distance des axes est faible, on ne peut pas le plus souvent utiliser, à cet effet, les zônes comprenant les cercles de gorge et on est obligé de recourir à des zônes situées à une certaine distance, qui peuvent ordinairement être remplacées, avec une approximatiou suffisante, par de simples trones de cônes. Nous allons appliquer les notions précédentes à quelques exemples.

1er Exemple. $\alpha = 40^\circ$, $\frac{n_1}{n} = \frac{1}{2}$ (*v. l'ex. 1er, § 202*), $a = 100^{mm}$. *On a, dans ce cas:* $\frac{R'}{R'_1} = \frac{1}{2}$; $\frac{r}{r_1} = \frac{0,5 + \cos 40^\circ}{2 + \cos 40^\circ} = \frac{1,266}{2,766} = 0,4577$, $\frac{a}{r} = \frac{1 + 2\cos 40^\circ}{1 + 2 \cdot 2 \cdot \cos 40^\circ + 4} = \frac{2,532}{8,064} = 0,31398$, $r = 31^{mm},398$, $r_1 = 68^{mm},601$. *En outre,* $tg\beta = \frac{\sin 40^\circ}{2 + \cos 40^\circ} = \frac{0,6428}{2,766} = 0,232393 = tg\, 13^\circ,5'$ *et* $\beta_1 = 40^\circ - \beta = 26^\circ,55'$. *Pour la distance* $SA = l = 200^{mm}$, *on a* $R' = l \sin 13^\circ,5' = 200 \cdot 0,226368 = 45^{mm},27$, $R'_1 = 200 \cdot \sin 26^\circ,55' = 200 \cdot$ 0,45[illegible]634 $= 90^{mm},04$; *enfin* $R = \sqrt{45,72^2 + 31,40^2} = 55^{mm},10$ *et* $R_1 = \sqrt{90,54^2 + 68,60^2} = 113^{mm},59$.

2e Exemple. $\alpha = 90^\circ$, $\frac{n_1}{n} = \frac{5}{9}$ (*valeur à laquelle satisfont les nombres de dents* $\mathfrak{Z} = 36$ *et* $\mathfrak{Z}_1 = 20$); $a = 20^{mm}$ (*ces données sont celles qu'on rencontre dans les bancs à broches*). *D'après les formules (201) et (202), on a:* $\frac{r}{r_1} = \left(\frac{9}{5}\right)^2 = \frac{81}{25} = 3,24$, $r = a \cdot \frac{9^2}{5^2 + 9^2} = \frac{20 \cdot 81}{106} = 15^{mm},28$ *et* $r_1 = 4^{mm},72$.

On a, de plus, $tg\,\beta = \frac{n_1}{n} = 1,80$, *ou* $\beta = 60^\circ,57'$ *et, par suite,* $\beta_1 = 29^\circ,3'$.

Pour $R = 49^{mm}$, *la formule (199) donne:* $R' = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{49^2 - 15,28^2} = 46^{mm},557$ *et de la relation (196) on tire alors:* $R'_1 = \frac{5}{9} R' = \frac{5 \cdot 46,557}{9} = 25^{mm},865$; *on a ensuite:* $R_1 = \sqrt{25,865^2 + 4,72^2} = 26^{mm},292$.

La fig. 492 donne, à demi-grandeur d'exécution, l'engrenage correspondant à ces dimensions. Conformément aux indications de la table du § 186, le pas, sur la grande roue, est $t = \frac{R}{5,73} = \frac{49}{5,73} = 8^{mm},55$ *et, sur la petite,* $t_1 = \frac{26,29}{3,18} = 8^{mm},27$.

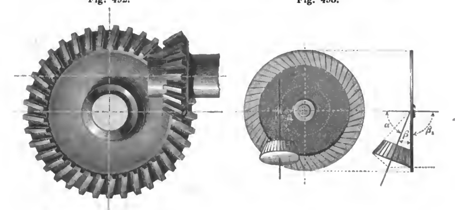
3e Exemple. $\alpha = 90^\circ$, $\frac{n_1}{n} = 1$. *On trouve, dans ce cas,* $\beta = 45^\circ$, $r = r_1$, $R = R_1$; *les deux hyperboloïdes sont, alors, congruents (v. l'ex. 4, § 202).*

4e Exemple. Dans le cas particulier où le rapport $\frac{n_1}{n}$ *est numériquement égal à* $\cos\alpha$ *et où la ligne de division, qui détermine l'angle* β, *se trouve située dans l'angle supplémentaire de* α, *de telle sorte qu'en tenant compte du signe, on ait* $\frac{n_1}{n} = -\cos\alpha$, *l'une des surfaces primitives se réduit à un cône et la seconde à un hyperboloïde plan. Cette roue plane hyperboloide*



correspond à la roue plane dans les engrenages coniques (v. § 200) et peut engrener convenablement avec une roue conique ordinaire; elle n'offre d'ailleurs aucun avantage pratique, car la roue plane ne permet pas de prolonger

Fig. 492. Fig. 493.



l'arbre de la roue conique. Pour $\alpha = 60^\circ$, $\frac{n_1}{n} = -\frac{1}{2} = -\cos 60^\circ$, *on obtient la roue plane. Dans ce cas, on a:* $tg\,\beta = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, $\beta_1 = 30^\circ$, $tg\,\beta_1 = \infty$, $\beta_1 = 90^\circ$, $\frac{R'}{R'_1} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{2}$; $r = 0$, $r_1 = a$, $R = R'$, $R_1 = \sqrt{R'^2_1 + a^2} = \sqrt{4R^2 + a^2}$. *Si* $\frac{n_1}{n}$ *était négatif et* $< \cos \alpha$, *on obtiendrait une roue hyperboloïde à denture intérieure; mais les engrenages de ce genre ne sont pas pratiques.*

Avec les engrenages hyperboloïdes, on peut obtenir également, comme cas limite, l'engrènement d'une crémaillère avec un pignon. La crémaillère porte alors des dents obliques, tandis que le pignon est formé par la zône correspondant au cercle de gorge d'un hyperboloïde. Mais, comme la construction de ce pignon est d'une exécution bien moins simple que celle de la roue filetée de la fig. 483, dont l'effet est équivalent, il en résulte que cette dernière doit être utilisée de préférence dans tous les cas où cet effet est à produire.

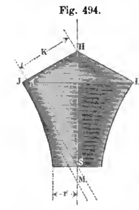
§ 206.

Denture des engrenages hyperboloïdes.

Si on voulait donner aux dents des engrenages hyperboloïdes des formes parfaitement rigoureuses, on rencontrerait

de grandes difficultés d'exécution. Mais on peut se contenter, comme pour les roues coniques, d'une forme approximative. Dans ce cas, pour déterminer les dents d'un engrenage hyperboloïde, on commence par tracer le cône supplémentaire de la zône d'hyperboloïde qu'on doit utiliser; le sommet H de ce cône, fig. 494, s'obtient en menant une perpendiculaire AH à la génératrice SA, parallèle au plan de la figure; on détermine ensuite le profil des dents pour le pas normal τ sur le cercle de gorge, comme s'il s'agissait d'une roue héliçoïdale de diamètre r et d'inclinaison $\gamma = 90 - \beta$ (v. § 203), puis on reporte le profil, ainsi obtenu, sur la surface conique HJL, en ayant soin d'augmenter les dimensions, parallèles au cercle de division, dans le rapport $t : \tau$ et les longueurs dans le rapport $K : r$, K représentant la longueur de la génératrice du cône supplémentaire. On répète la même construction pour le cône supplémentaire correspondant

Fig. 494.



à l'autre base de la zône, en ayant soin, bien entendu, de tenir compte de la diminution des valeurs de t et de K. On obtient ainsi, pour chaque dent, deux profils suffisamment exacts, dont il suffit de réunir les points correspondants, par des lignes droites, pour former le corps de cette dent.

On peut, dans certains cas, substituer à la zône d'hyperboloïde un tronc de cône, à la condition de déterminer convenablement son sommet. A cet effet, on fait tourner la génératrice SA autour de l'axe HS, jusqu'à ce que le point A vienne coïncider avec le point J; la projection de la génératrice, dans cette position, détermine, par son intersection avec HS, le sommet cherché M du cône.

Dans les engrenages hyperboloïdes, le glissement des flancs des dents est la source d'un frottement considérable. Ce frottement peut s'évaluer d'après la vitesse de glissement c', qui est égale à celle qu'on obtiendrait pour des roues héliçoïdales, qui correspondraient aux deux cercles de gorge (v. § 203).

E. Calcul du pas et largeur des dents des engrenages.

§ 207.

Division des engrenages. Section des dents.

Pour une même valeur de la pression mutuelle des dents, les dimensions de ces dents, en raison des chocs, doivent être d'autant plus fortes que la vitesse à la circonférence est plus considérable; on doit également augmenter la largeur des dents, lorsqu'on veut arriver à diminuer l'usure des dents. Pour les engrenages à marche lente, les effets dynamiques sont négligeables. Nous sommes ainsi conduits à diviser les roues dentées en deux classes principales.

Dans la première, nous comprendrons tous les engrenages dont la vitesse à la circonférence du cercle primitif est inférieure à $^1/_2$ mètre et, dans la seconde, tous ceux pour lesquels cette vitesse est plus considérable. Dans la classe des engrenages à faible vitesse rentrent, en général, tous ceux qui sont mûs à la main, comme les engrenages de treuils, de grues, etc., tandis que ceux dont la vitesse est supérieure à $^1/_2$ mètre sont le plus souvent mûs mécaniquement.

Le pas t des dents, la largeur b, la longueur l, l'épaisseur à la couronne, la pression P, et la tension $\mathfrak{S}$, sont reliés, d'une manière générale, par la relation:

$$b\,t = 6\,\frac{P}{\mathfrak{S}}\left(\frac{l}{t}\right)\left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (203).$$

En introduisant dans cette formule les valeurs que nous avons précédemment admises, pour les rapports de la longueur et de l'épaisseur au pas, cette formule se réduit à:

$$b\,t = 16{,}8\,\frac{P}{\mathfrak{S}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (204).$$

Cette relation indique que la résistance d'une dent est proportionnelle à sa section et que, par suite, à ce point de vue, on peut adopter indifféremment, pour le rapport entre b et t, telle valeur qu'on le désire; c'est là une circonstance qu'on utilise souvent avec avantage dans la construction.

§ 208.

Pas et largeur des dents d'engrenages à faible vitesse.

Si, pour une roue en fonte à faible vitesse, on désigne par:
(PR) le moment statique de l'effort à transmettre,
$\mathfrak{Z}$ le nombre des dents,
R le rayon du cercle primitif,
t le pas des dents,
on a, entre ces différents éléments, les relations:

$$\left.\begin{array}{ll} t = 2{,}32\sqrt[3]{\dfrac{(PR)}{\mathfrak{Z}}}, & \dfrac{t}{\pi} = 0{,}74\sqrt[3]{\dfrac{(PR)}{\mathfrak{Z}}} \\ t = 1{,}4\sqrt{\dfrac{(PR)}{R}}, & \dfrac{t}{\pi} = 0{,}45\sqrt{\dfrac{(PR)}{R}} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (205)$$

ce qui permet de déterminer t, lorsque les autres quantités sont données. On a, en même temps, pour la largeur des dents, b:

$$b = 2t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (206).$$

Dans ces formules on a admis, pour la tension $\mathfrak{S}$ des dents, la valeur 4,25. La tension qui se produit réellement est plus faible, puisque l'épaisseur du pied de la dent est, en général, supérieure à $\frac{t}{2}$, ainsi que nous l'avons supposé d'ailleurs dans la formule (204).

Comme le rapport $\frac{(PR)}{R}$ représente l'effort P à la circonférence du cercle primitif, il en résulte que la formule (205) est applicable au cas où la force P est donnée directement, comme, par exemple, dans les crémaillères.

Lorsqu'on a calculé, au moyen des formules précédentes ou de la table du paragraphe suivant, les dimensions de la dent en fonte, on peut obtenir immédiatement celles de la dent en fer, en multipliant les premières par des coefficients.

Ces coefficients sont respectivement:
pour les résultats fournis

$$\left.\begin{array}{ll} \text{par la première formule (205),} & \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} = 0{,}79 \\ \text{par la seconde formule (205),} & \sqrt{\dfrac{1}{2}} = 0{,}71 \end{array}\right\} \quad . \; (207)$$

et on doit prendre, comme précédemment, $\frac{b}{t} = 2$. On peut,

comme nous l'avons vu, modifier la largeur b, sans faire varier la résistance de la dent, à la condition de changer t en même temps, de manière à ce que le produit bt conserve une valeur constante.

§ 209.

Table relative aux pas des engrenages à faible vitesse.

t	$\frac{(PR)}{3}$	$\frac{(PR)}{R}$	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{(PR)}{3}$	$\frac{(PR)}{R}$
10	80	51	3	67	44
12	138	73	4	158	79
15	270	115	5	308	123
18	467	165	6	533	178
22	853	247	7	846	242
26	1408	345	8	1263	316
30	2162	459	9	1799	400
35	3433	625	10	2468	494
40	5125	816	11	3285	598
45	7297	1033	12	4264	711
50	10010	1276	14	6772	968
60	17298	1837	16	10108	1264
70	27468	2500	20	19742	1975
80	41002	3265	24	34114	2844
90	58380	4133	28	54172	3872

1er Exemple. Sur une manivelle, de 400mm de longueur, on exerce un effort de 50k; quel pas et quelle largeur de dent doit-on adopter pour un pignon de 10 dents, destiné à transmettre cet effort? On a, dans ce cas, $\frac{PR}{3} = \frac{50 \cdot 400}{10} = 2000$; *ce nombre est compris, dans la table, entre ceux des lignes 6 et 7, col. 2, et on peut prendre approximativement* $t = 30^{mm}$; *la même table montre que* $\frac{t}{\pi}$ *est compris entre 9 et 10; la largeur* $b = 2t = 60^{mm}$.

2e Exemple. Une crémaillère doit produire une traction de 2500k. La table indique qu'on doit prendre, dans ce cas, $t = 70^{mm}$ *ou* $\frac{t}{\pi} = 22$; *la largeur des dents doit être de 140mm. Si cette crémaillère était en fer, on devrait, d'après (207), prendre:* $t = 0{,}71 \cdot 70 = 50^{mm}$ *et* $b = 2 \cdot 50 = 100^{mm}$.

§ 210.

Pas et largeur des dents d'engrenages mûs mécaniquement.

Dans les engrenages mûs mécaniquement, qui ont généralement une vitesse supérieure à $\frac{1}{2}$ mètre, on doit admettre, pour la tension $\mathfrak{S}$, produite par la force P sur les dents supposées à l'état de repos, une valeur d'autant plus faible que la vitesse v à la circonférence du cercle primitif est plus considérable, afin de tenir compte des chocs et des vibrations. Dans ce but, il convient de prendre, pour les dents en fonte:

$$\mathfrak{S} = \frac{3,37}{\sqrt[3]{v}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (208)$$

et, pour les dents en bois, la valeur précédente, multipliée par 0,8, sans que $\mathfrak{S}$ puisse jamais dépasser 2^k. On obtient ainsi, pour la fonte, la série des valeurs suivantes:

v =	0,5	1	2	4	6	8	10	12	14	16^m
$\mathfrak{S}$ =	4,25	3,37	2,69	2,13	1,86	1,67	1,56	1,47	1,40	1^k,34

et pour le bois:

$\mathfrak{S}$ =	2,00	2,00	2,00	1,70	1,49	1,34	1,25	1,17	1,12	1^k,07.

La vitesse v (en mètres) se détermine en fonction du nombre de tours n par minute et du rayon R (en millim.) par la formule:

$$\left.\begin{array}{l} v = \dfrac{\pi R n}{30 \cdot 1000} = 0,10472 \left(\dfrac{R n}{1000}\right) \\ \text{ou plus simplement } v = \dfrac{R n}{10000} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{array}\right\} \; . \quad (209).$$

De plus, on fait souvent varier la largeur des dents b avec la valeur de P. Tredgold recommande de ne pas dépasser 7^k,15 pour la pression par millimètre de largeur, c'est-à-dire le rapport $\frac{P}{b}$. Nous devons faire remarquer, toutefois, que cette règle est rarement suivie; dans un grand nombre d'installations soignées, on trouve pour $\frac{P}{b}$ des valeurs bien supérieures et qui s'élèvent jusqu'à 25^k. Il est bien évident, d'ailleurs, que pour éviter une trop grande usure, il convient que le produit $\frac{P}{b} \cdot n$ ne soit pas trop considérable. Dans certains cas, la valeur de $\frac{P}{b} n$ s'élève

jusqu'à 1200, mais il se produit alors une usure assez rapide. Dans les engrenages de fonte sur fonte, c'est pour la plus petite roue que l'usure est la plus forte. Il convient, dans ce cas, de ne pas dépasser 500 pour le produit $\frac{Pn}{b}$ et même de se tenir notablement au-dessous, si c'est possible; pour de petits efforts à transmettre, on peut facilement descendre à 200 et même à 100, tout en restant dans des dimensions acceptables. Dans les engrenages à dents de fonte sur dents de bois, l'usure se porte presque entièrement sur ces dernières et on n'a pas, par suite, à se préoccuper de celle des dents de fonte. On ne saurait également trop recommander de ne pas dépasser 500 pour la valeur de $\frac{Pn}{b}$, dans la roue à dents de bois, et de rester, autant que possible, entre 300 et 400. On ne peut évidemment pas donner, à ce sujet, des règles parfaitement précises, car on est obligé, dans les questions de ce genre, de prendre en considération les difficultés de construction de toute nature, de tenir compte des modèles existants, etc.; c'est au constructeur d'apprécier, pour les différents cas particuliers, dans quelle mesure il convient de s'écarter des valeurs sanctionnées par l'expérience.

Pour les groupes d'engrenages, c'est-à-dire pour ceux qui sont composés de plusieurs roues engrenant avec une seule, on doit prendre pour n, au lieu du nombre de tours de la roue moyenne, le nombre de ses contacts de dents, c'est-à-dire le produit du nombre de tours de cette roue par le nombre des roues latérales.

Lorsque, de cette manière, on est arrivé à fixer la valeur de $\frac{P}{b}$, c'est-à-dire celle de b, ainsi que celle qu'on veut admettre pour $\mathfrak{S}$, le pas t se calcule par la formule (204) qui donne:

$$t = \frac{16,8\,P}{\mathfrak{S}\,b} = \frac{16,8 \cdot 716200}{\mathfrak{S}\,b\,R}\,\frac{N}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

N désignant le nombre de chevaux à transmettre.

Dans les engrenages mûs mécaniquement, le nombre des dents ne doit jamais être inférieur à 20, afin d'éviter que les erreurs d'exécution ne prennent une importance trop considérable; pour le même motif, et plus spécialement au point de vue de l'usure, on doit prendre $\mathfrak{Z}$ d'autant plus grand que la vitesse de rotation est plus considérable. C'est ainsi que, dans les engre-

nages de turbines, qui sont animés d'un mouvement de rotation rapide, le nombre des dents est rarement inférieur à 40 et s'élève souvent jusqu'à 80.

Dans les engrenages à dents de fonte sur dents de bois, pour arriver à l'usure la plus faible, il y a avantage à placer les dents de bois sur la roue motrice, puisque dans cette roue l'engrènement commence à la racine de la dent pour finir à la tête, tandis que l'inverse a lieu pour la roue menée.

Lorsqu'on a choisi $\mathfrak{Z}$ d'après ces considérations, déterminé b d'après les indications de l'expérience et fixé la tension $\mathfrak{S}$, la valeur de t se trouve donnée par la relation:

$$t = 8695 \sqrt{\frac{N}{\mathfrak{S}\, b\, \mathfrak{Z}\, n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (211).$$

Dans le cas où c'est $\frac{b}{t}$ qui est déterminé, au lieu de b, on a:

$$t = 423 \sqrt[3]{\frac{N}{n\, \mathfrak{S}\, \mathfrak{Z}} \left(\frac{t}{b}\right)} \quad \ldots\ldots \quad (212).$$

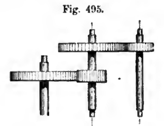
1er Exemple. Une roue hydraulique, destinée à transmettre un travail de 60 chevaux, a un diamètre de 8^m et une vitesse de $1^m,3$ à la circonférence ; elle est munie d'une couronne en fonte à denture intérieure, dont le cercle primitif coïncide approximativement avec la circonférence intérieure de la couronne, dont l'épaisseur est de 400^{mm} ; cette couronne doit conduire un pignon en fonte faisant 40 tours par minute. On a, dans ce cas: $n = \frac{30 \cdot 1,3}{\pi \cdot 4} = 3,1$ et, par suite, $\frac{n_1}{n} = \frac{10}{1,3}$; on a, de plus: $v = 1,3 \cdot \frac{4000-400}{4000} = 1^m,17$ et, par conséquent: $P = \frac{75 \cdot 60}{1,17} = 3846^k$. $\mathfrak{S}$ devant être compris, d'après les remarques précédentes, entre $3^k,37$ et $2^k,69$, nous prendrons $\mathfrak{S} = 3^k,2$. Pour la petite roue, la valeur de $\frac{Pn}{b}$, conformément aux indications de l'expérience, peut être prise égale à 500 et nous aurons alors: $\frac{P}{b} = \frac{500}{n_1} = \frac{500}{40} = 12,5$. On tire de là d'abord: $b = \frac{P}{12,5} = \frac{3846}{12,5} = 307,7$, soit 310^{mm} et, par conséquent, de la formule (210): $t = \frac{16,8 \cdot 3846}{3,2 \cdot 310} = 65,1$, soit 65^{mm} ; ce qui donne provisoirement: $\mathfrak{Z} = \frac{2\pi R}{t} = \frac{2 \cdot 3600 \cdot \pi}{65} = 347,9$. Prenons $\mathfrak{Z} = 348$, ce qui permet de diviser la couronne en 12 segments, contenant chacun 29 dents et fournit, par suite, une division très-convenable. Avec cette valeur de $\mathfrak{Z} = 348$, le rayon R reste à peu près exactement égal à 3600. Pour la roue menée, on a maintenant: $\mathfrak{Z}_1 = \frac{n}{n_1}\, \mathfrak{Z} =$

$\frac{3,1}{40} \cdot 348 = 26,97$ ou 27, nombre qu'on peut admettre définitivement. On en déduit, pour la valeur du rayon: $R_1 = \frac{27 \cdot 65}{2\pi} = 279^{mm},3$.

2e Exemple. Une turbine, dont l'arbre vertical fait 96 tours par minute, doit transmettre une force de 100 chevaux à un arbre horizontal faisant 144 tours; il s'agit de déterminer les deux roues coniques nécessaires pour cette transmission. Nous supposerons que la roue menée soit à dents de bois, l'autre à dents de fonte et nous prendrons $\mathfrak{Z} = 72$, $\mathfrak{Z}_1 = 48$. La vitesse v, évaluée approximativement, étant comprise entre 6 et 7^m, nous pouvons admettre environ $1^k,4$ pour $\mathfrak{S}$. Si, d'après les indications de l'expérience, nous prenons $b = 240^{mm}$, la formule (211) nous donnera: $t = 8596\sqrt{\frac{100}{1,4 \cdot 240 \cdot 72 \cdot 96}}$ ou 57^{mm}. D'après la table du § 186, cette valeur donne $R = 57 \cdot 11,46 = 653^{mm},2$; ce qui conduit pour v à $6^m,57$ et montre que la valeur 1,4, admise pour $\mathfrak{S}$, est convenable. Nous avons maintenant: $P = \frac{75 \cdot N}{v} = \frac{7500}{6,57}$ ou 1140^k; on en déduit $\frac{P}{b} = \frac{1140}{240} = 4,75$ et $\frac{P}{b} n = 96 \cdot 4,57 = 456$, valeurs qui sont toutes les deux parfaitement admissibles.

3e Exemple. Dans une équipage de roues dentées, fig. 495, où la roue et le pignon de chaque arbre sont respectivement de même grandeur que

Fig. 495.



la roue et le pignon de l'arbre précédent, les efforts à la circonférence des roues sont inversement proportionnels aux nombres de tours; dans ce cas, pour que la valeur de $\frac{P}{n} b$, c'est-à-dire l'usure, reste constante pour tous les couples de roues, il convient de donner à toutes ces roues la même largeur. Cette disposition est celle qu'on emploie dans les équipages de roues dentées, destinées à transmettre le mouvement à l'arbre principal des tours à pointes.

Dans les engrenages, exposés à des chocs violents, on doit adopter des dimensions notablement supérieures à celles que fournissent les calculs précédents. C'est ce qui se fait notamment pour les engrenages des moulins, où la résistance des dents est rarement en rapport avec les pressions statiques. Dans ces engrenages, le pas est souvent de 3 à 6 fois supérieur à celui

que donnerait notre calcul; la valeur adoptée pour $\frac{P}{b}n$ est également très-faible (100 et au-dessous). Une observation analogue s'applique aux engrenages de laminoirs, où la valeur de t est, en moyenne, de 2 à 3 fois celle du calcul et souvent même plus considérable encore.

4e Exemple. Un arbre de meule exige, à la vitesse de 120 tours par minute, un travail de 4 chevaux, qui doit lui être transmis par deux roues à dents de fonte et de bois; le rayon R est égal à 250mm. On déduit de la formule (209), pour la vitesse, $v = 3^m,15$ et, par suite, $P = 95^k$. Pour arriver à une usure très-faible, prenons $\frac{P}{b}n$ très-petit et égal, par ex., à 120; ce qui donne $b = \frac{95 \cdot 120}{120} = 95^{mm}$. Comme, d'après (208), $\mathfrak{S}$ doit être supposé égal à $1^k,85$, il en résulte qu'on devrait prendre: $t = \frac{16,8 \cdot 95}{1,85 \cdot 95} = 9^{mm}$. En réalité, dans la pratique, afin de tenir compte des chocs et des vibrations, on adopte pour t une valeur beaucoup plus considérable, comprise entre 40 et 50mm.

Au lieu de continuer à montrer par des exemples les divergences entre les valeurs données par le calcul et celles qu'on admet, en réalité, pour les cas spéciaux dont il s'agit, nous préférons intercaler ici une série de tableaux, qui renferment les dimensions adoptées dans la pratique pour certains engrenages exposés à des chocs.

Engrenages cylindriques.

N°	N	n	R	$\mathfrak{Z}$	t	b	v	P	$\mathfrak{S}$	$\frac{P}{b}$	$\frac{Pn}{b}$	Observations.
1	300	25/100	3724/939	230/58	102	356	9,70	2320	1,1	6,52	2·163/622	F/F Machine à vapeur.
2	270	60/12	498/2490	19/95	158	525	3,13	6500	1,3	12,40	744/149	F/F Machine à vapeur.
3	240	13,3/44	2790/843	208/68	79	406	3,89	4633	2,3	11,60	154/510	F/F Engrenages de transmission du N° 8.
4	192	1,33/15,14	10193/897	704/62	91	381	1,42	10110	5,1	26,53	35/402	F/F Roue hydraulique.
5	192	15,14/50	2691/815	208/63	81	381	4,27	3375	1,6	8,86	134/443	F/F Engrenages de transmission de la roue précédente.
6	140	30/55	1485/815	132/72	71	218	4,62	2273	3,0/3,4	10,42	313/573	F/F Machine à vapeur.
7	140	30/54,5	1690/905	138/76	77	330	5,31	1977	2,6	5,99	180/326	F/F Machine à vapeur.
8	120	1,51/13,3	7391/838	560/80	79	381	1,22	7377	4,0	19,36	29,2/257	F/F Roue hydraulique.
9	90	26/80	2170/705	228/74	60	150	5,91	1142	2,1	7,61	198/609	B/F Machine à vapeur.
10	82.5	54/83	1400/910	114/74	78	2·120/300	7,92	1563	1,3/1,0	6,50	351/2·540	B/F Navire à hélice.
11	50	4,0/7,32	1282/700	96/52	83	270	0,53	7075	5,3	26,20	105/192	F/F Roue hydraulique.
12	20	7,74/40	2170/420	248/48	55	160	1,67	900	1,7	5,60	43/224	F/F Roue hydraulique.

Engrenages coniques.

N°	N	n	R	$\mathfrak{Z}$	t	b	v	P	$\mathfrak{S}$	$\frac{P}{b}$	$\frac{Pn}{b}$	Observations.
13	300	93/50	620/1160	50/93	78	330	6,04	3730	2,3/2,6	11,23	1044/562	F/F Turbine.
14	300	100/111,8	755/679	55/49	68	254	8,01	2806	2,7	11,04	110/123	F/F Engrenages de transmission du N° 1.
15	240	44/44	1067	75	89	457	4,92	3659	1,5	7,70	389	F/F Engrenages de transmission du N° 3.
16	200	41/80	1500/765	98/50	96	300	6,40	2344	1,4	7,80	320/624	B/F Turbine.
17	130	98/124	795/630	80/60	62	204	7,74	1260	1,6/1,7	6,18	575/766	B/F Turbine.
18	100	93/144,7	595/380	70/45	53	160	5,79	1300	2,1/2,7	8,14	757/1178	B/F Turbine.
19	50	98/218	645/275	75/32	54	160	6,28	597	1,1/1,3	3,70	344/807	B/F Turbine.

Engrenages hyperboloïdes.

20	16	72/81,6	548/483	68/60	50,7/50,6	150	4,13	291	0,65/0,88	1,94	140/158	F/B Engrenages de transmission.

§ 211.

Remarques relatives aux tableaux précédents.

Ainsi que le montre la première colonne, les éléments fournis par les tableaux se rapportent spécialement à des engrenages destinés à la transmission de forces considérables et pour lesquels on a indiqué, aussi exactement que possible, les nombres de dents. La matière dont sont formées ces dents est donnée par la dernière colonne. Les divers signes F/F, B/F, F/B représentent respectivement des engrenages de fonte sur fonte, de bois sur fonte et de fonte sur bois; la première lettre se rapportant toujours aux dents de la roue menante. Le travail indiqué est le travail réel en chevaux et non le travail nominal. Les divers exemples des tableaux donnent lieu aux observations suivantes:

N° 1. La roue menante est un volant denté, engrènant avec deux pignons d'égale grandeur et transmettant un travail de 300 chevaux à chacun d'eux, soit un travail total de 600 chevaux. Par conséquent, pour le volant, $\frac{Pn}{b}$ *a du être multiplié par 2 (v. l'avant dernière colonne).*

N° 2. Machine soufflante de l'ancien chemin de fer atmosphèrique de St Germain. La valeur de $\frac{Pn}{b}$ *est très-élevée; ce défaut devait être très-sensible, lorsque le service fonctionnait sans interruption.*

N° 3. La valeur de $\frac{P}{b}$ *est encore très-élevée; toutefois, en raison du petit nombre de tours,* $\frac{P}{b}\,n$ *ne dépasse pas la limite admissible.*

Nos 4 et 5. Les données de ces deux nos se rapportent à la puissante roue hydraulique de Greenock (qui est encore aujourd'hui la plus grande de toutes celles qui existent). La pression par unité de largeur de la couronne dentée est très-considérable; toutefois, la transmission par engrenages paraît être dans des conditions relativement satisfaisantes, ce qui doit sans doute être attribué à la faible valeur de $\frac{Pn}{b}$*. Pour le pignon du n° 5, la valeur de* $\frac{Pn}{b}$ *est à peu près la même que pour le pignon du n° 4; ces deux pignons doivent donc être très-sensiblement soumis au même degré d'usure.*

N° 6. Les dents de la petite roue (pignon) sont plus faibles que celles de la grande (volant denté), ainsi que l'indique la colonne des tensions ($\mathfrak{S}$). Il est très-probable qu'au début le volant portait des dents de bois.

N° 8. Bien que la pression par unité de largeur soit très-considérable, la valeur de $\frac{Pn}{b}$ *se trouve encore suffisamment petite. Dans ce cas, comme*

au n° 4, la tension des dents est assez forte. L'application de la formule (208) nous aurait donné des valeurs plus faibles.

N° 9. Les dents en bois se sont effilées au bout d'un certain temps de marche; cette diminution d'épaisseur doit être attribuée à la pression trop considérable, supportée par ces dents, qui est ici de $2^k,1$; dans les mêmes conditions, nous aurions adopté $1^k,5$ seulement d'après la formule (208).

N° 10. Deux roues à dents de bois engrènent avec un pignon à dents de fonte calé sur l'arbre d'une hélice; chacune de ces roues ayant une largeur de dent de 120^{mm}, la largeur totale à introduire, pour le calcul de $\mathfrak{S}$ et de $\frac{Pn}{b}$, est de $2 \cdot 120^{mm} = 240^{mm}$.

N° 11. Pression par unité de largeur très-considérable, qui s'est traduite par une usure des dents; avec une aussi forte valeur de $\frac{P}{b}$, il est évidemment difficile de maintenir ces dents en bon état.

N° 13. Les dents sont trop faibles, et il s'en casse assez fréquemment; l'usure de ces dents doit être extrêmement rapide, ce qui s'explique, d'ailleurs, par la valeur exceptionnelle de $\frac{Pn}{b}$.

N° 15. Cette paire de roues (installée par Fairbairn) peut avoir à transmettre un travail double de celui qui est indiqué, c'est-à-dire que, dans certains cas, elle doit pouvoir transmettre le travail de 4 roues hydrauliques, au lieu de 2, chacune de ces roues ayant une puissance de 120 chevaux. Dans ces conditions, la tension des dents s'élèverait à 3^k, valeur admissible; toutefois, pour une marche permanente, la valeur de $\frac{Pn}{b}$ serait, alors un peu trop forte.

N° 18. La valeur de $\frac{Pn}{b}$, qui semble déjà très-élevée pour la roue à dents de bois, est extrêmement forte pour la roue à dents de fonte; il importe toutefois de remarquer que, dans ce cas, l'usure doit se produire à peu près exclusivement sur les dents de bois.

N° 20. Ce type d'engrenages est emprunté à un nouveau mode de transmission d'une usine de construction de machines, qui précédemment avait employé avec le plus grand succès, comme organes de transmission, des roues hyperboloïdes. Un défaut de la disposition adoptée tient à ce que les dents de bois se trouvent placées sur la roue menée; ce qui a pour conséquence, comme nous l'avons vu, d'augmenter notablement les chances d'usure (v. § 210, p. 474).

F. Dimensions du corps des roues d'engrenage.

§ 212.

Couronne d'une roue dentée.

On désigne, sous le nom de *couronne* ou de *jante* d'une roue, la partie annulaire, sur laquelle se fixent les dents; la

désignation de jante s'applique plus spécialement à l'ensemble de segments séparés qui, dans certains cas, constituent, par leur réunion, la couronne de la roue. Dans les engrenages cylindriques en fonte, on peut prendre, pour l'épaisseur de la couronne:

$$\delta = 3 + 0{,}4\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

(Fig. 496 à 498). L'épaisseur de la couronne n'est pas uniforme: jusqu'au milieu, ou d'un bord à l'autre, elle augmente de

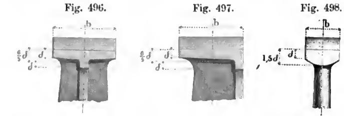


Fig. 496. Fig. 497. Fig. 498.

δ à $^6/_5\,\delta$; elle est renforcée, de plus, par une nervure qui, pour les pas de faible dimension et pour des bras à section ovale, peut être profilée en arc de cercle (fig. 498). D'après la formule (213), un pas de 20^{mm} exige une épaisseur de couronne de $3 + 8 = 11^{mm}$; pour $t = 10^{mm}$, δ n'est que de 7^{mm}.

Dans les roues coniques en fonte, Fig. 499 à 501, l'épaisseur de la jante va en augmentant de l'intérieur à l'extérieur, où elle atteint $^6/_5\,\delta$, et se raccorde avec les bras, comme l'indiquent les figures. Dans les roues à dents de bois, la couronne doit avoir

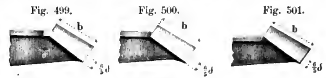


Fig. 499. Fig. 500. Fig. 501.

une plus grande épaisseur et, de plus, être renforcée latéralement; cette augmentation de dimensions a surtout pour but de

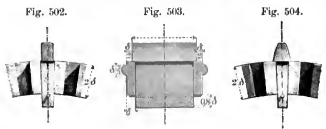
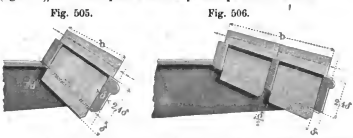


Fig. 502. Fig. 503. Fig. 504.

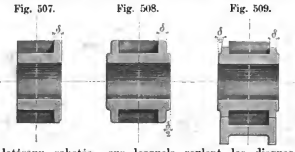
permettre un encastrement convenable des dents. Les nombres proportionnels, pour les roues cylindriques et coniques, sont indiqués respectivement par les Fig. 502 à 504 et 505 à 506. Les dents de bois d'une trop grande largeur sont formées de deux pièces (fig. 506), dont les queues sont séparées par une traverse.

Fig. 505. Fig. 506.



Les roues cylindriques de très-faibles dimensions (petits pignons), lorsqu'elles ont à transmettre un effort un peu considérable, sont renforcées latéralement par un ou deux disques, Fig. 507 et 508; il convient de tourner exactement ces disques jusqu'au rayon du cercle primitif, quand le pignon doit engrener avec une crémaillère (fig. 509); celle-ci porte, dans ce cas, des

Fig. 507. Fig. 508. Fig. 509.



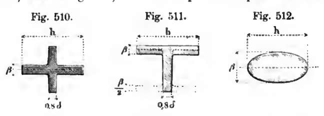
guides latéraux rabotés, sur lesquels roulent les disques du pignon. Les petits pignons, de 7 à 8 dents, engrenant avec des roues à dents de fonte, se font souvent en fer et, dans ce cas, ils ne sont pas munis de disques latéraux.

§ 214.

Bras d'une roue dentée.

Les sections des bras, qu'il convient d'adopter pour les différentes formes de couronnes, que nous venons d'indiquer, sont représentées par les figures suivantes.

Fig. 510 et 511. Sections à nervures, de dimensions différentes; dans la fig. 511, le tracé en pointillé représente la forme



de section qui convient le mieux, pour l'emploi de gabarits, dans le moulage en sable (troussage). La fig. 512 représente une section ovale, pour laquelle, en chaque point, la largeur β est la moitié de la hauteur h. Le nombre $\mathfrak{A}$ des bras d'une roue se trouve convenablement déterminé par la relation:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A} = \tfrac{1}{4}\sqrt{3}\,\sqrt[4]{t} \\ \text{ou} \\ \mathfrak{A} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}\,\sqrt[4]{\dfrac{t}{\pi}}\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (214).$$

Au moyen de laquelle on a déterminé la série des valeurs suivantes:

$\mathfrak{A}$ =	3	4	5	6	7	8	10	12
$\mathfrak{Z}\sqrt{t}$ =	144	256	400	576	784	1024	1600	2304
$\mathfrak{Z}\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$ =	81	144	225	324	441	576	900	1296.

Exemple. Pour une roue de 50 dents, de 50ᵐᵐ de pas, la valeur de $\mathfrak{Z}\sqrt{t}$ est 50.7 = 350, qui se rapproche beaucoup de 400; la roue doit donc avoir 5 bras. Si le pas n'était que de 16ᵐᵐ, $\mathfrak{Z}\sqrt{t}$ serait égal à 50.4 = 200, nombre compris entre 144 et 256; le nombre des bras devrait donc être 3 ou 4.

Dans la section à nervures, la hauteur h du bras, contenue dans le plan moyen de la roue, se détermine au sentiment; nous devons faire remarquer, toutefois, que le plus souvent on obtient, pour h, une valeur très-convenable, en prenant, pour le rapport $\dfrac{h}{t}$, un nombre compris entre 2 et 2,5; l'épaisseur constante β de la nervure se détermine à l'aide de la formule:

$$\frac{\beta}{b} = 0{,}07\,\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}}\left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (215).$$

Lorsque cette formule donne une épaisseur de nervure trop forte ou trop faible, au point de vue de l'aspect ou de l'exécution à la fonderie, on modifie la valeur primitivement admise pour $\frac{h}{t}$ et on recommence le calcul. Ces tâtonnements peuvent d'ailleurs être notablement réduits par l'usage de la table du paragraphe suivant.

La hauteur de la seconde nervure, près de la couronne, est légèrement inférieure à b, tandis que, près du moyeu, elle lui est égale ou même un peu supérieure.

Dans les bras à section ovale, la hauteur h près du moyeu est, en général, égale à $2t$ et va en diminuant jusqu'à la couronne, où elle n'est plus que $\frac{2}{3}\,2t$.

§ 215.

Table relative aux dimensions des bras des roues dentées.

$\frac{h}{t}$	Valeurs de $\frac{\beta}{b}$ pour								
	$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = 7$	9	12	16	20	25	30	35	40
1,50	0,20	0,28	0,37	0,50	0,62	0,78	0,93	1,08	1,24
1,75	0,16	0,21	0,27	0,37	0,46	0,57	0,69	0,80	0,91
2,00	0,12	0,16	0,21	0,28	0,35	0,44	0,53	0,61	0,70
2,25	0,10	0,12	0,17	0,22	0,28	0,35	0,41	0,48	0,55
2,50	0,08	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,34	0,39	0,45
2,75	0,06	0,08	0,11	0,15	0,18	0,23	0,28	0,32	0,37
3,00	0,05	0,07	0,09	0,12	0,16	0,19	0,23	0,27	0,31

1er Exemple. La roue précédente de 50 dents et de 50mm de pas, a pour largeur de dents 100mm; si on prend, pour la hauteur h de la nervure, dans le plan moyen de la roue, $h = 2t = 100^{mm}$, la table précédente donne pour l'épaisseur: $\beta = 0{,}35 \cdot 100 = 35^{mm}$. Si on trouve cette épaisseur incommode et si on préfère une nervure plus faible, on peut prendre, par exemple, $h = 2{,}25 \cdot t = 2{,}25 \cdot 50 = 113^{mm}$ et la table donne alors: $\beta = 0{,}28 \cdot 100 = 28^{mm}$.

Les bras à nervures en croix d'une roue à dents de bois et de la roue à dents de fonte, qui engrène avec elle, ne doivent avoir, comme dimensions, que les $\frac{8}{10}$ de celles qu'on donne aux roues de fonte sur fonte. Lorsqu'on veut opérer avec plus d'exactitude, on peut commencer par déterminer les dents de fonte

équivalentes aux dents de bois données et chercher ensuite les dimensions des bras correspondant au pas, à la largeur et au nombre de ces dents de fonte.

§ 216.

Moyeu d'une roue dentée.

Suivant la forme de section adoptée pour les bras, la surface extérieure du moyeu d'une roue dentée comporte une ou deux parties légèrement coniques; dans les roues de grandes dimensions, chaque tronc de cône se termine par une partie arrondie, dont le profil est un quart d'ellipse; la longueur L du moyeu, qui est ordinairement égale à $^5/_4\, b$, peut être prise un peu plus forte, dans le cas de roues d'un grand rayon; l'épaisseur du moyeu est donnée par l'expression $w = 10 + 0{,}4\, h$, h désignant la hauteur du bras.

Lorsque le moyeu n'est pas destiné à être posé à chaud, il est légèrement évidé à l'intérieur, sur une partie de sa longueur, de telle sorte qu'on n'ait à dresser au tour, à chaque extrémité, qu'une largeur égale à $^3/_4\, w$. Le passage de la clavette de fixation est dressé sur toute la longueur du moyeu et présente une inclinaison égale à celle de la clavette. Dans les roues destinées à transmettre des efforts considérables, le moyeu se trouve renforcé par une saillie, ménagée directement au-dessus du logement de la clavette, afin d'éviter que l'introduction de cette dernière ne puisse amener sa rupture. Une précaution, qui paraît préférable, consiste à renforcer chacune des deux extrémités du moyeu, ou au moins l'une d'elles, par un anneau en fer rapporté. Ces anneaux, à section carrée, dont le côté est à peu près égal à $\frac{w}{2}$, augmentent très-notablement la résistance du moyeu et permettent de chasser la clavette avec force, sans aucun danger de rupture.

§ 217.

Poids des roues dentées.

Le poids G d'une roue cylindrique, établie d'après les règles précédentes, peut être représenté approximativement par l'expression suivante:

$$G = bt^2 (6{,}25\, \mathfrak{Z} + 0{,}04\, \mathfrak{Z}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (216)$$

dans laquelle b et t sont exprimés en *décimètres.*

L'usage de cette formule se trouve notablement facilité par la table suivante, qui donne $\frac{G}{b\,t^2}$ pour une série de valeurs du nombre de dents. Chacune des quantités, fournies par cette table, correspond à un nombre de dents, qui est précisément la somme des chiffres inscrits à l'entrée des deux lignes horizontale et verticale correspondantes.

$\mathfrak{z}$	0	2	4	6	8
20	141,0	156,9	173,0	189,5	206,4
30	223,5	241,0	258,7	276,8	295,3
40	314,0	333,0	352,4	372,1	392,2
50	412,5	433,2	454,1	475,4	497,1
60	519,0	541,3	563,8	586,7	610,0
70	633,5	657,4	681,5	706,0	730,7
80	756,0	781,5	807,2	833,3	859,8
90	886,5	913,6	940,9	968,6	996,7
100	1025,0	1053,7	1082,6	1111,9	1141,6
120	1326,0	1357,9	1390,0	1422,5	1455,4
140	1659,0	1694,1	1729,4	1765,1	1801,1
160	2024,0	2062,3	2100,8	2139,7	2179,0
180	2421,0	2462,5	2501,2	2546,3	2588,8
200	2850,0	2894,7	2936,9	2984,9	3030,6
220	3311,0	3358,9	3407,0	3155,5	3504,4

Exemple. Une roue dentée en fonte, construite d'après les règles précédentes, a 50 dents, $0^{dcm},5$ de pas et 1^{dcm} de largeur; on a, dans ce cas, $b\,t^2 = 0,25$ et la table (colonne 2, ligne 4) donne pour le poids: $G = 0,25 \cdot 412,5 = 103^k,1$. Si la roue, conservant encore 50 dents, avait 30^{mm} de pas et 60^{mm} de largeur, son poids serait: $G = 0,6 \cdot 0,3^2 \cdot 412,5 = 0,054 \cdot 412,5 = 22^k,28$.

Les roues coniques et les roues à dents de bois, avec des bras en croix légers (v. § 215), ont des poids un peu inférieurs à ceux que donne la table précédente.

XIII. Leviers simples.

§ 218.

Tourillons de leviers.

Dans la construction des machines, on désigne, sous le nom de *levier simple*, un bras de levier, dont l'une des extrémités est fixée sur un axe de rotation, tandis que l'extrémité libre (oscillante) porte un tourillon. Ce dernier organe diffère de ceux que nous avons étudiés précédemment (chap. IV) en ce que la pression change ordinairement de sens à la fin de chaque oscillation. Ce changement de sens du mouvement a pour résultat de produire sur l'huile un effet d'aspiration, analogue à celui d'une pompe, et de ramener, par suite, constamment cette huile sur la surface de contact entre le tourillon et les coussinets; le graissage s'effectue donc d'une manière plus satisfaisante que dans les tourillons à pression de direction constante et on peut, dès lors, sans inconvénient, adopter, pour la pression par unité de surface du tourillon, une valeur supérieure à celle que nous avons primitivement admise. Par contre, les chocs successifs, dûs à ce même changement de sens, tendent à produire un jeu nuisible entre le tourillon et les coussinets; aussi, pour diminuer leur influence, convient-il d'introduire, dans le calcul d'un tourillon de levier, pour le maximum de tension, une valeur légèrement inférieure à celle que nous avons indiquée pour les tourillons d'arbres. Dans le cas des tourillons, soumis à une pression de direction constante, en désignant par P cette pression, $\mathfrak{S}$ le maximum de tension et p la pression, par unité de surface, entre le tourillon et les coussinets, nous avons déterminé le diamètre d et le rapport $\frac{l}{d}$ par les formules suivantes:

pour les tourillons d'extrémités:

$$d = \sqrt{\frac{16}{\pi\mathfrak{S}}}\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P}, \qquad \frac{l}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{16}\frac{\mathfrak{S}}{p}},$$

pour les tourillons à fourchette:

$$d = \sqrt{\frac{4}{\pi\mathfrak{S}}}\sqrt{\frac{l}{d}}\sqrt{P}, \qquad \frac{l}{d} = \sqrt{\frac{\pi}{4}\frac{\mathfrak{S}}{p}},$$

Les valeurs à introduire, dans ces formules, à la place de p et $\mathfrak{S}$ étaient $^1/_2{}^k$ et 6^k pour le fer, $^5/_8{}^k$ et 10^k pour l'acier.

Dans le cas actuel, pour les motifs que nous venons d'indiquer, nous adopterons les valeurs suivantes:

	tourillons d'extrémités		tourillons à fourchette	
	fer	*acier*	*fer*	*acier*
$p =$	1	1,25	1	1,25
$\mathfrak{S} =$	5	8,25	5	8,25
$d =$	$\sqrt{P}$	$0{,}84\sqrt{P}$	$0{,}7\sqrt{P}$	$0{,}59\sqrt{P}$
$l =$	$\sqrt{P}$	$0{,}96\sqrt{P}$	$1{,}4\sqrt{P}$	$1{,}31\sqrt{P}$
$\frac{d}{l} =$	1	1,14	2	2,28

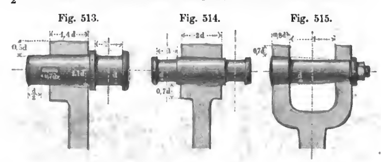
. (217).

Dans ces valeurs l se trouve exprimé directement en fonction de P, au lieu de l'être comme précédemment; cette modification tient à ce que, dans les tourillons de leviers, on se trouve souvent conduit à adopter, pour d, une valeur supérieure à celle qu'indique la formule, soit pour des raisons de construction, soit par ce que le tourillon doit être assimilé à un tourillon intermédiaire. Ainsi que nous l'avons montré au § 82, on obtient toujours, pour le tourillon, une longueur suffisante, en prenant celle du tourillon normal équivalent. Dans le cas où l'espace dont on dispose ne permet pas d'adopter cette longueur, il convient d'augmenter le diamètre, afin d'arriver à une valeur de p, qui ne soit pas supérieure à celle que nous venons d'indiquer. L'usure, qui se produit alors, est plus considérable que dans le tourillon normal, mais on n'a pas à redouter d'échauffement, si l'on a soin d'établir un graissage convenable (§ 83).

Les différentes formes, sous lesquelles les tourillons de leviers se trouvent ordinairement employés dans la pratique, sont représentées dans les figures suivantes et constituent le tourillon simple (ou d'extrémité), le tourillon double et le tourillon à fourchette. Pour obtenir une construction satisfaisante, il est essentiel que le corps du tourillon soit parfaitement ajusté dans le vide préparé à l'extrémité du levier. L'épaulement, qui, dans la fig. 513, se trouve au-dessus de la partie conique, ne doit pas toucher la surface du levier, afin de ne pas s'opposer à l'entrée de cette partie conique; la figure indique le jeu à laisser et qui, pour plus de clarté, a été légèrement exagéré. Dans les constructions très-soignées, ce jeu peut être dissimulé en ménageant, sur la face du levier, une cavité, dans laquelle s'engage, à frottement libre, l'épaulement du tourillon. Dans le tourillon double, Fig. 514,

convenablement exécuté, la pression peut être supposée égale à $\frac{P}{2}$ sur chacun des tourillons, qui peut, dès lors, être considéré

Fig. 513. Fig. 514. Fig. 515.



comme un tourillon d'extrémité, soumis à cette charge. Dans le tourillon à fourchette, fig. 515, les deux parties du corps, engagées dans les branches du levier, appartiennent à une même surface conique.

1er Exemple. Pour une pression $P = 2000^k$, un tourillon simple de levier doit avoir, s'il est en fer, un diamètre $d = \sqrt{2000}$, soit 45^{mm} et une longueur égale. En acier, il aurait, comme dimensions, $d = 0{,}84\sqrt{2000} = 38^{mm}$ et $l = 43^{mm}$. Avec un tourillon à fourchette, les formules (217) donneraient, pour la même charge, $d = 0{,}7\sqrt{2000} = 32^{mm}$ et $l = 1{,}4\sqrt{2000} = 64^{mm}$. Si on augmentait le diamètre de ce tourillon, si on le portait, par exemple, à 40^{mm}, il serait avantageux de conserver, pour l, 64^{mm}; dans le cas où cette longueur devrait être réduite le plus possible, son minimum se trouverait déterminé par la condition $p \leq 1$ et on devrait prendre $l = \frac{2000}{40} = 50^{mm}$.

La direction de l'effort n'est pas nécessairement variable pour tous les leviers; c'est ainsi, par exemple, qu'elle reste constante pour les leviers à contrepoids, les balanciers des machines d'élévation d'eau à simple effet, etc. Dans ce cas, il convient de calculer les tourillons simples (ou d'extrémités) d'après les formules du § 79 (v. le 3e ex. du § 80). Pour les tourillons à fourchette, on peut admettre $p = \frac{1}{2}^k$ et $\mathfrak{S} = 6^k$, lorsqu'ils sont en fer, $p = \frac{5}{8}^k$ et $\mathfrak{S} = 10^k$, lorsqu'ils sont en acier; on a alors:

tourillons en fer	*tourillons en acier*	
$d = 0{,}8\sqrt{P}$	$d = 0{,}67\sqrt{P}$	
$l = 2{,}4\sqrt{P}$	$l = 2{,}37\sqrt{P}$	. . (218).
$\frac{l}{d} = 3$	$\frac{l}{d} = 3{,}54$	

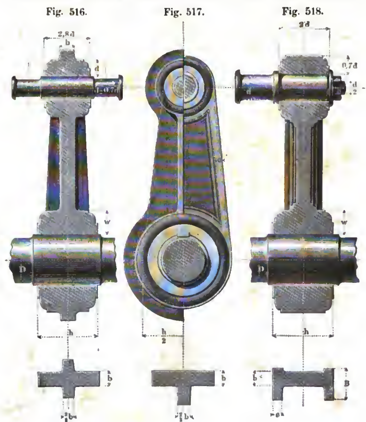
2e Exemple. Pour un levier, soumis à une charge de 2000^k agissant toujours dans le même sens, un tourillon à fourchette en fer devrait avoir, comme dimensions, $d = 0{,}8\sqrt{2000} = 36^{mm}$ et $l = 108^{mm}$; avec l'acier, on aurait $d = 30^{mm}$, $l = 106^{mm}$; si on portait le diamètre à 40^{mm}, la longueur l devrait être prise au moins égale à $\frac{2000 \cdot 8}{40 \cdot 5} = 80^{mm}$. Un tourillon d'extrémité en fer devrait, d'après le § 79, avoir, pour diamètre, $d = {}^9/_8\sqrt{2000} = 50^{mm}$ et, pour longueur, $l = 75^{mm}$.

§ 219.

Fixation des tourillons des leviers.

Les matières qu'on emploie, de préférence, pour la construction des leviers, sont le fer et la fonte. Les figures pré-

Fig. 516. Fig. 517. Fig. 518.



cédentes (de 513 à 515) donnent les rapports à observer pour les dimensions, dans le cas des leviers en fer. Pour les leviers en fonte, les fig. 516 à 518 indiquent, à la fois, les formes de section qu'on peut adopter et les dimensions proportionnelles des trous de tourillons simples et doubles. Pour le tourillon à fourchette, nous renverrons au balancier en fonte du § 237. Lorsque ce tourillon forme un véritable axe, on peut lui appliquer les règles données pour les axes au chap. V.

§ 220.

Axe et moyeu d'un levier.

L'axe sur lequel est fixé un levier simple se trouve ordinairement soumis à des efforts simultanés de flexion et de torsion. Les dimensions de cet axe, pour les différents cas qui peuvent se présenter, se déterminent à l'aide des formules du chap. V et du chap. VI (§ 110).

Quant au moyeu, il doit être établi dans des conditions de résistance différentes, suivant que l'arbre sur lequel il est calé est exposé à la torsion ou simplement soumis à des efforts de flexion. Dans le premier cas, pour un levier en fer avec arbre en fer, de même que pour un levier en fonte avec arbre en fonte, si on désigne par w et λ les épaisseurs des parois et les longueurs des moyeux, par D les diamètres des deux arbres, calculés par les formules (98) et (99), pour le moment statique PR, en ayant simplement égard à la résistance, il convient de prendre:

$$\left.\begin{array}{l} \text{pour } \frac{w}{\lambda} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2{,}5} \quad \frac{1}{3} \\ \frac{w}{D} = 0{,}45 \quad 0{,}42 \quad 0{,}40 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (219).$$

Si le levier doit être fixé sur un arbre d'un diamètre supérieur à D, on commence par déterminer ce diamètre idéal D, qu'on introduit ensuite dans la formule (219). On procéderait d'une manière analogue, s'il s'agissait d'un moyeu en fonte à fixer sur un arbre en fer, et inversement. Les fig. 516 à 518 représentent les formes, qui sont ordinairement en usage pour les moyeux en fonte. Dans les cas où on est forcé de s'en écarter, ces figures peuvent souvent fournir d'utiles indications pour l'établissement des nouvelles formes à adopter.

Exemple. *Supposons qu'il s'agisse de construire en fer le levier de l'ex. 1 (§ 218), en lui donnant une longueur de bras de 600^{mm}, ce qui conduit, pour le moment statique, à $PR = 2000 \cdot 600 = 1200000^{kmm}$. D'après la formule (98), on a: $D = 0{,}95 \sqrt[3]{1200 \cdot 000} = 101^{mm}$; si on prend $\frac{w}{\lambda} = {}^1/_2$, la formule (219) donne: $w = 0{,}45 \cdot 101 = 45^{mm}$, $\lambda = 2 \cdot 45 = 90^{mm}$. Le moyeu devrait recevoir les mêmes dimensions de section, si au lieu d'être calé sur un arbre en fer, il devrait l'être sur un arbre en fonte.*

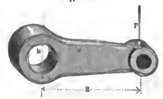
Les moyeux, dont les axes ne sont exposés qu'à la flexion, ne se rencontrent que dans les leviers composés (v. § 237).

§ 221.

Bras de levier à section rectangulaire.

Supposons d'abord qu'il s'agisse de calculer un bras de levier droit, à section rectangulaire, soumis à une force P, contenue dans son plan moyen et normale à son axe longitudinal, fig. 519.

Fig. 519.



En désignant par h la hauteur du bras, dans le plan de l'axe du moyeu, par b son épaisseur et par $\mathfrak{S}$ le maximum de tension admissible, on a la relation:

$$b = 6 \cdot \frac{P}{\mathfrak{S}} \frac{R}{h^2}.$$

Ou, en remplaçant la tension $\mathfrak{S}$ par 6^k pour le fer et 3^k pour la fonte:

$$\text{fer} \quad b = \frac{PR}{h^2} \qquad \text{fonte} \quad b = 2\,\frac{PR}{h^2} \quad \ldots\ldots \quad (220).$$

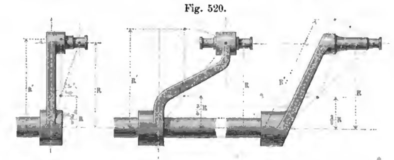
Cette formule suppose qu'on se donne la hauteur h; en réalité, c'est là le mode de calcul le plus convenable, puisque cette valeur de h achève de déterminer le profil du levier, pour lequel le sentiment fournit une première indication de forme.

1[er] Exemple. *$P = 2000^k$, $R = 600^{mm}$. Si le levier doit être exécuté en fer et si on prend $h = 180^{mm}$, la formule (220) donne: $b = \frac{2000 \cdot 600}{180^2} = 36^{mm}$.*

Pour une largeur b constante, la hauteur du bras doit aller en diminuant, depuis l'arbre jusqu'au tourillon, où elle se réduit à $\frac{h}{2}$; si on suppose, au contraire, que cette largeur varie, de telle sorte que le rapport $\frac{b}{h}$ reste constant, la hauteur vers le tourillon est $\frac{2}{3} h$ (v. les n°s III et VII, § 10).

Dans un très-grand nombre de cas, la force P se trouve appliquée en dehors du plan moyen du bras et tend, par suite, à produire, en même temps, une flexion et une torsion de ce bras. Nous pouvons remplacer cette action composée par un simple mouvement de flexion idéal, dont le moment serait le produit de P et d'un bras de levier idéal R', v. fig. 520.

Fig. 520.



En supposant que le plan de P soit à une distance c du plan moyen de fixation du bras, la valeur de R' est donnée, avec une approximation suffisante, par les formules:

$$\left.\begin{array}{ll} R > c \left\{ \begin{array}{l} R' = \frac{3}{8} R + \frac{5}{8} \sqrt{R^2 + c^2} \\ \text{ou } R' = 0{,}975\, R + 0{,}25\, c \end{array} \right. \\ R < c \quad\;\; R' = 0{,}625\, R + 0{,}6\, c \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (221).$$

La fig. 520 montre comment R' peut être déterminé graphiquement. Dans le cas où le bras a une direction oblique, il convient d'adopter, pour la construction, une disposition, qui permette d'arriver rapidement au résultat, comme l'indique la troisième solution de la figure.

2e Exemple. Pour un levier, dont la longueur de bras est de 600^mm et qui est soumis à un effort de 2000^k, la distance c est de 400^mm. Dans ce cas, on a $R > c$ et, d'après (221), on doit poser: $R' = 0{,}975 \cdot 600 + 0{,}25 \cdot 400 = 685^{mm}$. En supposant $h = 180^{mm}$, on trouve $b = \frac{2000 \cdot 685}{180^2}$, soit 42^mm, au lieu de 36^mm, comme dans le 1er exemple.



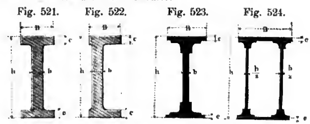
On donne souvent à la section des leviers en fonte une forme analogue à celle de la fig. 516. La largeur b peut d'ailleurs se déterminer, comme précédemment, en ne tenant pas compte des petites nervures accessoires.

§ 222.

Sections de bras de leviers composées.

Les sections, représentées par les figures suivantes, permettent d'obtenir une répartition de matière plus avantageuse que dans la section rectangulaire et doivent, par suite, être employées, de préférence, dans le cas d'efforts considérables. Il est d'ailleurs facile de trouver les dimensions d'une section de ce genre, en déterminant d'abord la section rectangulaire nécessaire et en la transformant ensuite.

Fig. 521. Fig. 522. Fig. 523. Fig. 524.



En partant des notations indiquées sur les figures et en désignant, en outre, par h_0 et b_0 la hauteur et la largeur d'un bras de levier à section rectangulaire, qui correspondrait à l'effort appliqué au tourillon, la transformation peut s'effectuer de la manière suivante:

En se donnant le profil du levier, c'est-à-dire la hauteur h_0 du bras à section rectangulaire, qui doit être égale à h, on détermine d'abord la largeur correspondante b_0, puis on trouve b par la relation:

$$\left.\begin{aligned} \frac{b}{b_0} &= \frac{1}{1+\alpha} \\ \text{dans laquelle} \quad \alpha &= \left(\frac{B}{b}-1\right)\left[6\,\frac{c}{h}-12\left(\frac{c}{h}\right)^2\right] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (222).$$

Cette formule suppose connus les rapports $\frac{B}{b}$ et $\frac{c}{h}$; mais le choix de ces éléments ne présente aucune difficulté et est une conséquence de la forme de section adoptée pour le levier. Lors-

qu'on applique la formule (222) au calcul des dimensions des sections, représentées par les Fig. 523 et 524, on peut négliger l'influence des cornières et, comme compensation, ne pas tenir compte de l'affaiblissement produit dans les plaques par le percement des trous de rivets. La table suivante donne une série de valeurs, qui simplifie beaucoup l'emploi de la formule (222). Le même procédé peut être appliqué, avec avantage, au calcul d'autres pièces, telles, par exemple, que les supports de toutes natures, les flèches de grues en fonte et en tôle, etc.

§ 223.

Table pour la transformation des sections rectangulaires de leviers en sections composées.

$\frac{h}{c}$	Valeurs de $\frac{1}{1+\alpha}$									
	$\frac{B}{b}=2,5$	3	3,5	4	4,5	5	6	7	8	10
6	0,50	0,43	0,38	0,33	0,30	0,27	0,23	0,20	0,18	0,14
7	0,52	0,45	0,40	0,35	0,32	0,29	0,25	0,21	0,19	0,15
8	0,54	0,47	0,42	0,37	0,34	0,31	0,26	0,23	0,20	0,16
9	0,56	0,49	0,44	0,39	0,36	0,33	0,28	0,24	0,22	0,18
10	0,58	0,51	0,46	0,41	0,37	0,34	0,29	0,26	0,23	0,19
11	0,60	0,53	0,48	0,43	0,39	0,36	0,31	0,27	0,24	0,20
12	0,62	0,55	0,50	0,44	0,41	0,37	0,32	0,29	0,26	0,21
14	0,64	0,58	0,52	0,47	0,44	0,40	0,35	0,31	0,28	0,23
16	0,67	0,60	0,55	0,50	0,47	0,43	0,38	0,34	0,30	0,25
18	0,69	0,63	0,57	0,52	0,49	0,46	0,40	0,36	0,33	0,27
20	0,71	0,65	0,60	0,55	0,52	0,48	0,42	0,38	0,34	0,29
22	0,73	0,67	0,62	0,57	0,53	0,50	0,45	0,40	0,37	0,31
24	0,75	0,68	0,64	0,59	0,56	0,52	0,47	0,42	0,38	0,33
27	0,76	0,71	0,66	0,62	0,58	0,55	0,50	0,45	0,41	0,35
30	0,78	0,73	0,68	0,64	0,61	0,57	0,52	0,47	0,43	0,37
33	0,79	0,75	0,70	0,66	0,63	0,60	0,54	0,50	0,45	0,39
36	0,81	0,76	0,72	0,68	0,65	0,61	0,56	0,52	0,48	0,41
40	0,83	0,78	0,74	0,70	0,67	0,64	0,58	0,54	0,50	0,44
45	0,84	0,80	0,76	0,72	0,69	0,66	0,61	0,57	0,53	0,47
50	0,85	0,81	0,78	0,74	0,71	0,68	0,63	0,59	0,56	0,49

Exemple. La longueur d'un levier simple $R = 2000^{mm}$ *et l'effort appliqué au tourillon* $P = 2500^{k}$*; le bras doit être en fonte avec une section*

à double T, dont la hauteur h_0 doit être égale à 320^mm. D'après la formule (220), la largeur b_0 de la section rectangulaire, correspondant à cette charge, serait $b_0 = \frac{2 \cdot 2500 \cdot 2000}{320^2}$, *ou 98^mm. Pour transformer cette section, posons* $\frac{c}{h} = \frac{1}{12}$, $\frac{B}{b} = 4$; *la table précédente nous donne alors (col. 5, ligne 7):* $\frac{1}{1+u} = 0{,}44$, *d'où on déduit:* $b = 0{,}44\, b_0 = 0{,}44 \cdot 0{,}98 = 43^{mm}$; *on a ensuite, pour la longueur des nervures des rebords,* $B = 4 \cdot 43 = 172^{mm}$ *et, pour leur épaisseur,* $c = \frac{h}{12} = \frac{320}{12} = 27^{mm}$. *Toutes ces valeurs sont parfaitement admissibles pour l'exécution. Dans le cas où l'on s'imposerait la condition que* $c = b$, *on devrait transformer la formule (222), en introduisant cette condition, mais on peut s'en dispenser et arriver au résultat, en opérant par tâtonnements et en se donnant successivement différentes valeurs de* $\frac{B}{b}$ *et de* $\frac{c}{h}$. *Si on pose, par exemple,* $\frac{B}{b} = 5$, $\frac{c}{h} = \frac{1}{10}$, *la table précédente (col. 7, ligne 5) donne:* $\frac{1}{1+u} = 0{,}34$ *et, par suite,* $b = 0{,}34 \cdot 98 = 33^{mm}$, *tandis qu'on trouve* $c = \frac{320}{10} = 32^{mm}$, *valeur qui se rapproche assez de celle de b, pour qu'il soit inutile de faire d'autres hypothèses sur* $\frac{B}{b}$ *et* $\frac{c}{h}$.

XIV. Manivelles.

§ 224.

Des différentes espèces de manivelles.

Les *manivelles* sont des leviers simples, reliés à des bielles et disposés de manière à pouvoir décrire des cercles complets. Elles peuvent se diviser en quatre classes principales:

1. *Manivelles ordinaires (ou d'extrémités),*
2. *Contre-manivelles,*
3. *Arbres coudés,*
4. *Excentriques.*

Nous allons examiner successivement ces différentes dispositions de manivelles.

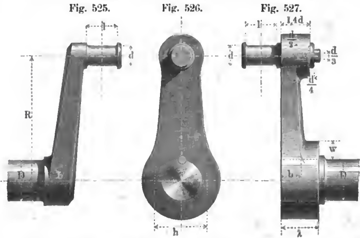
§ 225.

Manivelles en fer.

Ces manivelles peuvent être établies d'après les règles indiquées pour les leviers simples avec un seul tourillon (§ 218).

Les fig. 526 et 527 représentent la disposition la plus généralement employée. La hauteur et la largeur du bras diminuent, à mesure qu'on se rapproche du tourillon, où leurs valeurs ne sont plus que les $^2/_3$ de celles qu'elles ont à la naissance; l'une des faces, celle qui est opposée au tourillon, présente un certain bombement. La queue du tourillon, qui a une forme conique, est entrée de force dans le trou de la manivelle et sa position est, en outre, assurée par un écrou. Pour la fixation de ce

Fig. 525. Fig. 526. Fig. 527.



tourillon, il convient d'ailleurs de tenir compte des observations du § 218. La fig. 525 représente une manivelle d'une seule pièce. Dans ce cas, l'arbre se termine par un renflement, dont le diamètre est précisément égal à la hauteur h du bras.

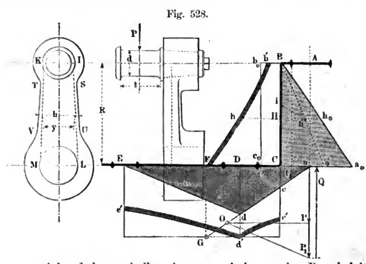
§ 226.

Application de la graphostatique au calcul d'une manivelle.

En raison de l'importance spéciale qui s'attache à la construction des manivelles, nous croyons devoir indiquer ici la manière dont on peut déterminer leurs dimensions par la graphostatique, soit qu'il s'agisse de manivelles simples ou d'arbres plusieurs fois coudés. Nous ne saurions trop recommander à ceux qui ne sont pas encore au courant de cette méthode de répéter les tracés suivants sur une série d'exemples, afin d'arriver

à connaître graduellement et, par suite, à surmonter les petites difficultés qui peuvent se présenter et qui exigent principalement une attention soutenue. Nous allons déterminer successivement l'arbre et le bras d'une manivelle.

Fig. 528.



Arbre de la manivelle. Au moyen de la pression P, qui doit s'exercer sur le tourillon de la manivelle, on commence par calculer le diamètre d et la longueur l du tourillon, puis on trace la série $ABCDE$ des lignes neutres de la manivelle, en établissant l'axe BC du bras, supposé perpendiculaire à l'axe de l'arbre, rigoureusement à sa distance du point A. Par le point a on mène la force P, normale à Ea, on choisit le pôle O du polygone des forces, qu'il y a avantage à prendre sur une parallèle à Ea, passant par l'extrémité de la force P; on trace Oda et dE, puis on mène OP_1, parallèle à dE; adE représente alors le polygone funiculaire, correspondant à la flexion de l'axe aCE sous l'action de la force P; la ligne $PP_1 = P_1$ est l'effort du tourillon en E et $P_1 a = Q$ la réaction en D, dirigée de bas en haut. Si on prend, en outre, aF égal au bras R de la manivelle et qu'on mène FG parallèle à aP, FG (v. § 108) représente le moment avec lequel la force P tend à produire la torsion de l'arbre. Ce moment M_t se compose, en chaque point, avec le moment de flexion M_f, pour donner un moment de flexion idéal $M_i = {}^3/_8 M_f + {}^5/_8 \sqrt{M_f^{\,2} + M_t^{\,2}}$ (§ 45

et 108) et on obtient ainsi la surface des moments $Cc'd'e'E$. Les ordonnées de cette surface permettent de calculer les diamètres aux différents points de l'arbre; il suffit, pour cela, de faire usage de la formule (85), où t_1 doit être considéré comme l'ordonnée correspondant au diamètre connu d du tourillon.

Bras de la manivelle. On prolonge la ligne Ea et, par le point B, on mène Ba_0 faisant avec BC un angle CBa_0 égal à l'angle Dad du polygone funiculaire; Ba_0C, en comptant les ordonnées horizontalement, représente la surface des moments pour la flexion du bras de la manivelle sous l'action de P. Si on fait, en outre, $Cc_0 = Bb_0 = Cc$, les ordonnées horizontales du rectangle Bb_0c_0C sont les moments de torsion de P, aux différents points du bras, par rapport à BC, considéré comme axe neutre. En composant ici encore, d'après les formules connues, les moments de torsion et de flexion, on obtient la surface des moments $Bb'hFC$ pour le bras de manivelle ($a_0a' = {}^3/_8\, a_0C$, $Hi = {}^5/_8\, Bb_0$, $Hh = h_0h' + h'i$). Les ordonnées de cette surface, portées dans la formule (85), où on connaît déjà t_1 et d, permettent de donner d'abord au bras la forme $IKLM$, qui est celle d'un conoïde. Si maintenant on veut donner au bras une forme à section rectangulaire, adopter, par exemple, le profil $STUV$, dont les hauteurs aux différents points soient connues, il est facile de calculer les largeurs correspondantes, en fonction des ordonnées y du conoïde, par la formule suivante:

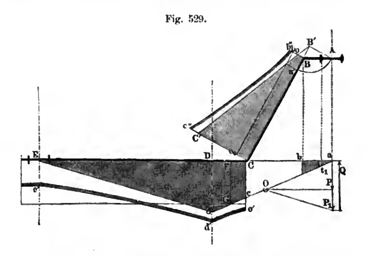
$$\frac{b}{y} = 0{,}6\left(\frac{y}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad (223).$$

Pour le calcul de ces valeurs, on peut utiliser, avec avantage, la seconde table des nombres, qui se trouve à la fin du volume. Si l'on reconnaît définitivement que la position de l'axe BC n'a pas été convenablement choisie, on la corrige et on répète, si on le juge nécessaire, le tracé précédent. La distance du point E au point D est sans influence sur les dimensions du bras de la manivelle.

En ne tenant pas compte de petites quantités, qui sont d'ailleurs parfaitement négligeables, ce procédé fournit les dimensions du bras et de l'arbre de la manivelle avec un degré de sécurité identique à celui du tourillon. Si on voulait obtenir une sécurité plus grande ou plus faible, il faudrait prendre, comme point de départ, un tourillon idéal, présentant le degré de sécurité désiré.

Dans ce qui précède, nous avons supposé l'axe du bras BC normal à l'arbre de la manivelle. Lorsque ces deux axes font un angle légèrement différent d'un angle droit, comme dans la fig. 527, on peut négliger cette différence. Mais, lorsque l'inclinaison devient plus considérable, qu'elle se rapproche, par exemple, de celle de la fig. 525, il est nécessaire d'en tenir compte. On peut procéder alors de la manière suivante, fig. 529.

Fig. 529.



Le diagramme de flexion, pour l'arbre de la manivelle, se trace comme dans la fig. 528; la partie, qui correspond à ab, est utilisée pour le fuseau du tourillon AB; celle qui correspond à CE, composée avec le moment de torsion FG, donne la surface des moments $Cc'd'e'E$.

Le bras de la manivelle, ici encore, se trouve soumis à des efforts simultanés de flexion et de torsion; si on mène AB' perpendiculaire à l'axe BC, on détermine le bras de levier $B'C$ et le polygone de flexion est une section du triangle $CB'C'$, dont l'angle B' est égal à l'angle daD. La torsion ayant pour bras de levier AB', son moment est représenté par l'ordonnée de ce triangle, menée, normalement à BC, par le point a', qui est déterminé par la relation $B'a' = B'A$. La composition des moments de torsion et de flexion fournit la surface des moments, qui peut être utilisée de la même manière que dans le cas précédent.

§ 227.

Manivelles en fonte.

Souvent, dans les manivelles, le tourillon, au lieu d'être cylindrique, est sphérique; cette dernière forme, en particulier, est celle qu'on adopte généralement pour les manivelles en fonte, fig. 530. Le diamètre de cette sphère, pour être dans de bonnes

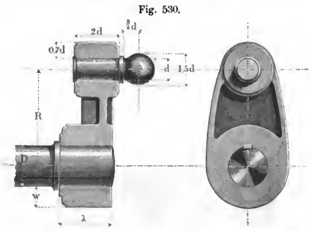


Fig. 530.

conditions, doit être pris égal à une fois et demie celui du tourillon cylindrique normal, soumis à la même charge. Un mode de fixation très-convenable pour le tourillon, et qui a été fréquemment employé dans ces derniers temps, consiste à l'introduire de force dans le trou de la manivelle et à river son extrémité à froid. La section du bras, qui présente une forme en I, peut être déterminée facilement à l'aide de la table du § 223. Toutefois, lorsqu'on prend pour h, comme nous l'avons supposé dans la figure, le diamètre extérieur du moyeu, il arrive ordinairement que les dimensions de la section du bras, fournies par le calcul, sont trop faibles pour pouvoir être exécutées convenablement en fonte et que, pour obtenir une pièce d'un aspect satisfaisant, il convient de les remplacer par d'autres plus fortes, qu'on détermine au sentiment.

Souvent aussi le bras d'une manivelle en fonte est simplement une pièce pleine, à section rectangulaire, réunissant le moyeu de l'arbre à la partie annulaire, destinée à recevoir le tourillon.

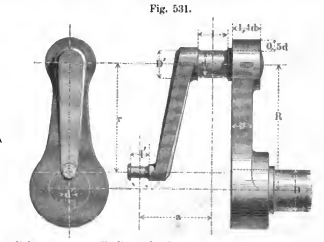
Lorsqu'on fait usage de la graphostatique, pour déterminer les moments, on commence par chercher, comme nous l'avons fait précédemment, le bras en fer à section rectangulaire, qu'on remplace par une pièce en fonte de largeur double (v. § 221), et on passe ensuite de cette dernière pièce à la forme de section en I, au moyen de la table du § 223.

§ 228.

Contre-manivelle.

On désigne, sous le nom de *contre-manivelle*, une manivelle à bras incliné, qui part du tourillon d'une manivelle ordinaire et qui a la même axe de rotation que cette manivelle. La fig. 531 représente une contre-manivelle en fer, exécutée d'une seule pièce comme celle de la fig. 525. Ordinairement, le petit bras

Fig. 531.



est dirigé, comme l'indique la figure, en sens contraire du bras principal, mais souvent aussi il occupe une position différente. Le tourillon et le bras d'une contre-manivelle se déterminent exactement comme ceux d'une manivelle ordinaire. Comme le moment de la pression sur le tourillon de la contre-manivelle a, en général, une faible importance, le bras de la manivelle peut rester tel que nous l'avons déterminé précédemment. Mais, il n'en est pas de même du tourillon correspondant, qui doit être calculé spécialement, en tenant compte des efforts simultanés de

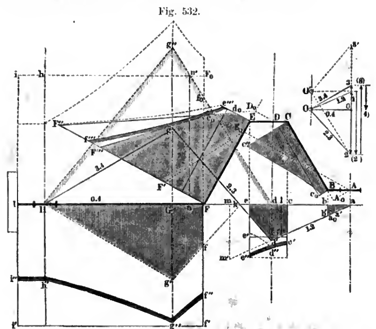
torsion et de flexion, auxquels il se trouve soumis dans ce cas. On doit alors recourir à l'emploi de la formule (221) en remarquant que, la contre-manivelle se trouvant conduite par la manivelle, le moment de cette contre-manivelle atteint son maximum pour le milieu du tourillon principal.

§ 229.

Calcul graphostatique de la contre-manivelle.

La fig. 532 représente le diagramme, fourni par la graphostatique, pour une contre-manivelle, dont les deux bras sont obliques par rapport à l'axe de la manivelle principale.

Fig. 532.



Dans cette figure, on a tracé d'abord la ligne des axes $ABCDEFGHI$, en prenant, aussi exactement que possible, les longueurs AB, CE et FG, d'après les longueurs des tourillons correspondants. La pression 1, qui s'exerce sur le tourillon de la contre-manivelle, est supposée dirigée en sens contraire de la pression 2 sur le tourillon principal.

Polygone des forces. Dans le polygone des forces, tracé à droite de la figure, la pression 1 sur le tourillon de la contre-manivelle est supposée dirigée de bas en haut et correspond à la ligne 0 1; le pôle O est choisi sur une horizontale, passant par le point 0; la pression 2, sur le tourillon principal, est dirigée vers le bas et représentée par la ligne 1 2. Traçons les rayons polaires $0\,O$, $1\,O$, $2\,O$, puis, dans l'autre figure, menons la ligne $a\,d'$ parallèle à $1\,O$ jusqu'à son intersection d' avec la direction de la force 2, qui passe par le point D; menons également $d'g$ parallèle à $2\,O$, jusqu'à son intersection g avec la direction de la force 3, dont la grandeur n'est pas encore connue, mais qui passe par le point G et qui agit de bas en haut.

Pour trouver cette force, ainsi que celle qui agit en H, joignons les points g et H, Ha sera la ligne de fermeture, qui doit bien être horizontale, puisque, dans le polygone des forces, la ligne de fermeture $O\,0$ a été prise elle-même horizontale. Si, dans ce dernier polygone, nous menons $O\,3$ parallèle à Hg, la ligne 2 3 représentera la troisième force, agissant en G, de bas en haut, et la ligne 3 0 la quatrième force, appliquée en G et dirigée vers le bas.

La figure $a\,d'k\,g\,H$ représente, comme on le voit, le polygone funiculaire pour le système qu'il s'agit de construire. Au point k correspond un moment nul (v. § 90). Dans notre tracé, pour plus de commodité, le triangle $k\,g\,H$ a été reporté dans la position $k\,g'\,H$. Le polygone funiculaire, que nous venons de trouver, peut être utilisé, comme surface des moments, pour une partie de la construction, ainsi que nous allons le voir.

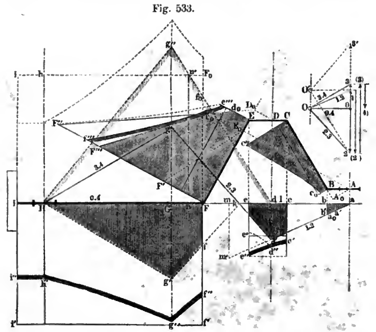
Fuseau AB. La détermination des dimensions de ce fuseau s'effectue facilement au moyen des ordonnées verticales du triangle $a\,b'\,b$, lorsqu'on a préalablement calculé le tourillon en A pour la pression 1.

Pièce de tourillon CDE. Cette pièce est soumise à des efforts de flexion, dont les moments sont représentés par la surface $c\,d'\,e$, et à des efforts de torsion, dus à la force 1, dont le bras de levier $r = Cc - Bb$. Pour déterminer le moment de torsion, prenons $a\,l = r$ et menons l'ordonnée $l\,l'$; cette ligne est le moment de torsion; la surface correspondante pour EDC est donc le rectangle, construit sur $l\,l'$ et $c\,e$, qui, composé avec le trapèze $c\,d'\,e$, donne la surface des moments $e\,c'\,d''\,c'\,e$. Comme il peut arriver que la pression sur le tourillon de la contre-

manivelle agisse seule, auquel cas le côté ad' doit être prolongé jusqu'en m', nous partirons de ce dernier polygone de flexion et nous obtiendrons alors, comme courbe limite de la surface des moments résultante, la courbe $c'd''c''$, dont les ordonnées permettent de déterminer les dimensions de CDE. Ainsi que nous l'avons dit dans un paragraphe précédent, la plus petite longueur l, qu'on puisse admettre pour ce tourillon, est celle du tourillon normal d'extrémité, correspondant à la pression 2.

Arbre FGHI. Cet arbre est soumis à des efforts de flexion, représentés par le polygone $Ffg'H$, et an moment de torsion de la force 3, diminué de celui de la force 1. Pour déterminer le moment de torsion de la force 3, prenons, dans le polygone des forces, un second pôle O', situé sur une horizontale, menée par l'origine de la force 2, et sur la même verticale que l'autre pôle O; joignons $2O'$, menons dg'' parallèle à cette ligne et prenons $dn = Cc = R$; l'ordonnée nn' représentera le moment de torsion

Fig. 533.



cherché. Si maintenant nous prenons l'ordonnée en a', correspondant à une abscise égale à $Aa = R - r$, cette ordonnée

donnera le moment de torsion de la force 1 sur le bras, lequel agit en sens contraire du précédent. En retranchant cette dernière ordonnée de nn', on obtient la ligne Ff', comme hauteur du rectangle de torsion $FIi'f'$, qu'il suffit de composer, comme à l'ordinaire, avec les moments de flexion, pour obtenir la surface des moments résultante $Ff''g''h''i''I$. Il peut arriver que la force 1 soit nulle, c'est, par exemple, ce qui a sensiblement lieu dans les machines à vapeur, où le tourillon de la contre-manivelle ne conduit que le tiroir; dans ce cas, on doit construire la surface des moments de flexion $Ff_0g''H$, celle des moments de torsion FF_0iI et examiner si la surface résultante a des ordonnées plus grandes que la surface précédente, auquel cas ce sont celles-là qui devraient être utilisées pour la détermination des dimensions. C'est le cas qui se présenterait avec les données de notre figure, où ce second polygone résultant se trouve figuré en pointillé, sans lettres, au-dessus de la ligne FI. En supposant que les forces en I se réduisent à un couple, la pièce HI n'est soumise qu'à la torsion et, par suite, le polygone résultant se réduit à un rectangle.

Bras BC de la contre-manivelle. Ce bras éprouve des efforts de torsion et de flexion, dûs à la force 1, qui agit, dans le premier cas, avec le bras de levier AA_0, perpendiculaire à CB prolongé (le moment de torsion est égal à l'ordonnée en a_0) et, dans le second, avec le bras de levier A_0C (le polygone funiculaire est un triangle, dont CA_0 est l'un des côtés et dont l'angle en A_0 est égal à baa_0). La composition de ces deux espèces de moments donne CBc_0c'' pour la surface des moments (v. fig. 535).

Bras principal EF. La force 2 exerce, en avant, sur ce bras, des efforts fléchissants, dont les moments sont représentés par les ordonnées de la surface D_0FF''' (l'angle en D_0 est égal à l'angle edg''), et une torsion, dont le bras de levier est DD_0, perpendiculaire à FE prolongé; ce même bras est soumis, en outre, à l'action de la force 1, qui produit, en arrière, des moments fléchissants, représentés par la surface E_0FF', et un moment de torsion, dont le bras de levier est AE_0, normal à EF. Les moments de flexion, retranchés les uns des autres, fournissent la surface $Ed_0c_0F'''F$, tandis que les moments de torsion donnent, comme différence, le rectangle construit sur EF; la composition de ces deux surfaces fournit définitivement $Ec'''f'''F$ comme

surface des moments. Dans le cas où la force 1 devient nulle, on n'a plus à faire les différences des surfaces de moments de même espèce et on obtient le polygone funiculaire, tracé en pointillé, dont les ordonnées supérieures à celles de la surface précédente sont, par conséquent, celles qu'il convient d'utiliser pour la détermination des dimensions.

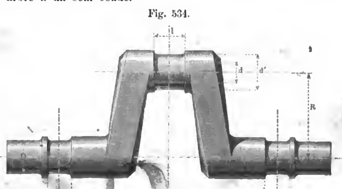
Après quelques exercices, on arrive à exécuter rapidement les opérations que nous venons de décrire, surtout si l'on a soin de se borner à la recherche des parties importantes, pour lesquelles l'exemple précédent donne déjà, d'une manière générale, les renseignements nécessaires. L'emploi du diagramme, pour déterminer les sections des pièces et la transformation de ces sections, ne peut présenter aucune difficulté, après les indications du § 226. Lorsque le bras principal et celui de la contre-manivelle ont une direction perpendiculaire à l'arbre, le problème se trouve notablement simplifié, ainsi que le montre le paragraphe suivant.

§ 230.

Arbre à un seul coude.

Les arbres coudés se divisent en deux catégories, suivant qu'ils présentent un ou plusieurs coudes. La fig. 534 représente un arbre à un seul coude.

Fig. 534.

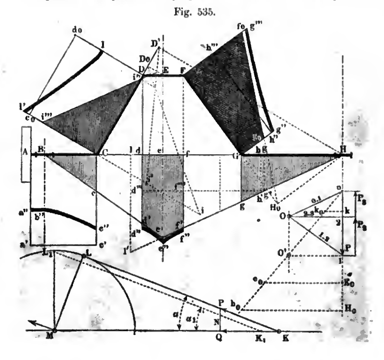


La détermination des dimensions d'un arbre de cette nature ne peut se faire, avec quelque exactitude, par la méthode analytique, qu'en entraînant de grandes complications, tandis que la graphostatique permet d'arriver à la solution du problème, d'une

manière à la fois très-simple et très-exacte; aussi, emploierons nous uniquement cette dernière méthode. La fig. 535 donne le tracé des lignes d'axes $ABCDEFGH$ d'un arbre coudé à bras inclinés, dont il s'agit de déterminer les dimensions.

L'effort P, qui agit sur le tourillon de la partie coudée, a pour expression $\frac{Q}{\cos\alpha}$, en désignant par Q la pression exercée par le piston dans la direction KM, et par α l'angle de la direction KL de la bielle avec KM. Pour une valeur constante de Q, cet effort atteint sensiblement son maximum, lorsque KL est perpendiculaire au rayon LM. Comme ce maximum diffère d'ailleurs très-peu de la valeur $\frac{Q}{\cos\alpha_1}$ correspondant à la position vertical ML_1 de la manivelle, nous pouvons, sans inconvénient, adopter cette dernière position pour la détermination graphique de P. L'effort en M est parallèle et égal à P; en K s'exerce une pression normale, $N = Q\,tg\,\alpha$, dont le maximum correspond à la position $K_1 L_1 M$. Il résulte de là que les

Fig. 535.



moments de flexion du bras de la manivelle et de l'arbre peuvent être considérés comme atteignant leur maximum au même moment et comme produits par une même pression P.

Dans notre figure, E est le milieu du tourillon de la partie coudée, B et H deux paliers; nous supposons, de plus, qu'en A soit appliqué un couple, capable de s'opposer à la torsion produite par la force P, agissant avec le bras de levier R. On voit, d'après cela, que le problème actuel présente la plus grande analogie avec celui que nous avons traité dans le paragraphe précédent. La partie HG remplace ici le fuseau du tourillon de la contre-manivelle, avec cette différence toutefois que la force en H, au lieu d'être une variable indépendante, dépend de la pression P en E.

Polygone des forces. Pour que la ligne de fermeture du polygone funiculaire soit horizontale, on commence par joindre les points B et H à un point quelconque e' de la normale Ee prolongée. Cela fait, à partir du point 0, on porte la force P, on mène $0O$ et $1O$, respectivement parallèles à He' et Be', puis $O2$ perpendiculaire à P; la longueur 1 à 2 représente alors la force P_2, qui agit en B, de bas en haut, et la ligne 20 la force P_3; agissant en H, également vers le haut; $O2$ est la distance polaire.

Fuseau HG de l'arbre. Ce bras n'est soumis qu'à une flexion produite par la force P_3 appliquée en H. Le triangle HGg est la surface des moments, dont les ordonnées servent à déterminer les dimensions de la pièce, lorsqu'on a calculé le tourillon en H.

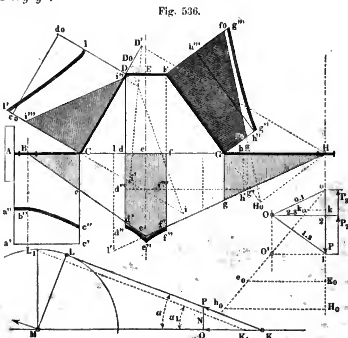
Fuseau BC de l'arbre. La surface des moments de flexion est le triangle BCc. Pour tenir compte, en outre, de la torsion due au moment PR, menons, dans le polygone des forces, $O'1$ normale à P et égale à $O2$, puis E_0e_0 parallèle à $O2$ et égale à $Ee = R$; $0E_0$ est alors le moment cherché, qui donne le rectangle $Aa'Cc'$; en composant, à la manière ordinaire, ce rectangle avec le triangle de flexion, on obtient la surface des moments résultante $ABCc''b''a''$.

Tourillon DEF. La surface des moments de flexion est $dff'e'd'$. Pour obtenir celle qui correspond à la torsion produite par la force P_3, agissant en H, avec le bras de levier $Ee = R$, prenons $Hg = Ee = R$; l'ordonnée gg' représente le moment de torsion. En composant le rectangle de torsion $dff'''d'''$ avec

la surface de flexion, on obtient $d f f'' e'' d''$ pour la surface des moments. L'ordonnée maximum $e e''$ est la seule qu'on ait à utiliser, puisque le tourillon doit être cylindrique.

Bras coudé GF. Ce bras éprouve un mouvement de flexion, dû à la force P_3, agissant en H_0, $H H_0$ étant normal à FG; la surface de moments correspondante est $F G g_0 f_0$, où l'angle $g_0 H_0 G$ est égal à l'angle $g' H g$. La force P_3, agissant avec le bras de levier $H H_0$, tend, en outre, à produire une torsion, dont le moment $h h'$ s'obtient en prenant $H h = H H_0$; cette ordonnée, reportée en $F h'''$ et $G h''$, donne le rectangle de torsion $F h''' G h'''$; par la composition de cette surface avec la précédente, on obtient définitivement la surface des moments $F G g'' g'''$.

Fig. 536.



Bras coudé CD. On mène $E D_0$ et $H D'$ perpendiculaires à CD. Pour la position KLM de la bielle et de la manivelle, fig. 536, la force P, appliquée en D_0, tend à produire une flexion en avant, tandis que la force P_3, appliquée en D', tend, au contraire, à produire une flexion en arrière. Les polygones funiculaires cor-

respondants sont les triangles $D_0 Ci$ et $D' Ci'$ ($Ci = 0 H_0$ dans le polygone des forces et $H_0 h_0 = CD_0$). La différence de ces deux surfaces donne $Ci'' i'''$ pour la flexion du bras DC. De plus, ce bras se trouve soumis à deux torsions, l'une en avant, l'autre en arrière; la première est due à la force P, agissant avec le bras $ED_0 = kk_0$, dans le polygone des forces, et son moment est, par suite, $0k$; la seconde, produite par la force P_3, avec le bras de levier $HD' = Hl$, dans le polygone funiculaire, a pour moment ll'. La différence de ces deux derniers moments, portée suivant Cc_0 et Dd_0, donne le rectangle de torsion $Dd_0 Cc_0$. Enfin la composition de ce rectangle avec le triangle de flexion fournit la surface des moments $CDI'I$, qui complète la série des surfaces propres à déterminer les dimensions des cinq parties principales de l'arbre coudé.

Le tracé précédent montre très-nettement les efforts auxquels l'arbre se trouve soumis en ses différents points et permet, par suite, de comprendre facilement, dans la plupart des cas, les faits de rupture, signalés pour certaines pièces de ce genre.

Lorsque les deux axes des bras du coude sont perpendiculaires à l'axe de l'arbre, la recherche des surfaces des moments se trouve notablement simplifiée.

Dans ce cas, fig. 537, $ABCDEFGH$ représentant la série des axes des pièces de l'arbre, nous supposerons, comme précédemment, qu'en A soit appliqué un couple, dont le moment soit égal et de sens contraire au moment de torsion PR.

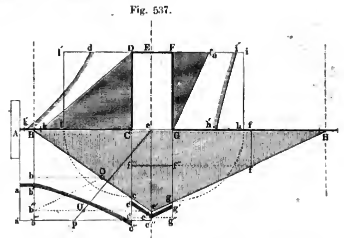
Polygone des forces. Nous prendrons ici, pour mesure de la force P, la hauteur ee' du triangle $Be'H$, tracé comme précédemment. Si on fait $Bb'' = ee'$, qu'on mène $b''O$ parallèle à $e'H$ et Ob perpendiculaire à Bb'', $b''b$ et bB représenteront respectivement les efforts P_3 et P_2, en H et en B, Ob étant la distance polaire.

Fuseau HG. Cette partie n'est soumise qu'à des moments de flexion dont la surface est HGg.

Fuseau ABC. Cette pièce, soumise à des efforts de flexion, dont les moments sont représentés par la surface BCc, est en même temps sollicitée à la torsion par le moment PR. Si on trace $e'O'$ parallèle et égale à la distance polaire bO, $e'''p$ parallèle à cette même ligne et égale à $Ee = R$, ee''' est le moment de torsion, auquel correspond le rectangle de torsion ayant, pour base, AC et, pour hauteur, $Aa' = Bb''' = ee'''$. La

composition des moments de flexion et de torsion donne la surface des moments $ABCc'''b'a$.

Fig. 537.



Tourillon DEF. Soumis à des moments de flexion, dont la surface est $CGgc'c$, et sollicité à la torsion par la force P_3, agissant en H, avec un bras de levier $R = CD = Hf$; ce qui donne, pour le moment de torsion, $ff' = Gf'' = Cf'''$. La surface des moments résultante est $CQg'e''c'$, qui, pour un tourillon cylindrique, peut être remplacée par le rectangle de hauteur $Gg'' = Cc'' = ec''$.

Bras FG. Sollicité à la flexion par la force P_3, appliquée en G; surface des moments correspondante GFf_0, dont l'angle aigu G est égal à fHf'; la même force, agissant avec le bras de levier HG, tend à produire une torsion, dont le moment est $Gg = Gh = Fi$. La surface des moments résultante est $FGh'i'$.

Bras CD. Sollicité à la flexion par la force P, qui, pour le point C, donne le moment déjà trouvé $ec'' = Ck$, et à la torsion, dont le moment est $Cc = Cl = Dl'$. Surface des moments résultante $CDdk'$.

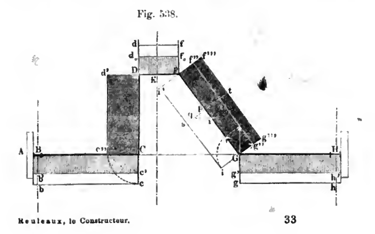
Pour la même position de E par rapport à B et H, le moment de torsion, qui agit sur le bras CD, a ici une valeur plus considérable que dans le cas où les bras sont inclinés sur l'axe de l'arbre et, par suite, il est nécessaire de donner aux bras droits des dimensions plus fortes. Comme, d'ailleurs, la torsion

de ces bras est d'autant plus faible que les points C et G sont plus rapprochés, il en résulte qu'au point de vue de l'économie de matière, il y a avantage à réduire le plus possible la distance de ces deux points. A ce même point de vue, l'emploi des bras obliques se recommande encore par ce fait que la longueur totale FGH, ou DCB, est nécessairement plus faible qu'avec les bras à angle droit.

Il arrive fréquemment qu'un arbre à coude unique doit être construit de telle manière que la torsion puisse s'exercer, tantôt à une extrêmité, tantôt à l'autre. Il convient alors de tracer les surfaces des moments pour les deux cas, de les superposer et de prendre, pour chaque point, la plus grande des deux ordonnées qui lui correspondent. Il est bien évident qu'on doit adopter, dans les deux tracés, la même unité de mesure et la même distance polaire pour le polygone des forces. On rencontre des exemples de cas de ce genre dans les pièces intermédiaires des arbres coudés des machines de navires à roues (avec cylindres à vapeur oscillants), établies d'après la disposition de Penn et dans lesquelles le coude de la pièce intermédiaire commande les pompes à air. Toutefois, dans ce cas, le genre d'action est un peu différent de celui que nous avons admis dans le tracé précédent et il est préférable de recourir à un tracé spécial, comme nous allons le faire.

Soit $ABCDEFGH$, fig. 538, la série des axes de l'arbre coudé. Supposons qu'abstraction faite des forces appliquées en E, on ait introduit un couple, dont le moment soit représenté

Fig. 538.



par $Bb = Cc = Gg = Hh$. Les effets dus à ce couple seront les suivants.

Fuseau ABC. Simple torsion, dont le moment, transformé en moment de flexion (v. IV, § 16, pour $M_f = 0$), doit être porté suivant $Bb' = Cc' = {}^5/_8\,Bb$.

Fuseau GH. Même effet que pour ABC; la surface des moments a pour hauteur $Hh' = Gg' = Cc'$.

Tourillon DEF. Ici encore le couple donne lieu au même moment de torsion que pour les deux fuseaux et on a $Dd_0 = Ff_0 = Bb'$.

Bras coudé CD. Le couple produit, en chaque point de ce bras, une flexion, dont le moment a pour valeur $Cc'' = Dd' = Cc$; le plan de flexion est perpendiculaire au plan de la figure. La surface des moments est un rectangle de hauteur $Bb = Cc$.

Bras coudé FG. Flexion et torsion simultanées. Décomposons le couple, comme on l'a indiqué au point G, en deux autres, l'un normal à l'axe du bras, l'autre suivant l'axe de ce bras. Au premier correspond le rectangle de torsion $GFf''g''$ et au second le rectangle de flexion $FGii'$. Si on prend $pq = {}^5/_8\,Gi$, $pr = {}^5/_8\,Gg''$, $tp = Gg'' = qs + qr$, on obtient le rectangle $FGg''f''$, qui représente la surface des moments résultante des deux premières.

Le tracé que nous venons de faire ne tient aucun compte des forces qui peuvent être appliquées au point E. Dans le cas où il en existe, on commence par déterminer séparément tous les moments de flexion et de torsion, correspondant aux forces et aux couples; cela fait, pour chaque partie de l'arbre, on ajoute ou on retranche, suivant leurs directions, les différents moments de torsion qui lui correspondent et on opère de même pour les moments fléchissants, en ayant soin d'ailleurs de tenir compte de la position des plans de flexion (v. § 44); enfin la composition des moments de torsion et de flexion, ainsi obtenus, fournit, pour chaque pièce, la surface des moments résultante.

Le travail qu'entrainent, pour le bureau de dessins d'une usine de construction, les tracés du genre de ceux que nous venons d'indiquer est, en réalité, d'une bien faible importance, eu égard aux nombreux services qu'ils peuvent rendre; en particulier, ils offrent, pour le constructeur, le grand avantage de le fixer exactement à l'avance sur les efforts, auxquels se trouveront

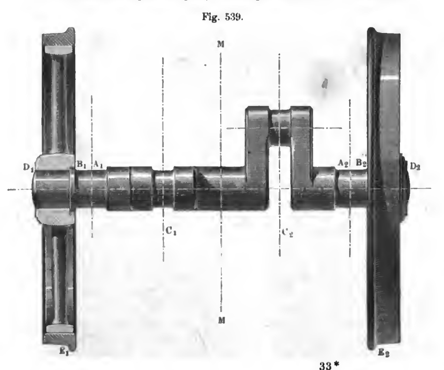
soumis les divers éléments de pièces en fer forgé, d'une exécution difficile, comme celle des arbres coudés.

§ 231.

Arbres à coudes multiples. Arbres de locomotives.

Parmi les arbres en fer forgé ou en acier, à coudes multiples, les arbres coudés des locomotives présentent une importance toute spéciale. Par suite de la complexité des différents genres d'efforts auxquels ces pièces se trouvent soumises, il est à peu près impossible au praticien de les soumettre au calcul. La méthode graphostatique, au contraire, ainsi que nous allons le montrer, permet d'arriver à des résultats très-nets et offrant d'ailleurs toute sécurité, à la seule condition d'être appliquée par un dessinateur, qui se soit suffisamment exercé sur les tracés de constructions plus simples, donnés précédemment. Nous choi-

Fig. 539.



sirons ici, comme exemple d'application, un arbre de locomotive avec cylindres intérieurs, tel que celui représenté par la fig. 539.

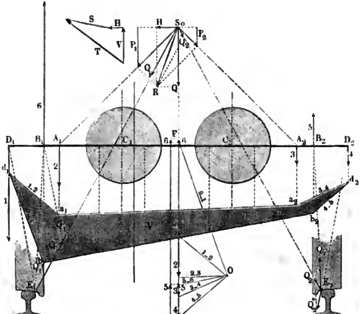
Comme la grandeur des roues intervient dans le tracé du plan des moments, nous les avons reproduites avec l'arbre. C_1, C_2 sont des plans verticaux, passant par les axes des cylindres, A_1 et A_2 les milieux des supports des tourillons, $B_1 D_1$ et $B_2 D_2$ les portées des moyeux des roues; les plans des axes des coudes, en C_1 et C_2, sont perpendiculaires l'un à l'autre. Cela posé, dans la position indiquée sur la figure, l'arbre se trouve soumis à trois genres d'efforts: 1° les pressions, contenues dans un plan vertical, qui sont dues au poids de la locomotive et à l'action latérale des rails sur les rebords des roues; 2° les actions horizontales, qui comprennent la pression du piston sur la manivelle C_2 et la résistance des rails (l'adhérence); 3° la pression, dirigée obliquement, de la bielle sur la manivelle C_1. Nous négligerons les autres actions accessoires, telles, par exemple, que celles dues aux tiges d'excentriques de la distribution et nous considérerons successivement les trois genres d'efforts que nous venons d'indiquer.

Forces et moments dans le plan vertical. Fig. 540. A la hauteur du centre de gravité de la locomotive est appliquée, en S_0, la partie Q du poids de cette locomotive, qui correspond à l'arbre coudé. Par suite des mouvements de lacet et de l'action de la force centrifuge dans les courbes, il se développe une force horizontale H, qui peut être évaluée à $^2/_5\, Q$. La résultante R des forces Q et H représente alors la charge de l'arbre, que nous pouvons décomposer en pressions P_1 et P_2 sur les tourillons, en A_1 et A_2, et en pressions Q_1 et Q_2 sur les têtes des rails E_1 et E_2. Les deux forces Q_1 et Q_2 se décomposent elles-mêmes chacune en deux autres sur les portées des moyeux. Si, de toutes les forces ainsi obtenues, nous ne considérons que les composantes normales à l'axe de l'arbre, nous arrivons définitivement à six actions verticales, tendant à produire la flexion de l'arbre; les unes 1, 2, 3, 4, appliquées en D_1, A_1, A_2 et D_2, sont dirigées vers le bas, tandis que les deux autres 5 et 6, en B_2 et B_1, sont dirigées vers le haut. Si maintenant nous choisissons un pôle O (à une distance arbitraire de F, mais qui doit rester la même pour tous les tracés suivants), nous formerons le polygone des forces $F{\cdot}4{\cdot}O$, puis le polygone funiculaire ou la surface des moments $d_1 a_1 a_2 d_2 b_2 b_1$, qui, pour chaque point de l'arbre, situé

dans le plan vertical (ici le plan de la figure) donne, par l'ordonnée correspondante, le moment fléchissant; la surface totale se trouve désignée par V.



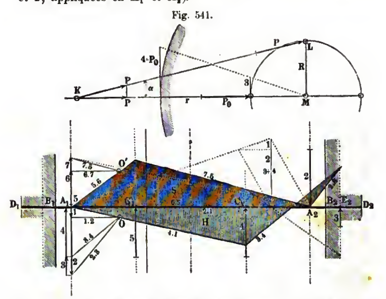
Fig. 540.



Forces et moments dans le plan horizontal. Fig. 541. Ainsi que nous l'avons expliqué dans le paragraphe précédent, la pression P sur le tourillon, pour la position LM de la manivelle, est légèrement supérieure à la pression P_0 du piston; mais, au point de vue de la rotation de l'axe, son moment $\left(\frac{P_0}{\cos\alpha} \cdot R\cos\alpha\right)$ se réduit précisément à $P_0 R$, de telle sorte que la roue à gauche étant supposée glisser sur le rail, l'autre roue se trouve maintenue sur le second rail par un effort correspondant au moment $P_0 R$, c'est-à-dire que la résistance au glissement 3, en E_2, est égale à $\frac{R}{r} P_0$. Au moyen de cette dernière force et des résistances 1 et 2 sur les tourillons, il est facile de construire d'abord le polygone des forces $A_1 2 0$, puis le polygone funiculaire H (en hachures claires), qui représente les moments

correspondant aux forces horizontales. (Les forces 1 et 2 ont été obtenues en déterminant d'abord la position de la résultante des forces 3 et 4, parallèles et dirigées dans le même sens, puis en décomposant cette résultante 3 + 4 en deux composantes, 1 et 2, appliquées en A_1 et A_2).

Fig. 541.

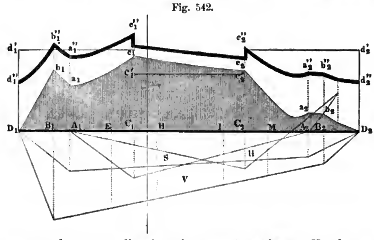


Forces et moments dans le plan incliné des bielles. Au point C_1 est appliquée la force $Q = 5$, dont l'inclinaison sur l'horizontale est donnée par l'angle $MKL = \alpha$. Si nous décomposons cette force, comme l'indique la figure, en deux autres 6 et 7, appliquées en A_1 et A_2, nous pourrons former le polygone des forces, avec la distance polaire adoptée précédemment, puis le polygone funiculaire S (en hachures noires), qui peut être utilisé comme surface des moments, pour les flexions, dans le plan incliné des bielles.

Composition des trois polygones funiculaires correspondant à la flexion de l'arbre. Fig. 542. Comme les trois genres d'efforts, qui tendent à produire la flexion, agissent simultanément sur l'arbre, nous devons chercher à les composer. Dans ce cas, nous pouvons, conformément à une remarque du § 44, opérer directement avec les ordonnées, représentatives des moments, comme avec les forces elles-mêmes. Nous formerons donc, pour une

série de points de l'arbre très-rapprochés, les polygones d'ordonnées correspondantes, en ayant bien soin de tenir compte des directions; la ligne, fermant chacun de ces polygones, fournira,

Fig. 542.

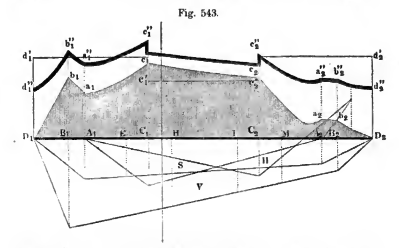


en grandeur et en direction, le moment résultant. Un de ces polygones d'ordonnées, représenté dans la fig. 540, à gauche et à la partie supérieure, correspond au point C_1. L'ordonnée verticale V est dirigée de bas en haut, l'ordonnée horizontale H, qui vient ensuite, est portée de droite à gauche, ainsi que l'ordonnée inclinée S; par conséquent, la résultante T, qui correspond à une ordonnée dirigée en sens contraire, s'obtient en joignant le point de départ de V avec l'extrémité de S. En répétant la même opération, sur toute la longueur de l'arbre, on arrive à la surface des moments $D_2\,D_1\,b_1\,a_1\,c_1\,c_2\,a_2\,b_2$, qui donne les flexions de toutes les parties de cet arbre (à l'exception de celles des bras coudés).

Moments de torsion pour l'arbre. Pour la position des manivelles, que nous avons prise comme point de départ, une seule de ces manivelles tend à produire sur l'arbre une torsion, dont le moment est PR. Mais, si les manivelles se trouvent inclinées, toutes les deux, de 45° sur l'horizontale, le moment de torsion pour les fuseaux d'extrémités, $C_1\,D_1$ et $C_2\,D_2$, devient sensiblement égal à $\sqrt{2}\,PR$, ou 1,4 PR. Bien que, pour cette position de manivelles, les moments de flexion soient légèrement différents de ceux que donne le dernier diagramme, c'est cette valeur

du moment de torsion que nous introduirons dans le tracé, en faisant $D_1 d'_1 = D_2 d'_2 = 1{,}4\ PR$, tandis que, pour le corps de

Fig. 543.



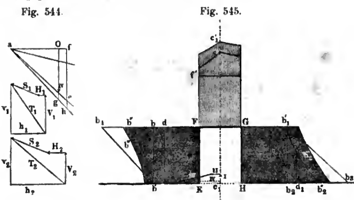
l'arbre $C_1 C_2$, nous prendrons simplement $C_1 c'_1 = C_2 c'_2 = PR$, toutes ces quantités étant rapportées, bien entendu, à l'échelle déterminée par l'unité de mesure des forces et celle de la distance polaire dans les polygones précédents.

Composition des moments de flexion et de torsion. Les moments de flexion et de torsion, composés d'après la formule du § 45, donnent la surface des moments $D_2 D_1 d''_1 b''_1 \ldots d''_2$, qui permet de déterminer les dimensions à donner aux deux fuseaux $C_1 D_1$ et $C_2 D_2$, ainsi qu'au corps de l'arbre $C_1 C_2$, à la seule condition de chercher préalablement le diamètre en un point, correspondant à l'un quelconque des moments, à l'ordonnée $B_1 b''_1$, par exemple. Comme, d'ailleurs, le diagramme n'est pas symétrique par rapport au milieu de l'arbre, il convient d'adopter pour les deux moitiés de cet arbre, la moitié du diagramme, qui présente les ordonnées les plus grandes.

Tourillon de manivelle en C_1. Les deux manivelles ont été reportées séparément dans les fig. 545 et 546, afin de permettre de représenter plus commodément les moments correspondants. Le tourillon FG, en C_1, est soumis d'abord aux flexions, dont les moments, fournis par le tracé de la fig. 543, forment ici la surface FGc_1, fig. 545. Pour déterminer les efforts de torsion, il convient de prendre toutes les forces appliquées

à gauche du point E; nous allons commencer par chercher leur résultante. Les forces 1, 2 et 6 de la fig. 540 agissent verticalement; leur somme algébrique fournit la force verticale I. La force horizontale 1 de la fig. 541 est dirigée d'avant en arrière; elle porte, sur notre figure, le n° II. La force oblique 6 de la fig. 541 est également dirigée en arrière, vers le bas; elle porte le n° III. La ligne (non représentée), allant du point C à l'extrémité de III, donnerait la résultante totale, dont la composante horizontale IV, agissant avec le bras de levier $EF = R$, produit la torsion du tourillon. Dans la fig. 544, prenons une longueur aO, égale à la distance polaire, portons IV à partir de O, vers le bas, menons la ligne $a\,IV\,e$ et faisons $af = R$; le segment fe de la perpendiculaire à af représente le moment de torsion, qui est reporté sur la fig. 545 en Ff'. Le rectangle de torsion correspondant, composé avec la surface FGc_1, donne FGc'_1 pour la surface des moments.

Fig. 544. Fig. 545.

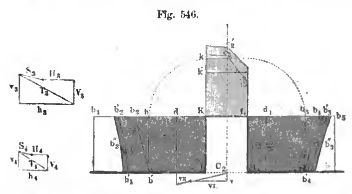


Bras de manivelle EF. Le polygone des ordonnées pour le point E est représenté par la fig. 544, en $V_1\,H_1\,S_1\,T_1$. La composante horizontale h_1 du moment résultant T_1 produit, sur le bras EF, une torsion, dont le moment est représenté sur la fig. 545 par $Fd = h_1$; la composante verticale v_1 correspond à une flexion du bras, dans le plan de la figure, $Fb = v_1$; en outre, la force IV, appliquée en E, produit sur ce bras, normalement à ce plan, une flexion, dont le moment en F est représenté par bb_1. La composition des moments fléchissants fournit la surface $EFb'b''$, qui, composée elle-même avec le rectangle de torsion EFd, donne définitivement la surface des moments résultante EFb'''.

Bras de manivelle GH. Pour le point H, le polygone des ordonnées est $V_2 H_2 S_2 T_2$. La torsion du bras GH correspond à la composante horizontale h_2; son moment se trouve représenté par $Hd_1 = h_2$; la composante verticale v_2 donne une flexion, dans le plan de la figure, $Gb'_1 = V_2$; le bras est soumis, en outre, à une seconde flexion, normale à ce plan, due à la force P, agissant sur GF et dont le moment est $PR = fh$ (en prenant, dans la fig. 544, $Og = P$, $af = R$); le moment se trouve reporté en $b_2 b_3 = fh$. La résultante des moments fléchissants est $GHb'_1 b''_2$, qui, composée avec le rectangle de torsion GHd_1, donne pour la surface des moments GHb'''_2.

Tourillon KL. Fig. 546. Ce tourillon est d'abord soumis aux moments fléchissants, compris entre M et J; à ce genre d'action correspond la surface des moments KLc_2, fournie par la fig. 543. Toutes les forces, qui agissent à droite de C_2, tendent à produire la torsion de ce même tourillon. La résultante des forces 3, 4 et 5, fig. 540, agit verticalement de haut en bas et se trouve représentée ici par V; de même la résultante (ou la différence) de 2 et 3 (fig. 541), qui est horizontale et dirigée d'avant en arrière, est figurée en VI; enfin on a reporté en VII la force 7 de la fig. 541, qui est également dirigée en arrière, obliquement au plan de la figure. La composante verticale de la ligne qui ferme le polygone des forces V, VI et VII tend à produire une torsion du tourillon, puisque, d'après ce que nous avons supposé, le bras de manivelle JK est dans la position

Fig. 546.



horizontale. Le moment de cette composante verticale a pour grandeur kk'. Le tourillon est, en outre, sollicité à la torsion

par le couple qu'introduit ici le coude de gauche (v. le texte correspondant à la fig. 538); le moment de ce couple, qui est donné en $C_1c'_1$, sur la fig. 543, se trouve représenté ici par Kk; comme il agit en sens contraire du moment kk', précédemment trouvé, il en résulte que le moment de torsion du tourillon KL se trouve finalement représenté par Kk', qui, combiné en chaque point avec le moment de flexion, donne pour surface des moments résultante KLc'_2.

Bras de manivelle JK. Ce bras est sollicité à la torsion par le moment Kd de la composante verticale v_3 du polygone des ordonnées $V_3H_3S_3T_3$; il est également soumis, dans le plan vertical, à une flexion, dont le moment est $Kb = Kk$, conformément à ce qui a été dit précédemment pour la fig. 538; de plus, il est soumis, dans le même plan, à une flexion, due à la composante verticale des forces V, VI et VII et dont le moment, au point K, a pour valeur bb_2 (voir pour la détermination de ce moment le tracé supérieur de la figure 544); enfin il éprouve, dans le plan horizontal, une troisième flexion, dont le moment est bb_1 et qui correspond à la composante horizontale h_3 du polygone des ordonnées. La composition de tous ces moments fléchissants fournit la surface $JKb'_1b'_2$, qui, combinée elle-même avec le rectangle de torsion KdJ, donne JKb''_2 pour la surface des moments résultante.

Bras de manivelle LM. Le moment de torsion Ld_1 est égal à la composante verticale v_4 du polygone des ordonnées pour la position M. Des deux flexions, dans le plan vertical, l'une a un moment constant $Lb_3 = Kk$, l'autre un moment variable, dont la valeur est b_3b_4 pour le point L; le troisième moment fléchissant b_3b_5 est égal à la composante horizontale h_4 du polygone des ordonnées. La résultante de tous ces moments fléchissants est la surface MLb'_3, qui, composée avec le rectangle de torsion Ld_1, donne définitivement MLb''_3 pour la surface des moments.

Des quatre bras de manivelle, JK et GH sont ceux dont les surfaces de moments sont les plus considérables. Il convient donc de superposer ces deux surfaces (JKb''_2 et GHb'''_2) et d'utiliser celle dont les ordonnées sont les plus grandes. On applique alors aux quatre bras les dimensions correspondantes, en leur faisant subir quelques simplifications, si on le juge convenable.

Le tracé du plan des moments, pour un arbre doublement coudé, est, comme on le voit, assez laborieux et il exige qu'on traite les différentes questions qui s'y rapportent avec la plus sérieuse attention. Les résultats, fournis par ce tracé, ont d'ailleurs une très-grande importance, puisqu'ils permettent, en définitive, d'adopter sans danger, pour les différentes parties de l'arbre, une tension allant jusqu'aux deux tiers de la charge limite d'élasticité, c'est-à-dire 10^k pour le fer et 15 à 16 pour l'acier, ainsi que nous l'avons constaté en appliquant notre diagramme à l'examen de pièces de ce genre d'une bonne construction.

Pour exécuter un tracé de cette nature sur une planche à dessiner, il est très-important de ne pas prendre une échelle trop petite; on doit éviter, toutefois, de la prendre trop grande, afin que le tracé des lignes parallèles ne devienne pas trop difficile. L'échelle la plus convenable est celle qui donne, pour le tracé de l'arbre entier, une longueur de 300 à 400^{mm}. De plus, on doit, autant que possible, pour les polygones de forces, déterminer la distance polaire, en se guidant sur des tracés antérieurs du même genre; une distance polaire trop petite donne un diagramme d'une trop grande hauteur, tandis qu'il se trouve trop écrasé avec une distance trop grande: les distances que nous avons adoptées, dans les figures précédentes, ont l'avantage de donner des diagrammes bien visibles. On peut se borner à un simple tracé au crayon fin, à la condition de différencier les surfaces des diagrammes par des teintes légères et foncées. Pour le dernier diagramme, qui représente la surface des moments résultante, le mieux est de l'indiquer par une simple bordure d'une teinte vigoureuse, en rouge foncé, par exemple (v. fig. 543, $d''_1 b''_1 \ldots$) et de le limiter extérieurement par des traits de force. Il est utile, en général, de joindre au tracé une légende, indiquant la nature des surfaces représentées par les différentes teintes, afin de faciliter l'emploi de ce tracé pour des applications postérieures. Le dessin d'exécution de l'arbre lui-même doit être, autant que possible, établi sur la même feuille que le plan des forces, en ayant soin de faire coïncider les verticales passant par le milieu de chaque figure, de telle manière que chaque section de l'arbre se trouve directement sur la même verticale que l'ordonnée qui lui correspond, dans la surface des moments

Avec un peu d'habitude, on arrive à distinguer assez facilement, parmi les actions auxquelles la pièce est soumise, celles

qui ont une importance réelle, au point de vue des dimensions; il convient toutefois, si on ne veut pas s'exposer à des erreurs d'une certaine gravité, de ne décider qu'après mure réflexion quels sont les forces ou les moments qu'on peut négliger dans le tracé.

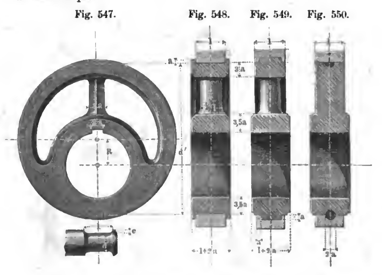
Le calcul graphostatique d'un arbre de locomotive à manivelles extérieures est différent de celui que nous venons d'indiquer; mais on peut, sans grande difficulté, arriver à établir le diagramme correspondant à ce cas, en modifiant légèrement le procédé précédent.

§ 232.

Excentriques.

Si, dans une manivelle, dont le bras est R et qui est calée sur un arbre de diamètre D, on augmente le diamètre d' du tourillon, de manière à ce qu'il devienne supérieur à $D + 2R$, l'arbre peut être entouré par le tourillon, qui constitue alors un *excentrique.*

Fig. 547. Fig. 548. Fig. 549. Fig. 550.



Les fig. 547 à 550 donnent les dispositions les plus simples de ce genre d'organes. La plus convenable, pour les cas ordinaires, est celle de la fig. 549; les deux rebords du collier

forment une espèce de réservoir, qui a l'avantage de maintenir constamment le disque dans l'huile et de réduire, par suite, notablement l'usure.

La largeur l du disque est égale à la longueur du tourillon d'extrémité équivalent, c'est-à-dire correspondant à la même pression; de la valeur e du collet de ce tourillon se déduit la saillie a de l'excentrique, au moyen de la relation:

$$a = 1{,}5\,e = 5 + {}^{7}\!/_{100}\,l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (224)$$

c'est à cette longueur a que se trouvent rapportées la plupart des autres dimensions.

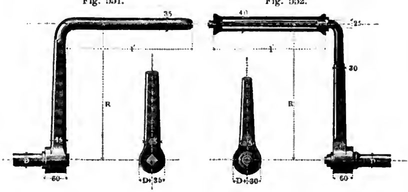
Les arbres, qui portent des coudes de manivelles ou toutes autres parties saillantes de position invariable, ne peuvent pas, le plus souvent, recevoir d'excentriques, disposés comme ceux des figures précédentes; dans les cas de ce genre, il convient de les faire en deux parties, qu'on réunit par des boulons. Dans le cas particulier où l'excentrique doit avoir une faible saillie sur l'arbre, on dispose son moyeu de fixation en dehors du disque proprement dit et en ayant soin de lui donner une épaisseur suffisante c'est-à-dire 3,5 a.

§ 233.

Manivelles à main.

Dans les manivelles à main, le tourillon présente la forme d'un manche. Les figures suivantes donnent les deux dispositifs qu'on rencontre le plus ordinairement; celui de la fig. 551 se rapporte à une manivelle manœuvrée par deux hommes, tandis

Fig. 551. Fig. 552.



que celui de la fig. 552 correspond à un seul homme. Les notations de ces figures reçoivent généralement les valeurs suivantes:

pour 2 hommes:	pour 1 homme:
$R = 360$ à 450^{mm}	300 à 400^{mm}
$l = 400$ à 480^{mm}	300 à 330^{mm}
$D = 40$ à 45^{mm}	30 à 35^{mm}.

Les manivelles, qui sont établies aux deux extrémités d'un même arbre, doivent être calées de manière à faire entre elles un angle de 120°.

XV. Leviers composés.

§ 234.

Des différentes espèces de leviers composés.

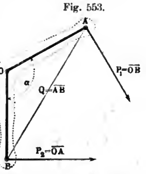
Deux leviers simples, qui ont un moyen commun, constituent un *levier composé*. Ce levier est désigné sous le nom de *balancier* (notamment dans le cas des grandes dimensions), lorsque les deux bras forment un angle égal à deux droits; lorsque cet angle à une valeur différente, on a ce qu'on appelle un *levier brisé* ou un *croisillon* et enfin on a une *bielle* ou un *levier oscillant*, lorsque les deux bras coïncident et ont la même longueur.

La pression Q sur l'axe d'un levier brisé AOB (fig. 553) est donnée par la formule:

$$Q = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 - 2\,P_1\,P_2\cos\alpha} \quad (225)$$

en supposant les forces P_1 et P_2 respectivement perpendiculaires, en A et B, aux bras OA et OB. Si on représente graphiquement P_1 par OB et P_2 par OA, la force Q se trouve elle-même représentée par le troisième côté AB du triangle AOB.

Fig. 553.



Si les forces P_1 et P_2 sont inclinées sur les bras OA et OB, il convient de remplacer ces bras par les perpendiculaires abaissées du point O sur les directions des forces.

§ 235.

Têtes de balanciers.

De tous les leviers composés le plus important est le balancier, en raison de ses nombreuses applications dans les machines à vapeur. Le balancier s'exécute ordinairement en fonte; les tourillons, dont il est muni à ses extrémités, sont assez souvent disposés comme celui de la fig. 516 (§ 219); un exemple de tourillons de ce genre se rencontre un peu plus loin, dans le § 237. Les autres modes de fixation, qu'on emploie encore pour les tourillons de balancier, sont représentés dans les figures suivantes.

Fig. 554. Tête de balancier, à double tourillon, ornée et tournée, avec fixation invariable par clavette.

Fig. 555. Tête de balancier, avec pièce en fer creuse portant les tourillons, s'adaptant exactement sur une partie tournée du balancier et maintenue par un anneau claveté en avant. La pièce des tourillons doit être ajustée avec la plus grande précision, afin que l'assemblage ne vienne pas à prendre du jeu, sous l'action persistante du mouvement alternatif. Cette disposition a d'ailleurs l'inconvénient d'entraîner des dépenses de construction assez considérables.

Fig. 554. Fig. 555.

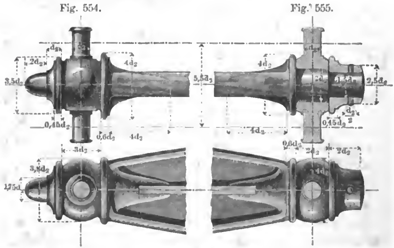
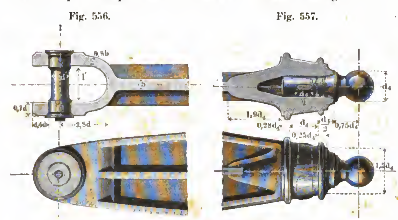


Fig. 556. Tourillon à fourchette; les deux portées de ce tourillon sont tournées suivant une surface légèrement conique et

il est maintenu par une vis à tête, avec interposition d'une rondelle à bords fraisés. A l'autre extrémité, le tourillon porte un ergot, destiné à empêcher tout mouvement de rotation.

Fig. 557. Tourillon à tête sphérique; le tourillon porte une longue queue, qui pénètre dans une partie alésée, ménagée à l'extrêmité du balancier et sur laquelle elle est solidement fixée par une clavette. Cette disposition assure à la bielle une grande mobilité et permet de lui donner une forme simple, analogue à celle qui correspond au tourillon à fourchette de la fig. 556.

Fig. 556. Fig. 557.



Le diamètre des tourillons se détermine d'après les indications du § 218. Si le balancier est à simple effet, on doit faire usage des formules (58), (60) et (218); s'il est, au contraire, à double effet, on peut employer les formules (217), qui donnent, pour ce diamètre, des valeurs plus faibles.

Pour les balanciers d'une très-grande force, le clavetage des tourillons peut se faire, comme l'indique la fig. 251, avec 6 ou 8 clavettes, s'engageant dans des rainures, ménagées dans la fonte du balancier; ce mode de fixation, lorsqu'il est exécuté avec soin, présente une très-grande sécurité.

§ 236.

Axe et moyeu de balancier.

L'axe d'un balancier peut se déterminer comme un axe simple à fuseaux égaux (v. chap. V). La matière employée pour

son exécution est ordinairement le fer forgé. Si le balancier est à bras égaux et s'il doit transmettre entièrement à une manivelle la puissance qu'il reçoit à l'une de ses extrémités, il convient de donner aux tourillons de son axe les dimensions du tourillon de la manivelle. Pour un balancier à bras inégaux, qui ne fait que recevoir et céder de la force à ses extrémités, il convient de procéder d'après les indications du § 81, en partant des tourillons doubles des extrémités. Enfin, si les forces présentent un autre mode de répartition, on doit recourir au procédé général, qui consiste à déterminer la somme algébrique des différents efforts auxquels le balancier peut se trouver soumis et à prendre le maximum de cette somme comme valeur de la pression sur l'axe. Il est très-commode, dans ce cas, de recourir à l'emploi de la méthode graphique, en suivant la marche que nous avons indiquée précédemment, pour les problèmes du § 39, par exemple. Au point de vue des oscillations transversales, il convient que la longueur de l'axe du balancier ne soit pas trop petite relativement à la longueur A du bras. On se trouve dans les conditions des bonnes constructions, en prenant la distance des milieux des tourillons égale à $6\,d + \frac{A}{10}$.

Le moyeu doit avoir pour longueur $3{,}5\,d$ et pour épaisseur $0{,}7\,d$ (v. fig. 558). Si l'axe du balancier doit être en fonte, on lui donne la même longueur que s'il était en fer et on détermine ses autres dimensions d'après les indications du chap. V. Les dimensions du moyeu doivent, dans ce cas, comme précédemment, être rapportées au tourillon idéal en fer; d'une manière générale, ces dimensions doivent se déterminer d'après les formules du § 220.

§ 237.

Bras de balancier.

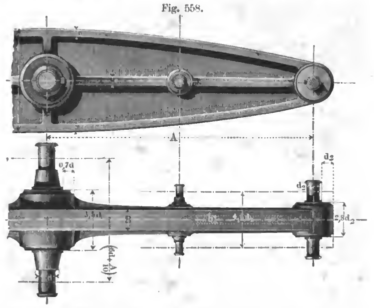
La fig. 558 représente la forme qu'on donne généralement aux bras de balanciers. La hauteur h de la pièce, dans la section correspondant à l'axe du moyeu, étant déterminée en fonction de la distance de cet axe à celui des tourillons de tête et du diamètre d, il est facile de trouver les autres dimensions, en opérant comme nous l'avons indiqué aux §§ 222 et 223. Suivant les circonstances, la distance des milieux des tourillons d'extrémités varie de $4{,}6\,d_2$ à $5{,}5\,d_2$.

La hauteur du bras h est donnée par l'expression:

$$h = 4\,d + \frac{A}{8} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (226)$$

en désignant par d le diamètre des tourillons de l'axe en fer du balancier et par A la longueur du bras. Dans le cas où le

Fig. 558.



balancier est à bras inégaux, il convient de prendre pour A la valeur moyenne des deux longueurs.

La courbe limite du bras, depuis le sommet du balancier jusqu'à la tête, destinée à recevoir les tourillons, doit être tracée par l'une des méthodes indiquées au § 101. La nervure de renforcement, établie au milieu du bras, a la même épaisseur e que la nervure du rebord; la fig. 558 donne les profils de ces nervures.

La fig. 559 représente une autre forme de bras de balancier, qui se compose de deux pièces en fonte. Pour le calcul des dimensions d'un balancier de ce genre, il convient de considérer chacune des pièces comme un balancier distinct. Si, comme l'indique la figure, on fait usage de tourillons à fourchette, le diamètre de tourillon double idéal d'_2, pour chaque pièce, est égal au diamètre d_3 du tourillon à fourchette.

La fig. 560 est une coupe du balancier précédent, faite par l'axe du moyeu. La fig. 561 représente la coupe d'un balancier

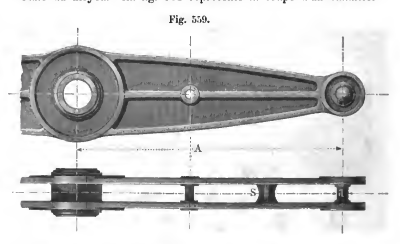
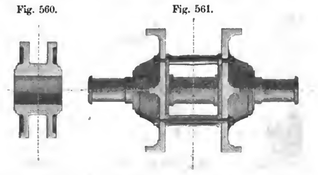


Fig. 559.

de grandes dimensions, formé de deux pièces complètement séparées. Ces deux pièces sont solidement reliées l'une à l'autre par des boulons à entretoises; cette disposition permet d'établir les points de suspension des organes du parallélogramme sur les faces intérieures. Les axes des deux pièces, composant le


Fig. 560. Fig. 561.

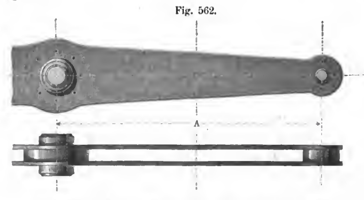
balancier, doivent être déterminés comme les axes principaux, chargés en deux points (v. § 92).

§ 238.

Balancier en fer.

Pour les balanciers, qui ne sont pas soumis à des charges trop considérables et dont la longueur de bras n'est pas trop grande, on peut utiliser avantageusement la disposition précédente, avec deux pièces distinctes en tôle, comme l'indique la fig. 562.

Fig. 562.



La hauteur h de chaque pièce, dans la section faite par l'axe du moyeu, doit être les $^8/_{10}$ de celle donnée par la formule (226). Pour les balanciers de grandes dimensions, la disposition précédente doit être rejetée et remplacée par une autre, dans laquelle la section présente l'une des formes données par les fig. 523 et 524.

XVI. Bielles.

§ 239.

Eléments des bielles.

La *bielle* est un organe, qui reçoit à l'une de ses extrémités l'action d'un levier, par l'intermédiaire de tourillons, pour la transmettre, à l'autre extrémité, à une autre pièce mobile, qui peut être elle-même un levier (balancier et manivelle), mais qui, le plus souvent, est une pièce à mouvement alternatif en

ligne droite (tiges de piston à vapeur ou à eau, etc.); cette dernière pièce est elle-même munie de tourillons, destinés à l'articuler avec la bielle.

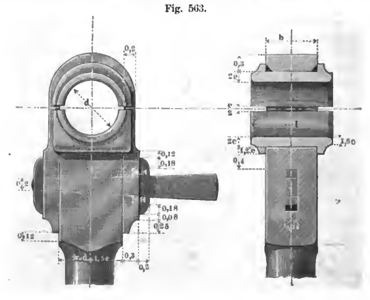
Dans les bielles, il existe une distinction très-nette entre les têtes ou les coussinets, qui entourent les tourillons d'assemblage, et le corps, qui est destiné à relier les deux têtes; aussi traiterons-nous séparément ces deux éléments des bielles. De plus, les dimensions de chaque tête doivent être dans un certain rapport avec le diamètre du tourillon qu'elle reçoit, rapport qui est d'ailleurs différent, suivant qu'il s'agit d'un tourillon d'extrémité, d'un tourillon à fourchette ou d'un tourillon intermédiaire, puisque, pour ces trois espèces de tourillons, les diamètres correspondant à une même valeur de la pression sont eux-mêmes différents. Nous devons donc également traiter séparément les dispositifs de têtes de bielles en usage pour ces trois genres de tourillons.

§ 240.

Tête de bielle pour tourillon d'extrémité.

La tête de bielle en fer, avec chape, que représente la fig. 563, est d'un usage très-répandu. Les coussinets sont main-

Fig. 563.

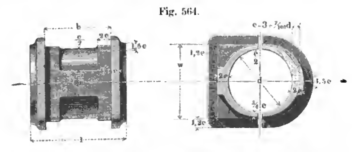


tenus par la chape qui les entoure et, lorsqu'ils sont arrivés à un certain degré d'usure, on peut les rapprocher au moyen de la clavette de serrage. Au point de vue des dimensions à donner, on doit, comme dans les paliers, séparer les coussinets des parties qui les entourent. L'unité, à laquelle on rapporte les épaisseurs, les largeurs et les saillies des rebords, est la même que pour les coussinets de paliers:

$$e = 3 + {}^{7}/_{100}\, d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (227)$$

relation dans laquelle d désigne le diamètre du tourillon. La fig. 564 donne deux vues principales des coussinets avec leurs portées et d'autres formes accessoires.

Fig. 564.



Les autres dimensions de la tête sont rapportées au module:

$$d_1 = \sqrt{P} + 5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (228).$$

La largeur b peut être prise égale à $0{,}8\, d_1$; dans le cas où la longueur du tourillon est égale à son diamètre, on peut prendre $b = d - 2e$.

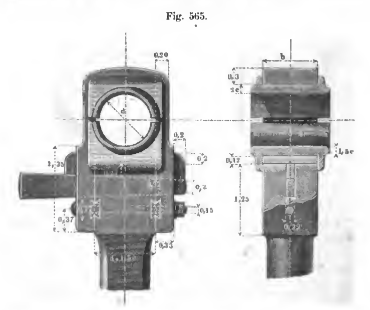
Exemple. Pour $P = 3600^k$, *on a, d'après les formules (217),* $d = l = 60^{mm}$ *et, d'après les formules (218), on trouve, pour le module,* $d_1 = 60 + 5 = 65^{mm}$; *on a, en outre,* $e = 3 + 4{,}2 = 7^{mm}$. *Si on prend* $b = d - 2e = 60 - 14 = 46^{mm}$, *on obtient, pour l'épaisseur des parois de la chape, par exemple,* $0{,}2 \cdot 65 = 13^{mm}$, *pour l'épaisseur au sommet,* $0{,}3 \cdot 65 = 20^{mm}$ *et enfin, pour les dimensions de la clavette,* $0{,}22 \cdot 65$ *ou* 14^{mm}.

La clavette, lorsqu'elle repose librement, comme ici, entre les surfaces mobiles, reçoit une inclinaison plus faible que dans le cas où elle se trouve maintenue par une vis de serrage, ou quelque dispositif de sureté analogue. Dans le premier cas, la somme des inclinaisons sur les deux côtés ne doit pas dépasser ${}^{1}/_{12}$, tandis que, dans l'autre, on va jusqu'à ${}^{1}/_{6}$. La partie libre doit, du reste, avoir une longueur suffisante, pour qu'on puisse produire le rapprochement des coussinets jusqu'à la limite d'usure

qu'on juge convenable. Aujourd'hui, on tend de plus en plus à supprimer toute ouverture à la jonction des coussinets, de telle sorte que, lorsqu'il s'est produit un certain jeu, il est nécessaire de limer les surfaces de contact, pour rendre possible le rapprochement des deux coussinets (v. par ex. fig. 567 et 568).

La tête de bielle que nous venons d'examiner jouit de cette propriété caractéristique que, par suite de l'usure et du rapprochement des coussinets, qui en est la conséquence, le centre du tourillon se rapproche du corps de la bielle. L'inverse a lieu dans la tête de bielle de Sharp, fig. 565, où la clavette,

Fig. 565.

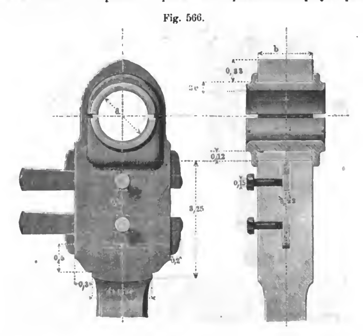


par l'intermédiaire d'une plaque de pression, pousse le coussinet inférieur vers le sommet.

Dans la tête de bielle de Bury, fig. 566, on peut à volonté éloigner ou rapprocher du corps de la bielle le centre du tourillon, suivant qu'on agit sur la clavette supérieure ou sur la clavette inférieure. Ce dispositif réunit, par suite, les propriétés des deux précédents et il doit être employé, de préférence, pour tous les cas où il est important de conserver à la bielle, malgré l'usure, une longueur invariable.

La fig. 567 représente une tête de bielle en bronze, qui a la forme d'un palier et qui a été fréqnemment employée par

Fig. 566.



Penn dans ses constructions. Les deux parties, dont se compose cette tête, sont fortement serrées l'une contre l'autre; lorsqu'on les fait porter directement l'une contre l'autre, les surfaces de contact doivent être limées, toutes les fois qu'on veut corriger l'usnre. Dans quelques cas, on se borne encore à garnir les rainnres de plaqnes de cuivre, qu'on remplace, au bout d'un certain temps, par d'autres plus minces.

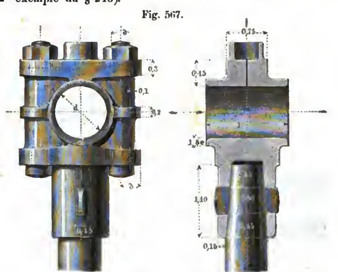
Le diamètre δ des boulons doit être choisi de telle manière que le diamètre du noyau ne soit pas inférieur à celui que donnerait la formule (43). Avec un filet triangulaire, cette condition est satisfaite en prenant:

$$\delta = 0{,}53 \sqrt{\frac{P}{2}} \quad \cdots\cdots \quad (229)$$

avec un filet carré, le diamètre doit être légèrement supérieur. La tension, dans la section du noyau du filet, se trouve comprise,

dans ce cas, entre 5 et 6k, ce qui est admissible (v. ci-après le 2e exemple du § 243).

Fig. 567.

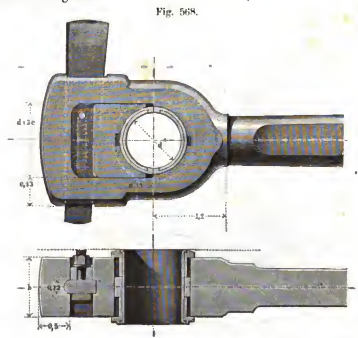


Les écrous des boulons du chapeau sont munis du dispositif de sureté de Penn (fig. 168); sur la figure, l'échelle adoptée n'a pas permis de représenter les vis de pression. Ce genre de tête est d'un usage assez fréquent dans les machines à vapeur, à cylindres oscillants. Pour les têtes de bielles de grandes dimensions, comme celles que comportent les arbres coudés des puissantes machines marines, on a cherché à économiser encore la matière, en employant des coussinets creux, dans lesquels le métal a une épaisseur relativement faible.

La fig. 568 représente une tête de bielle fermée. Dans un grand nombre de cas, ces têtes de bielles doivent être préférées aux têtes de bielles ouvertes, car elles sont à la fois plus solides et plus économiques, lorsqu'on dispose, pour leur construction, de bonnes machines outils. La disposition, représentée par la figure, est d'une forme très-élégante et peut s'exécuter complètement au moyen de machines (tour, machine à raboter, machine à mortaiser). Les coussinets sont en bronze, recouvert d'une garniture en métal blanc; leur surface extérieure reçoit au tour une forme cylindrique. Le coussinet mobile est ajusté sur un bloc de pression en fer, dans lequel pénètre la clavette,

qui prévient ainsi tout déplacement latéral. Snr la figure se trouve représentée une disposition spéciale, destinée à rendre la rotation plus facile et qui consiste dans l'addition, à l'intérieur des coussinets, de deux surfaces cylindriques, encastrées sur toute la longueur.

Fig. 568.

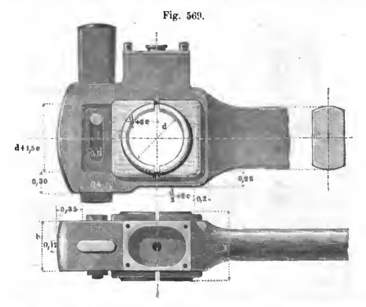


Les deux surfaces, qui limitent le trou destiné au logement de la clavette, ont généralement un profil semi-cylindrique. Cette forme a l'avantage de se prêter facilement à l'emploi de la machine à percer les trous longitudinaux et, de plns, elle est préférable au point de vue de la résistance elle-même de la tête de bielle. Quant à la clavette, elle repose sur le bloc de pression par une surface plane; cette disposition a pour but de faciliter l'interposition d'une plaque de tôle, dans le cas où cette addition serait reconnue nécessaire. Le dispositif de sureté, adopté pour la clavette, est celui de la fig. 195; l'écrou du boulon de sureté se trouve noyé dans le métal de la tête de bielle et ne peut guère être manœuvré qu'à l'aide d'une clef creuse à béquille. Cet enfoncement est d'ailleurs indispensable

pour que le boulon ne vienne pas rencontrer les pièces qui se trouvent de l'autre côté de la ligne pointillée.

La fig. 569 donne une autre forme de tête de bielle fermée, très-usitée pour les locomotives. Sur la face arrière de cette tête, les coussinets ne portent aucun rebord, de telle sorte qu'il est facile de les retirer du cadre qui les entoure, lorsqu'on a préalablement enlevé la clavette. Cette pièce s'applique sur le coussinet supérieur et l'empêche de sortir en avant. Ce dispositif, comme on le voit, ne comporte pas de plaque de pression;

Fig. 569.



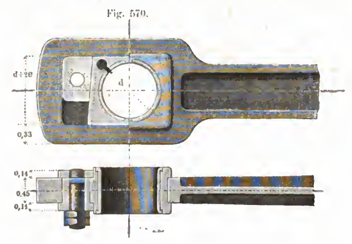
aussi est-il nécessaire d'augmenter l'épaisseur du coussinet supérieur et de la porter à $3e$, tandis que celle de l'autre coussinet n'est que de $2e$. Le dispositif de sureté de la clavette est analogue à celui de la figure précédente. Dans les bielles de locomotives, la tête porte la boite à huile ordinaire, qui se trouve supprimée dans les bielles qui travaillent verticalement et dans celles qui ont une marche assez lente. Cette boite est fermée par un couvercle, en bronze; dans le trou percé en son milieu, et que représente le plan, est vissé un tuyau à mèche, destiné à amener l'huile à l'intérieur des coussinets. Pour tout ce qui se rapporte à l'unité correspondant aux nombres proportionnels de

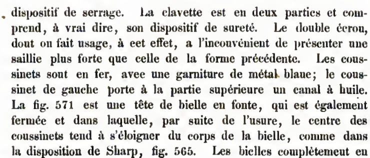
la figure, il convient d'avoir égard aux observations du paragraphe suivant.

Dans la position de la clavette, représentée sur la figure, le centre des coussinets, par suite de l'usure, se rapproche du corps de la bielle, dont la longueur se trouve ainsi diminuée; si l'on veut que l'effet inverse se produise, il convient d'établir le logement de la clavette entre les coussinets et le corps de la bielle. Les surfaces extérieures de cette tête de bielle s'exécutent à la machine; c'est avec intention que tous les contours sont raccordés par des lignes allongées, afin de prévenir les variations brusques de tension d'une section à l'autre.

Une troisième forme de tête de bielle fermée est celle de Krauss (de Munich), représentée par la fig. 570. Cette pièce, qui est en acier, est surtout remarquable par la simplicité du

Fig. 570.



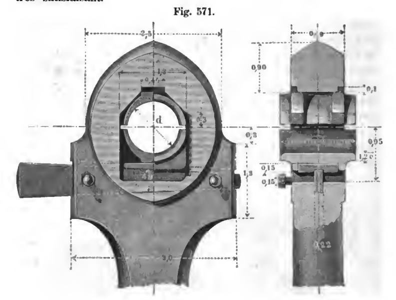




dispositif de serrage. La clavette est en deux parties et comprend, à vrai dire, son dispositif de sureté. Le double écrou, dont on fait usage, à cet effet, a l'inconvénient de présenter une saillie plus forte que celle de la forme précédente. Les coussinets sont en fer, avec une garniture de métal blanc; le coussinet de gauche porte à la partie supérieure un canal à huile. La fig. 571 est une tête de bielle en fonte, qui est également fermée et dans laquelle, par suite de l'usure, le centre des coussinets tend à s'éloigner du corps de la bielle, comme dans la disposition de Sharp, fig. 565. Les bielles complètement en

fonte ne se rencontrent guère que dans les grandes machines à balanciers, à marche lente, et, dans ce cas, leur emploi est très-satisfaisant.

Fig. 571.



§ 241.

Têtes de bielles pour tourillons à fourchette.

Un tourillon à fourchette (v. § 218), en supposant qu'on réduise le plus possible ses dimensions, doit avoir au moins, comme diamètre, $d' = 0{,}7\ d$, d désignant le diamètre du tourillon d'extrémité équivalent; sa longueur est alors $2\,d'$. Si l'on donne à d' une valeur supérieure à la précédente, il convient d'augmenter, en même temps, la longueur dans une proportion déterminée, de manière à ce que la tension conserve la même valeur; on a ainsi l'avantage de rendre plus faible la pression par unité de surface. En raison de cette faculté de variation des dimensions, la largeur b' de la tête de bielle, pour le tourillon à fourchette, ne reste plus, comme pour le tourillon d'extrémité, dans un rapport déterminé avec d_1; la valeur à adopter pour ce rapport varie suivant les circonstances. Afin d'en tenir compte

dans le calcul, à la place du module d_1 donné par la formule (228), nous prendrons, pour les têtes de bielles des tourillons à fourchette, le module d'_1 déterminé par la relation :

$$\frac{d'_1}{d_1} = \sqrt{\frac{b}{b'}}\sqrt{\frac{d'}{d}} \quad \ldots\ldots \quad (230)$$

où b représente la largeur de la chape dans la tête de bielle normale. Grâce à l'adoption de ce nouveau module, il devient possible d'appliquer aux têtes de bielles de tourillons à fourchette les dimensions proportionnelles, indiquées précédemment pour les tourillons d'extrémités. Le module e pour les dimensions des coussinets doit d'ailleurs être exprimé directement en fonction du diamètre réel d' du tourillon. La formule (230) fournit un module, qui conduit approximativement, pour la tête de bielle anormale, à la même résistance que celle correspondant à la tête de bielle établie pour le tourillon normal, à la condition, bien entendu, d'employer la même matière dans les deux cas. On ne doit pas s'attendre d'ailleurs à trouver, dans les constructions existantes, une vérification complète des règles empiriques que nous venons d'établir ; les dimensions d'un certain nombre présentent une concordance parfaite avec celles qu'on déduit de notre module, mais d'autres sont trop fortes, comme, par exemple, celles qui correspondent au module différent $d'_1 = d_1\left(\frac{b}{b'}\frac{d'}{d}\right)^{3/4}$, supposé appliqué aux nombres proportionnels que nous avons indiqués précédemment. La section des clavettes ne doit éprouver aucune réduction, puisque ces pièces sont exposées au cisaillement et qu'il convient de ne pas les soumettre à une pression trop forte par unité de surface. Nous admettrons donc que les clavettes conservent, dans le cas actuel, les mêmes dimensions que pour les têtes de bielles correspondant aux tourillons d'extrémités.

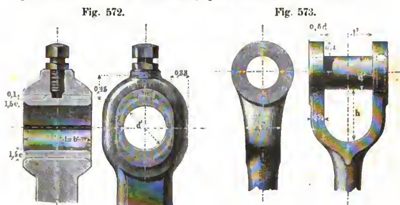
Exemple. *On propose de construire la tête de bielle, représentée par la fig. 563, pour un tourillon à fourchette, supposé soumis à une pression de* 3600^k. *Les formules (217) donnent, pour le diamètre du tourillon d'extrémité correspondant à cette charge,* $d = \sqrt{3600} = 60^{mm}$, *pour celui du tourillon à fourchette,* $d' = 0{,}7 \cdot 60 = 42^{mm}$ *et, pour la longueur* $l' = 2d' = 84^{mm}$. *Nous donnerons à la chape la largeur qui convient à la tête de bielle du tourillon d'extrémité, c'est-à-dire* $b' = 60 - 2 \cdot 7 = 46^{mm}$, *en supposant les coussinets munis de rebords ; pour le tourillon d'extrémité, la formule (228) donne :* $d_1 = 60 + 5 = 65^{mm}$ *et la formule (230) :* $d'_1 = 65\sqrt{\frac{b}{b'}\frac{d'}{d}} = 65\sqrt{0{,}7} = 0{,}84 \cdot 65 = 55^{mm}$. *Au moyen de ce module, on trouve, par*

exemple, pour l'épaisseur des bandes de la chape, $0{,}2 \cdot 55 = 11^{mm}$ *et, pour l'épaisseur au sommet,* $0{,}3 \cdot 55 = 17^{mm}$. *Les clavettes étant soumises à des actions de cisaillement, on doit leur donner les mêmes dimensions qu'à celles de la tête de bielle du tourillon d'extrémité; on obtient ainsi, pour la largeur de la clavette,* $0{,}22 \cdot 65$ *ou* 14^{mm} *et, pour sa hauteur la plus faible,* $0{,}2 \cdot 65 = 13^{mm}$.

La fig. 572 représente une tête de bielle en fer fermée, qui convient très-bien pour un tourillon à fourchette. Cette disposition est fréquemment employée pour la tête de l'extrémité oscillante des bielles de machines à vapeur et, en particulier, dans un grand nombre de machines des usines de Seraing.

La tête de bielle de la fig. 573, au lieu de former palier pour un tourillon à fourchette, porte elle-même ce tourillon,

Fig. 572. Fig. 573.



qui lui est solidement relié. Dans ce cas, la pièce mobile, correspondant au tourillon, doit elle-même former palier, comme l'indique, par exemple, la fig. 607, § 250. Des dispositions analogues, pour la partie oscillante des bielles, se rencontrent dans les locomotives (Polonceau) et dans les machines de bateaux (Humphry). Dans cette tête de bielle, la valeur de b' doit être déterminée d'après l'espace disponible; quant à la hauteur h, elle doit se calculer, dans chaque cas particulier, d'après les dimensions des organes qui doivent se mouvoir dans le vide compris entre les deux branches.

Fig. 574. Tête de bielle pour tourillon à fourchette; cette forme qu'on peut employer pour l'extrémité oscillante d'une bielle est analogue à celle de la fig. 568. La surface extérieure des

coussinets est cylindrique et l'un d'eux s'ajuste dans un bloc de pression en fer. La pression de la clavette se transmet à ce bloc par l'intermédiaire d'une pièce en bronze. Le dispositif de sureté est celui de la fig. 194. Au point de vue de l'aspect, la forme de cette tête de bielle est très-satisfaisante.

Fig. 575. Disposition très-employée pour l'extrémité oscillante d'une bielle, notamment dans les locomotives; elle convient

Fig. 574.

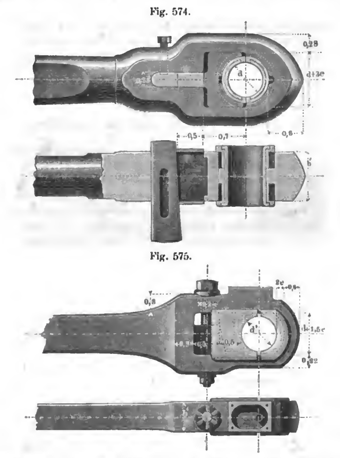


Fig. 575.

spécialement pour les bielles, qui, à l'autre extrémité (celle qui est animée d'un mouvement de rotation), se terminent par une tête d'une construction analogue à celle de la fig. 569. Ici encore

les coussinets ne portent aucun rebord sur la face intérieure. Le déplacement de la clavette de serrage est produit par la rotation d'un boulon; à chaque sixième de tour, ce boulon peut être fixé dans une position invariable, au moyen d'une goupille, qui traverse sa tête, en même temps qu'elle vient se loger dans une des rainures, creusées sur la face supérieure de la portée qui reçoit cette tête. Dans les nouvelles constructions, on emploie souvent un artifice, qui consiste à ménager trois trous dans la tête du boulon et deux rainures rectangulaires sur la portée, de telle sorte que la différence, entre deux positions de fixation, ne correspond plus, dans ce cas, qu'à un douzième de tour.

§ 242.

Têtes de bielles pour tourillons intermédiaires.

Ainsi que nous l'avons indiqué précédemment (§ 82), il n'existe aucune relation théorique entre le diamètre d' du tourillon intermédiaire et le diamètre d du tourillon d'extrémité équivalent; quant à sa longueur, nous avons admis qu'elle devait, autant que possible, ne pas descendre au-dessous de la longueur l du tourillon d'extrémité et c'est cette règle que nous avons suivie pour l'établissement des contre-manivelles, des arbres coudés et des excentriques. C'est aussi celle que nous adopterons pour la construction des têtes de bielles correspondant à cette espèce de tourillons.

Nous utiliserons, dans ce cas, les nombres proportionnels que nous avons indiqués pour les têtes de bielles des tourillons d'extrémités, en les rapportant au module que fournit la formule (230). Quant au module e des dimensions des coussinets, il doit être exprimé, comme précédemment, en fonction du diamètre réel d' du tourillon.

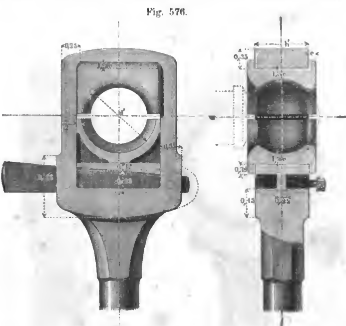
Exemple. La tourillon à fourchette de l'exemple du paragraphe précédent étant remplacé par un tourillon intermédiaire, dont le diamètre d' est de 120^{mm} et la longueur l' de 80^{mm}, on propose de construire, pour ce tourillon, la tête de bielle représentée par la figure 563. On a, dans ce cas, comme précédemment, $d = \sqrt{P} = \sqrt{3600} = 60^{mm}$, $d_1 = 5 + 60 = 65^{mm}$, $b = 46^{mm}$; il reste à choisir la largeur b' de la chape; comme dans un grand nombre de têtes de bielles pour tourillons intermédiaires, cette largeur se trouve être la même que pour les tourillons d'extrémités

équivalents, nous pouvons prendre $b' = b$ *et il vient alors:* $d'_1 = d_1 \sqrt{\frac{120}{60}}$ $= 65 \cdot 1{,}414 = 92^{mm}$. *Pour les coussinets, on a:* $e = 3 + {}^{7}/_{100} \cdot 120 = 11^{mm}$.

Les figures suivantes indiquent plusieurs dispositions de têtes de bielles, pour tourillons intermédiaires; c'est avec intention que nous avons choisi des formes différentes de celles que nous avons données précédemment pour les tourillons d'extrémités; cette manière d'opérer nous permet, en réalité, de faire connaître un grand nombre de types, qui sont tous également applicables aux tourillons d'extrémités.

Fig. 576. Tête de bielle fermée (v. fig. 557) pour tourillon sphérique. D'après les indications du § 227, le rapport du dia-

Fig. 576.



mètre du tourillon sphérique d'extrémité à celui du tourillon cylindrique équivalent est 1,5. En supposant un tourillon de ce genre, nous aurons: $\frac{d'}{d} = 1{,}5$ et si, comme dans l'exemple précédent, nous prenons $b' = b$, nous trouverons finalement: $d'_1 = d_1 \sqrt{1{,}5} = 1{,}225\, d_1$. Pour $d = 60^{mm}$, on aurait, par conséquent, $d' = 90^{mm}$,

$d_1 = 65^{mm}$, $d'_1 = 1{,}225 \cdot 65 = 80^{mm}$. Les coussinets ne portent de rebords que sur la face antérieure, de telle sorte qu'il soit possible de les retirer de leur cadre, après l'enlèvement de la clavette. Au lieu d'être placée au-dessous des coussinets, la clavette peut se trouver au-dessus, comme dans la fig. 569, et, dans ce cas, le serrage a pour résultat de raccourcir la bielle, au lieu de l'allonger, comme dans la disposition actuelle. Dans les bielles d'accouplement des locomotives, ce mode de construction de la tête se trouve fréquemment employé, avec le renforcement figuré à droite en pointillé.

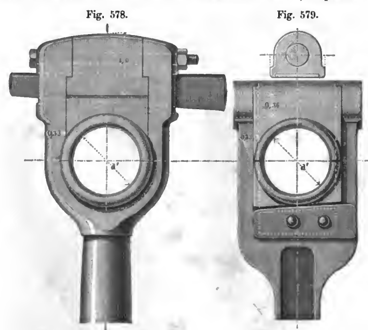
Fig. 577. Autre forme de tête de bielle fermée, qu'on rencontre souvent employée pour le parallélogramme de Watt et certains dispositifs de guidage.

Fig. 577.

Pour les tourillons intermédiaires des arbres coudés, des contre-manivelles et des organes du même genre, il est néces-

saire de recourir à des têtes de bielles, qui puissent s'ouvrir. Parmi les dispositions qu'on peut adopter, dans ce cas, les plns convenables sont celles dans lesquelles la fermeture s'opère au moyen d'nne pièce de remplissage, qn'on ajnste snr les deux branches de la tête de bielle et qn'on fixe par des boulons, de manière à obtenir nn véritable cadre fermé, ponr recevoir les coussinets. Les figures 578 et 579 représentent deux têtes de bielles de ce genre. Le dispositif de la première rentre dans le mode de construction de la fig. 568. La pièce de remplissage est maintenue par deux parties saillantes et fortement serrée entre les branches par deux boulons transversaux. La tête de bielle de la fig. 579 (Krauss) correspond à celle de la fig. 570 et est utilisée, conjointement avec elle, dans les bielles d'accouplement des locomotives. Comme la pièce de remplissage forme en même temps le conssinet supérienr, elle est en bronze. Cette pièce est maintenne par nn seul boulon transversal, parfaitement ajnsté (qui, sur la figure, est supposé enlevé); des rainures, pratiquées sur les faces intérieures des deux branches du cadre, empêchent

Fig. 578. Fig. 579.

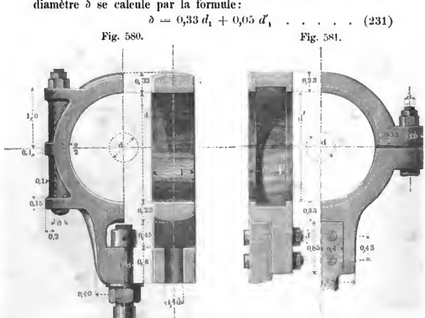


tout mouvement de rotation autour de ce boulon. Au-dessus de la figure principale, se trouve représentée une coupe transversale du coussinet supérieur, sur laquelle se voit la garniture en métal blanc. La rainure de séparation des coussinets est remplie par des feuilles de cuivre. La tête de bielle et le boulon sont en acier.

Les fig. 580 et 581 représentent des bagues d'excentriques, qui ici sont supposées en bronze. La largeur $b' = l$ de chaque bague est égale à la longueur du tourillon d'extrémité en fonte, qui correspond à la pression de l'excentrique (v. § 82). Pour $\sqrt{P} = 40$, on a $d_1 = 45^{mm}$, $l = b = 60^{mm}$; on obtient alors, pour $d' = 400^{mm}$, $b' = l = 60^{mm}$, $d'_1 = 45 \cdot \sqrt{\frac{400}{40}} = 45 \cdot 3{,}16 = 142^{mm}$. Si l'on fait $d' = d$, les nombres proportionnels, inscrits sur les figures, fournissent deux têtes de bielles, en forme de supports, pour tourillons d'extrémités. Toutes les dimensions se déterminent au moyen des nombres proportionnels, dont le module est donné par la formule (230), à l'exception de celles des deux boulons, qui réunissent les deux parties de chaque bague. Leur diamètre δ se calcule par la formule:

$$\delta = 0{,}33\, d_1 + 0{,}05\, d'_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (231)$$

Fig. 580. Fig. 581.



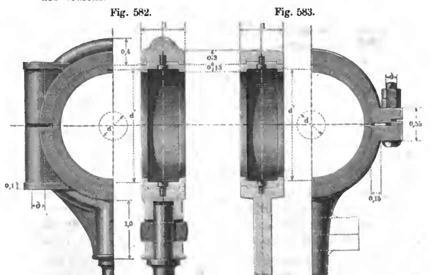
où d'_1 désigne le module des tourillons intermédiaires et d_1 celui des tourillons d'extrémités équivalents.

Exemple. Pour $d' = 400^{mm}$, *nous avions précédemment:* $d'_1 = 142^{mm}$ *et* $d_1 = 45^{mm}$; *dans ce cas, nous devons prendre:* $\delta = 0,33 \cdot 45 + 0,05 \cdot 142 = 15 + 7,1$, *soit* 22^{mm}. *Si on fait* $d' = d$ *et, par suite,* $d'_1 = d_1$, *la formule (231) devient identique à la formule (229) du § 240 pour les têtes de bielles de tourillons d'extrémités.*

Fig. 582. Collier d'excentrique en fonte, avec une garniture en bronze (que certains constructeurs suppriment complètement). Le corps de la tige est solidement relié au collier par une clavette transversale, établie parallèlement à l'axe de l'excentrique. Lorsque deux excentriques doivent être établis tout près l'un de l'autre, il convient d'incliner les clavettes à 45° sur la position précédente, afin de les rendre facilement accessibles.

Fig. 583. Collier d'excentrique en fer, muni également d'une garniture en bronze. Ici, comme dans le dispositif précédent, les deux coussinets en bronze doivent parfaitement porter l'un sur l'autre et il devient nécessaire de les limer, lorsqu'on veut les rapprocher. Au lieu de faire la tige d'une seule pièce avec la partie inférieure du collier, on adopte souvent la disposition représentée, en pointillé, sur la figure et qui consiste à donner à la tige la forme d'un T, en la reliant à la tête par des boulons.

Fig. 582. Fig. 583.



§ 243.

Tiges des bielles à section circulaire.

Le corps d'une bielle peut s'exécuter en fer, en fonte, en acier et même quelquefois en bois (chêne). Dans le cas où cette pièce n'est soumise qu'à des efforts de traction, si on la suppose à section circulaire et si on désigne par D le diamètre du corps, par P l'effort de traction, il convient de ne pas descendre, pour D, au-dessous des valeurs suivantes:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{Fer} & \dfrac{D}{\sqrt{P}} = 0{,}56, & \text{Acier} & \dfrac{D}{\sqrt{P}} = 0{,}44 \\ \text{Fonte} & \dfrac{D}{\sqrt{P}} = 0{,}80, & \text{Bois de chêne} & \dfrac{D}{\sqrt{P}} = 2{,}18 \end{array}\right\} \quad . \quad (232).$$

A ces valeurs correspondent des tensions, qui sont respectivement de 4^k, 2^k, $6^k, {}^2/_3$ et $0^k,27$, c'est-à-dire les ${}^2/_3$ seulement de celles que nous admettons ordinairement; cette réduction a pour but de tenir compte, dans une certaine mesure, de l'action des chocs, auxquels la bielle peut se trouver soumise, à certains moments, par suite de l'usure des coussinets.

Les mêmes formules peuvent encore être employées pour les bielles soumises à des efforts de compression, mais seulement dans le cas où la longueur de ces pièces est très-faible. Lorsque la bielle a une longueur assez grande pour qu'elle puisse éprouver des actions de flexion, il convient généralement d'adopter, pour le diamètre, une valeur supérieure à celle que fourniraient ces formules. Pour une bielle, qui se trouve placée dans les conditions du n° II, § 16 (v. aussi § 151), l'effort P doit être inférieur à $\pi^2 \dfrac{JE}{L^2}$, J désignant le moment d'inertie de la section de la bielle et E le coefficient d'élasticité de la matière qui la compose. Nous devrons donc prendre: $P = \dfrac{1}{m} \pi^2 \dfrac{JE}{L^2}$; quant au coefficient de sécurité m, l'examen d'un grand nombre de bielles montre qu'il varie dans des limites aussi étendues que celles indiquées précédemment pour les colonnes. Si, en laissant provisoirement m indéterminé, nous remplaçons J par sa valeur $\dfrac{\pi}{64} D^4$ et E par 20000, pour le fer et l'acier, par 10000, pour

la fonte, et par 1100, pour le bois, nous obtiendrons, pour le diamètre du corps de la bielle, les expressions suivantes:

$$\left.\begin{array}{lll}\text{Fer et acier} \ldots & D = 0{,}10\sqrt[4]{m}\ \sqrt{L\sqrt{P}} \\ \text{Fonte} \ldots\ldots & D = 0{,}12\sqrt[4]{m}\ \sqrt{L\sqrt{P}} \\ \text{Bois de chêne} \ldots & D = 0{,}21\sqrt[4]{m}\ \sqrt{L\sqrt{P}}\end{array}\right\} \ldots (233).$$

Pour

$m =$	1,5	2	3	4	6	8	10	15	20	25	30	40	50	60
$\sqrt[4]{m} =$	1,1	1,19	1,32	1,41	1,56	1,68	1,78	1,97	2,11	2,24	2,34	2,51	2,66	2,78

Si on désigne par C les coefficients de $\sqrt{L\sqrt{P}}$, les formules précédentes peuvent se mettre sous la forme:

$$\frac{D}{\sqrt{P}} = C\sqrt{\frac{L}{\sqrt{P}}}$$

où on doit prendre pour C des valeurs différentes, suivant le degré de sécurité m qu'on veut obtenir. En pratique, m présente, comme nous l'avons dit, de grandes variations. Dans les machines à vapeur fixes, et surtout dans celles de faibles dimensions, on rencontre, pour m, des valeurs très-élevées, qui vont souvent de 50 à 60. Nous devons faire remarquer, toutefois, que les petites machines à vapeur sont peu propres à fournir des indications sur les proportions à adopter, puisque, dans ce cas, un excès dans les dimensions n'a qu'une très-minime importance, au point de vue de la marche ou de l'économie de matière. Pour les machines à vapeur de force moyenne et pour celles de grandes dimensions, m est compris entre 5 et 25 et on le trouve fréquemment égal à 20. Ces grandes variations doivent être attribuées, en partie, aux différences de fixation des extrémités des bielles; ainsi, par exemple, lorsque l'une des extrémités d'une bielle est munie d'un tourillon double, cette bielle, au point de vue des flexions, dans le plan des tourillons, peut être considérée comme se trouvant dans les conditions de la pièce du nº I, § 16 et, dans ce cas, il est évident que m ne saurait être inférieur à 4.

Avec $m = 20$, on a, pour le fer et l'acier, $C = 0{,}21$.

1er Exemple. Une bielle en fer, de 3000mm de longueur, qui est soumise à une pression de 14400k, est supposée munie d'un tourillon double, à l'une de ses extrémités; elle doit avoir, par suite, comme diamètre au corps:
$D = 0{,}21\sqrt{3000\cdot\sqrt{14400}} = 0{,}21\sqrt{3000\cdot 120} = 21\sqrt{36} = 126^{mm}$.

Le corps de la bielle est généralement aminci à partir du milieu, de telle sorte que le diamètre de la section, à chaque extrémité, ne soit plus que 0,7 D; le profil est formé par une ligne à faible courbure. On peut utiliser, à cet effet, la courbe sinu-cycloïdale, représentée par l'équation (23).

Aux extrémités, le corps de la bielle se raccorde avec les têtes par une série de sections, croissant d'une manière continue, de manière à éviter les variations brusques de tension. Les variations de tension ont une action d'autant plus nuisible que la vitesse de la bielle est plus grande. Lorsque cette vitesse est très-considérable, comme, par exemple, dans les locomotives, il se produit encore un effet sensible de flexion dans le corps de la bielle. Cet effet est dû à ce qu'on appelle le fouettement de la bielle, qui, pour chaque tour de la manivelle, correspond à une double flexion, en haut et en bas, dans le plan de cette manivelle; la valeur de cette flexion augmente avec la puissance vive de la bielle et son poids. Dans une bielle ordinaire, reliant la manivelle et le piston d'une machine à vapeur, le point, pour lequel cet effet de flexion est le plus prononcé, se trouve compris entre le milieu du corps de la bielle et le bouton de la manivelle. C'est pour ce motif que plusieurs constructeurs, au lieu de placer le plus grand diamètre du corps au milieu même de la longueur, le reportent légèrement en dehors, du côté de la manivelle, ainsi que le montre la fig. 584, qui reproduit une disposition usitée dans la pratique et dont l'aspect est assez satisfaisant.


Fig. 584.



Nous devons, toutefois, faire remarquer qu'avec les vitesses ordinaires de pistons, de 1m,2 à 1m,5, l'influence du fouettement est à peu près nulle et qu'on peut généralement n'en tenir aucun compte, lorsqu'on adopte les coefficients de sécurité indiqués précédemment. Dans ce cas, l'adoption de la forme donnée par la figure précédente doit, en réalité, être considérée plutôt comme un moyen élégant de représenter l'action des forces aux différents points que comme une véritable nécessité de construction; il

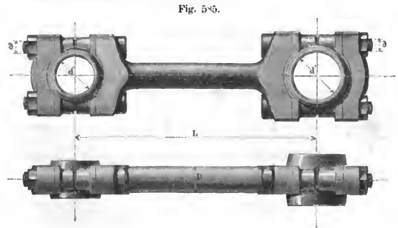
convient d'ajouter que cette forme se prête bien à la réunion de têtes de sections différentes et qu'à ce point de vue elle mérite souvent d'être recommandée.

Dans les machines à vapeur, à rotation rapide, où la vitesse du piston est considérable, la question du fouettement se place au premier rang. Dans les machines d'Allen, qui marchent à une très-grande vitesse, les bielles sont très-fortes et le renflement se trouve très-rapproché du bouton de la manivelle. Toutefois, ces machines ne sont pas de nature à servir de point de départ pour l'établissement de formules de construction, puisque, dans les locomotives, ainsi que nous le verrons dans le paragraphe suivant, le coefficient de sécurité m est, en définitive, assez faible, bien que la vitesse du piston soit très-grande.

Dans les machines de bateaux, le coefficient m est généralement très-élevé; il est souvent égal à 30, 40, 60 et même 80. Quant au rapport de D à $\sqrt{P}$ il varie très-peu et est toujours compris entre 0,70 et 0,78.

Ces deux résultats doivent être attribués à ce que, pour ces machines, on a l'habitude de prendre le diamètre du corps de bielle proportionnel au diamètre du cylindre. Il convient, en outre, d'observer que, dans les bateaux, la fondation des machines est loin de présenter une invariabilité absolue et il est nécessaire, par suite, d'adopter un coefficient de sécurité élevé. La fig. 585 représente une bielle de machine d'un navire à hélice. Le corps est complétement cylindrique et les têtes ont une disposition analogue à celle de la fig. 567.

Fig. 585.



2e Exemple. Pour une machine de vaisseau à hélice, on donne $P = 43000^k$, $L = 1515^{mm}$. *Pour* $m = 20$, *on a, d'après ce qui précède:* $D = \sqrt{P} \cdot C \sqrt{\frac{L}{\sqrt{P}}} = 207 \cdot 0{,}21 \sqrt{\frac{1515}{207}} = 0{,}21 \cdot 207 \cdot 2{,}7 = 117^{mm}$. *Maudslay, avec les mêmes données, a pris* $D = 152^{mm}$, *ce qui correspond à un coefficient de sécurité* $m = 54{,}7$. *Le diamètre* δ *des boulons était de* 76^{mm}; *d'après la fig. 567, on aurait dû prendre:* $\delta = 0{,}53 \sqrt{\frac{43000}{2}} = 0{,}53 \cdot 146{,}4 = 77^{mm}{,}7$, *soit* 78^{mm}. *Dans d'autres machines de navires à hélice, on trouve le quotient* $\frac{\delta}{\sqrt{0{,}5\,P}}$ *compris entre 0,67 et 0,75; cette valeur élevée peut s'expliquer, en partie, par l'emploi de filets carrés à forte saillie, en partie, par l'intention où l'on était d'obtenir une très-grande sécurité.*

§ 244.

Corps de bielles à section rectangulaire.

Lorsqu'on a à construire un corps de bielle à section rectangulaire, on peut déterminer d'abord, d'après les règles du paragraphe précédent, le conoïde correspondant à la section circulaire et transformer ensuite ses sections en rectangles. Si on désigne par

h le plus grand } côté d'une section rectangulaire quelconque,
b le plus petit }

δ le diamètre de la section circulaire pour le même point,

on doit prendre, dans le cas où la hauteur h est donnée:

$$\frac{b}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{16} \frac{\delta}{h}} = 0{,}84 \sqrt[3]{\frac{\delta}{h}} \quad \ldots \ldots \quad (234)$$

si, au contraire, c'est la largeur b qui est connue, on a:

$$\frac{h}{\delta} = \frac{3\pi}{16} \left(\frac{\delta}{b}\right)^3 = 0{,}59 \left(\frac{\delta}{b}\right)^3 \quad \ldots \ldots \quad (235).$$

Enfin, lorsqu'on donne simplement le rapport $\frac{b}{h}$, on doit prendre:

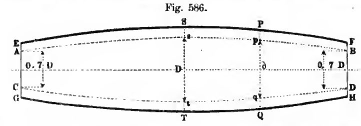
$$\frac{b}{\delta} = \sqrt[4]{\frac{3\pi}{16} \frac{b}{h}} = 0{,}88 \sqrt[4]{\frac{b}{h}} \quad \ldots \ldots \quad (236).$$

La table suivante contient une série de valeurs, fournies par ces formules.

$\frac{h}{\delta}$	$\frac{b}{\delta}$	$\frac{b}{\delta}$	$\frac{h}{\delta}$	$\frac{h}{b}$	$\frac{b}{\delta}$
1,0	0,84	0,50	4,72	1,0	0,88
1,1	0,81	0,53	3,98	1,25	0,83
1,2	0,79	0,56	3,38	1,50	0,79
1,3	0,77	0,60	2,75	1,75	0,76
1,4	0,75	0,63	2,37	2,00	0,74
1,5	0,73	0,66	2,07	2,5	0,70
1,6	0,72	0,70	1,73	3,0	0,67
1,7	0,70	0,75	1,39	3,5	0,64
1,8	0,69	0,80	1,15	4,0	0,62
2,0	0,67	0,84	1,00	4,5	0,60

1er Exemple. Le procédé le plus commode consiste à se donner le profil des hauteurs EFGH, fig. 586, et à déterminer les largeurs au moyen des colonnes 1 et 2 de la table. Après avoir tracé le profil idéal à sections circulaires ABCD, on détermine le profil EFGH au sentiment, en s'attachant

Fig. 586.



à ce que ses différentes hauteurs ST, PQ.... soient supérieures aux diamètres correspondants st, pq... du corps idéal. Si on prend, par exemple, ST = 1,6 st, la table donne (colonne 2, ligne 7): b = 0,72 st; pour PQ = 1,5 pq, on a de même: b = 0,73 pq, etc.

Si b devait être égal à 0,7 D, on devrait prendre, d'après la table (col. 3 et 4, ligne 7), la hauteur ST = 2,07 D.

Si la hauteur devait être constamment le double de la largeur, il faudrait prendre, d'après la table, b égal, en chaque point, à 0,74 du diamètre δ correspondant à ce point.

Dans certains cas, il est avantageux de pouvoir calculer directement la section rectangulaire du corps de bielle en un point; on a alors à introduire le plus petit des moments d'inertie de la section; en posant $J = {}^1/_{12}\, h b^3$, on obtient les formules suivantes, dans le cas des bielles en fer et en acier:

pour une valeur déterminée de b:

$$h = 0{,}00006\, m\, \frac{PL^2}{b^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (237)$$

pour une valeur déterminée de h:

$$b = 0{,}039\sqrt[3]{m}\,\sqrt[3]{\frac{P L^2}{h}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

et enfin, pour une valeur donnée du rapport $\frac{h}{b}$:

$$h = 0{,}088\sqrt[4]{m}\,\sqrt[4]{\left(\frac{h}{b}\right)^3}\sqrt{L\sqrt{P}} \quad . \quad . \quad (239).$$

Dans cette dernière formule, on a:

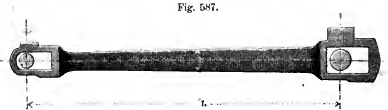
pour

$\frac{h}{b}$ =	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
$\sqrt[4]{\left(\frac{h}{b}\right)^3}$ =	1,36	1,42	1,49	1,55	1,62	1,68	1,74	1,80	1,87	1,93	1,99.

C'est dans les locomotives qu'on rencontre les applications les plus nombreuses de ce genre de bielles. La section rectangulaire y est à peu près exclusivement employée, d'abord par ce qu'elle est plus facile à installer et, en second lieu, parce qu'elle est plus avantageuse au point de vue du fouettement, sa plus grande dimension se trouvant parallèle au plan de la manivelle. Le coefficient de sécurité a une valeur très-faible, c'est-à-dire que la bielle est exécutée aussi légère qu'il est possible de le faire pour maintenir, entre des limites assez étroites, les mouvements de perturbation; on a, en même temps, l'avantage de réduire l'action du fouettement, laquelle, ainsi que nous l'avons indiqué précédemment, est directement proportionnelle au poids du corps de la bielle.

Dans les bielles de pistons des locomotives, le coefficient m varie de 2 à 1,5, pour la section moyenne. A partir de ce point, la hauteur diminue jusqu'à l'une des extrémités et finit par n'être plus que 0,8 à 0,7 de la hauteur au milieu; dans les bielles en acier, il arrive assez fréquemment qu'à cette extrémité les efforts de pression et de tension atteignent 5 k. La fig. 587 représente une bielle de piston de locomotive. A partir du

Fig. 587.



milieu, la hauteur h va en croissant jusqu'à la tête qui embrasse le bouton de la manivelle, ce qui a pour résultat de faciliter la construction et le raccordement du corps avec la tête de la bielle.

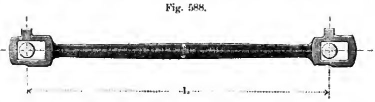
2e Exemple. Dans une locomotive, la pression sur la bielle de transmission $P = 13000^k$, la longueur L de la bielle $= 1830^{mm}$ et le rapport $\frac{h}{b} = 2,5$. Pour $m = 1,5$, c'est-à-dire $\sqrt[4]{m} = 1,1$, on doit, d'après la formule (239), prendre: $h = 0,088 \cdot 1,1 \cdot 1,99 \sqrt{1830 \sqrt{13000}} = 0,088 \cdot 1,1 \cdot 1,99 \cdot 456,7 = 88^{mm}$ et, par suite, $b = 0,4 \cdot 88 = 35^{mm}$. Dans une bielle exécutée avec les mêmes données (Borsig), on a trouvé: $h = 85^{mm}$, $b = 36^{mm}$. D'autres bielles du même genre, d'une bonne construction, ont donné les résultats suivants:

$$P = 11500^k,\quad L = 1654^{mm},\quad h = 85^{mm},\quad b = 33^{mm}$$
$$P = 14600^k,\quad L = 1700^{mm},\quad h = 95^{mm},\quad b = 36^{mm}.$$

Pour ces deux pièces, le coefficient de sécurité se trouve compris entre 1,5 et 1,6.

Dans les bielles d'accouplement des locomotives, l'action du fouettement est beaucoup plus prononcée que dans les bielles de transmission. C'est au milieu que se produit le maximum de flexion et, par suite, c'est en ce point que la section doit avoir la plus grande valeur. La fig. 588 représente une bielle de ce genre. Les coussinets sont munis de clavettes de serrage de chaque côté du tourillon, de manière que le rapprochement de ces coussinets puisse s'opérer, sans modifier la longueur de la bielle; c'est également dans le même but, qu'on donne aux deux tourillons la même grandeur, afin que l'usure soit sensiblement égale

Fig. 588.



pour tous les deux. Dans le calcul de la section du corps de la bielle, on suppose les deux roues couplées soumises, à leurs circonférences, à une même fraction de la résistance. Par conséquent, avec deux paires de roues couplées, l'effort sur la bielle d'accouplement est la moitié de la force de la bielle de transmission; avec trois paires de roues couplées, l'effort sur la première bielle d'accouplement est égal aux $\frac{2}{3}$ de cette force, tandis que celui qui s'exerce sur la seconde n'en est que $\frac{1}{3}$. Mais il

convient de tenir compte de ce fait que, dans certaines circonstances, l'une des roues peut glisser, ce qui conduit à ne pas prendre le coefficient m aussi faible pour les bielles d'accouplement que pour celles de transmission. On doit donc recommander de ne jamais descendre, pour m, au-dessous de 2 et même de se tenir un peu au-dessus, surtout dans le cas de deux roues couplées. Dans ces conditions, le glissement d'une roue ne peut jamais avoir pour résultat de créer un danger immédiat de rupture pour la bielle d'accouplement.

3e Exemple. La locomotive de l'exemple précédent ayant deux paires de roues couplées, l'effort exercé sur la bielle d'accouplement est $P = \frac{13000}{2} = 6500^{k}$. *Si nous supposons, en outre, qu'on ait:* $L = 2563^{mm}$ *et* $\frac{h}{b} = 2,5$, *et si nous prenons* $m = 2$, *la formule (239) donne:* $h = 0,088 \cdot 1,19 \cdot \dot{1},99 \sqrt{2563 \sqrt{6500}} = 0,088 \cdot 1,19 \cdot 1,99 \cdot 454,42 = 99^{mm}$ *et, par suite,* $b = 0,4 \cdot 99 = 39^{mm}$. *En exécution, on a pris, pour ces mêmes données,* $h = 98^{mm}$, $b = 39^{mm}$. *Les mesures, relevées sur d'autres bielles d'accouplement ont donné, pour les coefficients de sécurité, 1,9, 2,11, 2,8.*

§ 245.

Corps de bielles à nervures et à ailettes.

La forme de section en croix, dont nous avons déjà signalé l'emploi pour certains arbres, convient spécialement bien pour les corps de bielles en fonte. Dans ce cas encore, on commence par tracer le corps idéal à section circulaire (calculé pour la fonte), puis on choisit le profil des hauteurs et on détermine le profil des largeurs. Si, pour une position quelconque, on désigne par

δ le diamètre du corps idéal à section circulaire,

h la hauteur des nervures,

b la largeur ou l'épaisseur de ces nervures,

on doit choisir b de manière à ce qu'il satisfasse à la relation:

$$\frac{\delta}{h} = \frac{b}{h} \sqrt[4]{\frac{16}{3\pi}} \sqrt[4]{\left(\frac{b}{h}\right)^3 + \frac{h}{b} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (240).$$

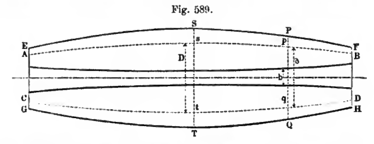
La table suivante facilite l'emploi de cette formule.

$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$	$\frac{\delta}{h}$	$\frac{b}{h}$
0,643	0,10	0,700	0,14	0,748	0,18	0,816	0,25	0,901	0,36
0,653	0,11	0,714	0,15	0,758	0,19	0,831	0,27	0,928	0,40
0,673	0,12	0,724	0,16	0,768	0,20	0,855	0,30	0,958	0,45
0,690	0,13	0,736	0,17	0,789	0,22	0,872	0,33	0,987	0,50

Si on veut déterminer le poids du corps de la bielle, on peut recourir à la table du § 98.

1er Exemple. Dans la fig. 589, ABCD désigne le corps idéal, à section circulaire, pour la bielle en fonte à construire; EFGH est le profil

Fig. 589.



des hauteurs, déterminé au sentiment Si on suppose, par exemple, que le rapport de ST à st soit 1,5, on aura $\frac{\delta}{h} = 0,667$ *et, d'après la table (colonne 1 et 2, ligne 3), on doit prendre, pour l'épaisseur des nervures,* $b = 0,12\,h = 0,12\,ST$. *Si* $PQ = 1,4\,pq$, *on a, pour la position P, le rapport* $\frac{\delta}{h} = \frac{1}{1,4} = 0,7$ *et la table donne, pour l'épaisseur de la nervure,* $b = 0,14\,PQ$.

Pour arriver à une construction légère des bielles de locomotives, on a été conduit à adopter la forme de section à nervures ou à double T (Krauss à Munich). La fig. 590 représente une bielle d'accouplement avec un corps à section de ce genre.

Fig. 590.



Ce corps s'obtient en évidant une pièce pleine en acier (au moyen d'une machine à percer longitudinale); ce mode de construction ne permet, qu'un léger renflement extérieur qui n'est pas visible sur la figure, en raison de la petitesse de l'échelle. La section peut être exécutée avec un profil formé de lignes droites ou arrondies, fig. 591. En négligeant l'influence

Fig. 591.

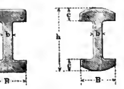


Fig. 592. Fig. 593.



de ces parties arrondies et en conservant les notations précédentes, on trouve, pour le plus petit moment d'inertie de la section:

$$J = {}^1/_{12}\,(2\,c B^3 + (h - 2\,c) b^3).$$

En égalant ce moment d'inertie à celui d'une section rectangulaire, de hauteur h et de largeur b_0 (v. § 222), déterminée en tenant compte des forces agissant sur la bielle, nous aurons:

$$\frac{b_0}{b} = \sqrt[3]{1 + 2\,\frac{c}{h}\left[\left(\frac{B}{b}\right)^3 - 1\right]} \quad . \quad . \quad . \quad (241).$$

Formule qui permet d'obtenir facilement des valeurs numériques, lorsqu'on a choisi les rapports $\frac{c}{h}$ et $\frac{B}{b}$.

2e Exemple. Une bielle d'accouplement à nervures (type de Krauss) a, comme dimensions de la section du milieu, $h = 80^{mm}$, $b = 10^{mm}$, $B = 47^{mm}$, $c = 15^{mm}$; de plus, $L = 2450^{mm}$ et $P = 4950^{k}$. Pour déterminer le coefficient m, nous avons d'abord, d'après la formule 241): $b_0 = b\sqrt[3]{1 + 2\,{}^3/_8\,(4,7^3 - 1)} = 10 \cdot 4,28$, soit 42^{mm}; la formule (237) donne ensuite: $m = \frac{100000}{6}\,\frac{h\,b_0^3}{PL^2} = \frac{100000 \cdot 80 \cdot 42^3}{6 \cdot 4950 \cdot 2450^2} = 3\,{}^1/_3$ approximativement, valeur légèrement supérieure à celles que nous avons indiquées précédemment. La surface de la section à nervures est à celle de la section pleine dans le rapport $\frac{2 \cdot 15 \cdot 47 + 50 \cdot 10}{80 \cdot 43} = \frac{191}{344}$. Le poids total de la pièce, complètement prête à recevoir les tourillons, n'est que de 62 kilogr.

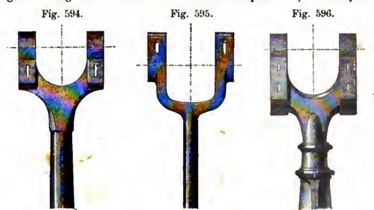
§ 246.

Bielles en fer et en fonte.

Les deux figures de la page précédente représentent, la première une bielle en fer, dont le corps est à section circulaire, la seconde une bielle en fonte à section en croix. La bielle en fer, à l'extrémité supérieure, se termine par une chape, en forme de fourchette, destinée à recevoir un tourillon, tandis que l'extrémité inférieure présente la forme ordinaire. Dans la bielle en fonte, le corps à ailettes se trouve séparé, et avec raison, des parties correspondant aux têtes, au moyen d'anneaux pleins d'une petite longueur. La tête inférieure se compose d'une partie allongée à quatre faces; celle qui est tournée vers la manivelle est plane et sa longueur est légèrement supérieure à celle du bras de cette manivelle, augmentée du rayon de son moyeu; cette disposition permet de rapprocher beaucoup les plans moyens de la bielle et la manivelle.

Les trois figures suivantes donnent quelques formes spéciales de têtes de bielles à fourchette. Dans la fig. 594, la longueur de la fourchette est beaucoup plus faible que dans la fig. 592. La disposition de la fig. 595 correspond à un corps de section rectangulaire, dont les petites faces sont arrondies. Enfin la fig. 596 convient surtout pour les bielles en fonte d'une très-grande longueur. Dans ces différentes dispositions, les chapes

Fig. 594. Fig. 595. Fig. 596.



des coussinets des deux branches sont fixes et le rapprochement des coussinets se produit, comme dans le dispositif de Sharp, par l'intermédiaire d'une plaque. On a parfois à exécuter des bielles composées de cadres rectangulaires ou en forme de trapèze. Les bras d'un cadre de ce genre doivent être déterminés comme des bielles isolées, les parties correspondant aux têtes, comme les croisillons, que nous allons examiner, avec quelques détails, dans le chapitre suivant.

XVII. Traverses.

§ 247.

Des différentes espèces de traverses.

On désigne, sous le nom de *traverses* ou de *croisillons*, des pièces à tourillons, destinées à relier les bielles aux organes qui doivent leur communiquer leur mouvement, comme les tiges de pistons de machines à vapeur, ou, au contraire, à ceux

qu'elles doivent commander, comme les tiges de pistons de pompes à eau. Les traverses peuvent être munies de tourillons simples, doubles ou à fourchette; ces deux dernières espèces de tourillons sont celles qu'on utilise de préférence. Les traverses sont d'ailleurs reliées à des guides, qui les obligent à décrire un chemin déterminé. On obtient ordinairement ce résultat, au moyen de guides à articulations (parallélogrammes etc.) ou de glissières; quelquefois aussi la traverse ne porte aucune de ces pièces spéciales et se trouve simplement guidée par les tiges auxquelles elle est reliée (tiges de pistons, tiges de tiroirs). Nous devons, d'après cela, diviser les traverses en trois classes:

1. *Traverses à mouvement libre,*
2. *Traverses avec guides à articulations,*
3. *Traverses avec glissières.*

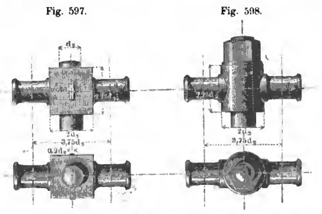
Dans cette division nous n'avons tenu compte, en aucune façon, du genre de tourillon employé. Nous allons indiquer maintenant quelques-unes des applications les plus importantes des traverses.

§ 248.

Traverses à mouvement libre.

Les fig. 597 et 598 indiquent deux dispositions de petites traverses en fer, à mouvement libre, munies de tourillons doubles.

Fig. 597. Fig. 598.



Le diamètre du trou, ménagé pour le passage de la tige du piston, ne doit pas être inférieur à d_2.

La traverse, représentée par la fig. 599, est une extension des deux formes précédentes. On obtient, pour cette pièce, de bonnes proportions, en prenant pour la hauteur h au milieu:

$$h = 2{,}5\, d_2 + \frac{A}{14} \quad \cdots\cdots \quad (242)$$

A désignant la longueur du bras. La pression du tourillon agissant précisément sur ce bras, comme dans le levier de la fig. 519, on doit, d'après la formule (220), prendre, pour sa largeur b, supposée constante:

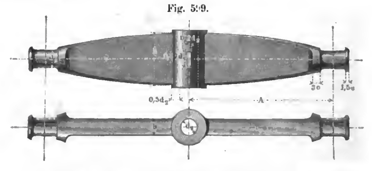
$$b = \frac{P}{2} \frac{A}{h^2} \quad \cdots\cdots \quad (243).$$

En admettant que d_2 ait été calculé par la formule (217), qui, pour le fer, donne $d_2 = \sqrt{0{,}5\, P}$, la relation précédente devient:

$$\frac{b}{d_2} = \frac{d_2}{h} \frac{A}{h}.$$

La courbe du profil peut se tracer par l'un des procédés indiqués au § 101.

Fig. 599.



1er Exemple. Pour la traverse, représentée par la fig. 599, on donne la charge $P = 4000^k$ et la longueur du bras $A = 400^{mm}$. En prenant, pour cette pièce, des tourillons d'extrémités ordinaires, nous aurons $d_2 = \sqrt{2000} = 45^{mm}$. Maintenant la formule (242) donne: $h = 2{,}5 \cdot 45 + \frac{400}{14} = 112{,}5 + 28{,}6$ ou $141^{mm},1$; nous prendrons 140^{mm} et nous trouverons alors: $b = 45 \cdot \frac{45}{140} \cdot \frac{400}{140} = 400^{mm}$. L'épaisseur de la paroi du moyeu est $0{,}5\, d_2 = \frac{45}{2}$, ou 23^{mm}, la hauteur de la clavette est égale à $0{,}67 \cdot 45 = 30^{mm}$ et sa largeur à $0{,}2 \cdot 45 = 9^{mm}$.

2e Exemple. Le bateau à vapeur à roues, La Plata, de 3000 chevaux a des cylindres à vapeur de 2616^{mm} de diamètre, dans lesquels le

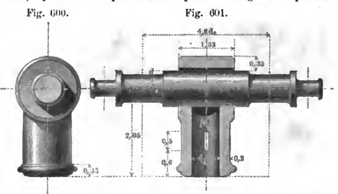
maximum de pression est de $1^{3}/_{4}$ d'atmosphère, ce qui correspond, par piston, à une charge P de 102000^{k} en nombre rond. Les puissantes traverses des pistons présentent la disposition de la fig. 599 et ont été exécutées avec une longueur de bras $A = 1727^{mm}$. Le constructeur (Napier) a pris: $h = 711^{mm}$, $b = 178^{mm}$; le diamètre d'un tourillon $d_2 = 254^{mm}$ et la longueur $= 381^{mm}$, dimensions qui sont presque exactement celles du § 80 pour les tourillons ordinaires d'extrémités; la hauteur du moyeu est de 762, l'épaisseur de ses parois de 127^{mm} et enfin le diamètre intérieur de 254^{mm}. Les formules précédentes nous auraient donné: $d_2 = 225^{mm}$, $h = 685^{mm}$, $b = 185^{mm}$.

§ 249.

Traverses avec guides à articulations.

Les traverses, qui doivent être munies de guides à articulations, comportent, en dehors de leurs tourillons d'appui, deux autres tourillons, qui forment la prolongation des premiers. Les fig. 600 et 601 représentent une traverse en fer, avec tourillons-guides, qui convient parfaitement pour les tiges de pistons de

Fig. 600. Fig. 601.



machines à balancier et qui a été, dès l'origine, employée par Watt. Les nombres proportionnels, inscrits sur les figures, se rapportent au même module que celui des têtes de bielles:

$$d_1 = \sqrt{P} + 5^{mm} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (244)$$

où P est la charge totale de la traverse. Le même module se trouve également utilisé dans les autres traverses qui nous restent à examiner. La charge P_3 d'un tourillon-guide peut se déduire de la charge P_2 d'un tourillon d'appui de la traverse par la formule:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{sin.\alpha}{cos.\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (245)$$

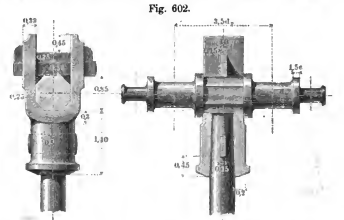
où α désigne le plus grand angle que fait, avec la direction du mouvement de la traverse, la bielle appliquée au tourillon d_2 et β l'angle que le contre-guide, articulé sur le petit tourillon, fait avec la normale à cette direction, lorsque α est un maximum; le dernier angle est facile à déterminer graphiquement.

Exemple. Si l'angle α, à son maximum, est de 20° et si, en même temps, $\beta = 15°$, on a: $\frac{\sin.\alpha}{\cos.\beta} = \frac{0,3420}{0,9659} = 0,35$; la formule (245) donne alors: $P_3 = 0,35\ P_2$.

Ordinairement, l'angle α n'atteint 20°, ou plus, que dans le cas où la bielle agit sur une manivelle, ce qui se présente, par exemple, dans les machines à vapeur à action directe; lorsqu'au contraire la bielle est reliée à un balancier, l'angle α dépasse rarement 10°.

La fig. 602 représente une seconde forme de traverse en fer, avec tourillons-guides. Dans cette disposition, il est très-

Fig. 602.



facile de supprimer la liaison entre la tige du piston et la tête de la traverse qui la reçoit, et c'est là un avantage qui rend son emploi très-satisfaisant pour les machines à action directe.

§ 250.

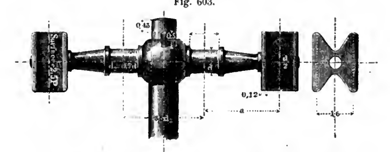
Traverses guidées par des glissières.

Les traverses, guidées par des glissières, sont celles qu'on emploie, de préférence, pour les machines à vapeur et les

pompes; elles présentent des dispositions très-variées, qui se distinguent essentiellement par le nombre et le mode d'emploi des glissières.

La fig. 603 représente un type de traverse très-employé, qui comporte quatre glissières. Lorsque la machine tourne constamment dans le même sens et que la pression sur le piston agit toujours dans la direction de son mouvement, ou toujours dans le sens directement opposé, une seule des deux faces de

Fig. 603.

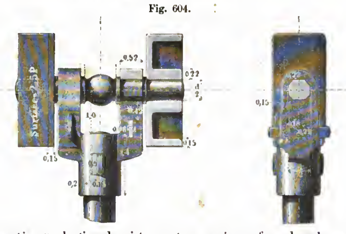


chaque glissière se trouve pressée et, dans ce cas, la seconde face a simplement pour but de détruire l'effet des efforts accidentels, qui viendraient s'exercer en sens contraire de la pression précédente. Lorsqu'au contraire la pression sur le piston s'exerce, tantôt dans la direction de son mouvement et tantôt en sens opposé, la traverse se trouve pressée alternativement sur ses deux faces. Dans les machines à vapeur, ce changement de direction de la pression sur la traverse ne se produit pas seulement dans la marche à contre-vapeur; il est également une conséquence forcée de l'avance du tiroir; dans ce cas, il est vrai, cet effet ne se produit qu'aux extrémités de la course. Les surfaces frottantes de la traverse doivent, autant que possible, être composées d'une matière plus douce que celle des glissières, afin d'arriver pour ces dernières pièces à une usure plus faible. Pour le même motif, il convient que la surface de chaque partie frottante ne soit pas inférieure à 2,5 P, en désignant par P la pression exercée sur le piston; quelquefois même, on prend une valeur double, soit 5 P. Avec les rapports qu'on admet ordinairement entre les longueurs de la bielle et le bras de la manivelle, la pression p exercée, par unité de surface, sur les parties frottantes, est environ $^{1}/_{12}{}^{k}$ dans le premier cas et $^{1}/_{24}{}^{k}$

dans le second. Les pièces frottantes sont ici fixées sur des tourillons, qui terminent l'axe de la traverse. En admettant qu'on fasse le diamètre de ces tourillons égal à $\frac{d}{2}$, comme l'indique la figure, il convient d'adopter le nombre 3 pour leur longueur proportionnelle. Lorsque la longueur du bras de la traverse devient considérable, il peut être nécessaire de prendre, pour le diamètre d' des tourillons, une valeur supérieure à celle d'un tourillon d'extrémité ordinaire; dans ce cas, on doit, pour plus de sûreté, déterminer ce diamètre en considérant le bras de la traverse comme un fuseau d'axe de longueur a (v. § 88 et 96).

Dans la traverse, représentée par la fig. 604, l'effort est transmis par un tourillon à fourchette, qui affecte, en outre, la forme sphérique; sur la figure, la pièce à fourchette, qui est

Fig. 604.

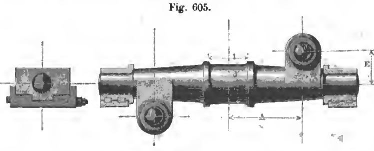


clavetée sur la tige du piston, est supposée en fer; dans le cas où elle devrait être en fonte, il faudrait augmenter les dimensions de la douille, qui reçoit la tige, porter son épaisseur à 0,28 d_1 et sa longueur à 1,75 d_1. Les glissières se trouvent ici notablement plus rapprochées de la tige du piston que dans le dispositif précédent.

Dans les machines à vapeur des navires à hélice, il s'est introduit peu à peu un système de construction, qui exige une traverse d'une disposition particulière. C'est le système avec bielles en retour, qui permet de placer l'arbre coudé entre le couvercle du cylindre et la traverse; la tige du piston se trouve

alors décomposée en deux tiges parallèles, dont le plan est incliné par rapport à cet arbre. Il existe plusieurs types de traverses de ce genre. La fig. 605 représente celui de Maudslay. La traverse, dont la forme est celle d'un axe ordinaire, porte deux douilles en saillie, destinées à recevoir les tiges du piston. La saillie E de chaque douille dépend du diamètre de l'arbre coudé, tandis que la distance A se détermine d'après la largeur du bras du coude. Les coulisseaux de la traverse se trouvent en dehors des tiges de piston. Dans d'autres dispositifs (celui de Ravenhill, par exemple) ils sont établis, au contraire, entre le tourillon du milieu d' et les tiges de piston, qui doivent être pour cela suffisamment écartées. La garniture inférieure de chaque coulisseau est en bronze et est maintenue au moyen de clavettes.

Fig. 605.

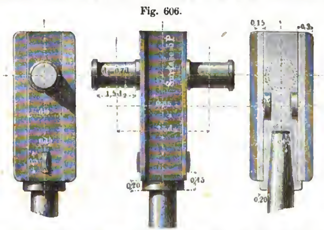


On doit déterminer les dimensions de la traverse comme celles d'un axe, en ayant soin de ne pas perdre de vue que les forces $\frac{P}{2}$, appliquées au bras E, tendent à produire non seulement une flexion, mais encore une torsion du corps de la traverse. Lorsqu'on a déterminé le diamètre d' du tourillon, on doit prendre, pour sa longueur, une valeur telle que la pression, par unité de surface, ne soit pas trop faible (v. § 218). Dans les machines anglaises, la pression, par unité de surface, sur le tourillon, varie de $0^k,6$ à 1^k et même $\frac{4}{3}^k$. Quant au diamètre δ des boulons, il convient ici encore de le déterminer par la formule (229).

Fig. 606. Traverse de Stephenson. Dans ce dispositif, les glissières se réduisent, en réalité, à une seule, de telle sorte que la traverse n'a plus que deux faces frottantes, au lieu d'en avoir quatre, comme dans les types précédents. Les deux tourillons de la pièce intermédiaire, qui est en fer, s'engagent dans les deux branches d'une bielle fendue sur une grande longueur.

Comme garniture des surfaces frottantes, le bronze est encore ici très-convenable; seulement, pour rester dans les conditions des

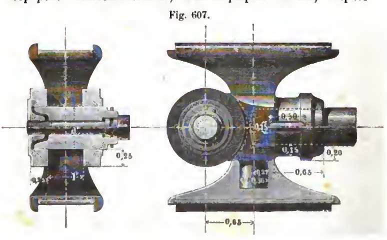
Fig. 606.



types précédents, il convient de prendre chacune de ces surfaces égale à 5 *P*. Cependant, dans les locomotives, par suite de l'espace restreint dont on dispose, on rencontre souvent des surfaces plus petites, qui s'abaissent, par exemple, jusqu'à 2,5 *P*.

La fig. 607 représente une disposition analogue, adoptée par Borsig, et qui comporte un tourillon à fourchette, pour lequel il conviendrait que le produit des dimensions $l' \cdot d'$ ne fut pas trop petit. Malheureusement, dans la plupart des cas, l'espace

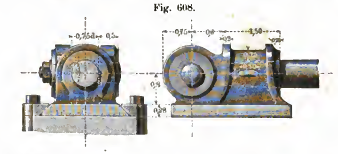
Fig. 607.



limité dont on dispose ne permet pas de remplir cette condition et il n'est pas rare de rencontrer des tourillons de ce genre, où la pression p, par unité de surface, s'élève à 2^k, 3^k et même au delà. On comprend que, dans de semblables conditions, le tourillon et les coussinets de la bielle soient exposés à de fréquents échauffements et à une usure rapide. Le mode de fixation du tourillon, tel que l'indique la figure, est assez remarquable. La pièce en fonte, qui forme le corps du coulisseau, est garnie de plaques de bronze, ajustées avec soin, qu'il est possible de rapprocher facilement au moyen de feuilles de cuivre ou de zinc, intercalées entre elles et les faces de la pièce en fonte.

La fig. 608 représente une traverse, qui n'est guidée que d'un seul côté. Cette disposition n'est appliquée que dans les cas où le mouvement de rotation doit s'effectuer dans un seul sens, toujours le même, et où, par suite, la direction de la pression sur la glissière reste constante. Pour se mettre à l'abri

Fig. 608.

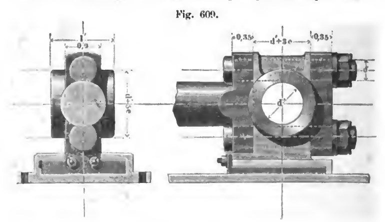


des efforts accidentels, qui peuvent se produire en dehors du plan vertical conduit par l'axe de la traverse, et de l'action de la contrepression due à l'avance, dans les machines à vapeur (v. p. 569), le patin de la traverse se termine, sur ses côtés, par deux parties taillées en biseau (ou mieux encore à angle droit), qui s'engagent entre deux rebords de même inclinaison, solidement fixés sur la face horizontale de la glissière. Lorsqu'on emploie la fonte, la surface frottante de la traverse ne doit jamais être inférieure à 5 P et il convient même de lui donner, autant que possible, une valeur plus considérable.

La fig. 609 indique une autre forme de traverse à un seul patin, qui est empruntée à une machine de bateau de Humphry Tennant. Dans cette disposition, la pression, transmise par la

traverse, s'exerçant suivant deux directions opposées, le recouvrement de la glissière est notablement plus prononcé que dans le

Fig. 609.

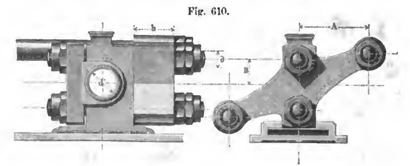


cas précédent. La traverse, au lieu de porter un tourillon, forme, en réalité, un palier, qui correspond à une tête de bielle d'une construction analogue à celle de la fig. 573. Pour corriger le jeu dû à l'usure, on a recours à l'emploi de plaques en cuivre. Celle qui garnit la rainure verticale se trouve remplacée, à chaque changement, par une autre plus mince, tandis que, pour la rainure horizontale, il convient, au contraire, de maintenir le contact, sur les deux faces de la glissière, en introduisant chaque fois une plaque plus épaisse que la précédente. Ce dispositif mérite d'être recommandé dans un assez grand nombre de circonstances. La pièce intermédiaire, qui ici est supposée en bronze, peut également être exécutée en fonte, à la condition de la modifier convenablement, pour permettre de munir la douille du tourillon d'une garniture en métal blanc. Le module à adopter, pour les nombres proportionnels, est celui de la formule (230), où on doit introduire, pour d, le diamètre du tourillon normal d'extrémité, supposé en fer. Quant au diamètre δ des boulons, il se détermine par la formule (229).

La fig. 610 représente un troisième type très-élégant de traverse à un seul patin, qui a été imaginé par Napier, pour les machines à vapeur à bielles en retour, dont il a été question précédemment. Ici encore la bielle est supposée terminée par une tête à fourchette. La pièce intermédiaire est en fonte; la

distance B de chaque boulon à l'axe est réduite au strict minimum, afin d'arriver à une hauteur de traverse aussi faible que

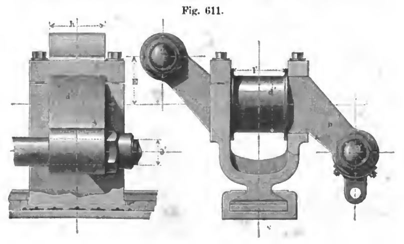
Fig. 610.



possible. La dimension h des bras se détermine en fonction de leur largeur, d'après une méthode connue (cas I et II, § 6). Les boulons, dont le diamètre δ est donné par la formule (229), sont munis de contre-écrous. Pour que cet assemblage donne de bons résultats, il est essentiel que les coussinets portent parfaitement l'un sur l'autre.

Un dernier dispositif de traverse, du genre de ceux que nous venons d'examiner, et qui n'est pas moins remarquable, est celui de Maudslay, fig. 611. La tête de la bielle présente la forme ordinaire, celle de la fig. 585, par exemple. La pièce, coudée en forme de Z, est encastrée dans une seconde pièce, qui

Fig. 611.



se termine par un patin et qui est en fer. La largeur b' de chaque bras se calcule d'après les moments des forces données, lorsqu'on a choisi la valeur de l'autre dimension h, qui ici a été prise égale à d'; ce diamètre d' se détermine lui-même comme nous l'avons indiqué au chapitre des axes. Le diamètre δ' des boulons doit être calculé par la formule (229) et il doit être au moins égal à la valeur que donne cette même formule pour δ. Sur la droite de la figure, on doit encore remarquer une douille, fixée par des boulons et destinée à recevoir une tige de pompe ou une de ces pièces accessoires analogues, qui se rencontrent fréquemment dans les traverses des machines de bateaux. La figure à gauche donne une coupe de la glissière et du patin, où se trouve représentée la garniture en métal blanc, qui a été coulé sur la surface en bronze, terminant le patin. Cette dernière pièce, qui peut être retirée, lorsqu'on a enlevé la pièce de recouvrement, visible sur la droite et fixée par des boulons, reçoit une plaque de cuivre, lorsqu'il y a lieu de corriger le jeu dû à l'usure. Les deux dernières dispositions de traverses, que nous venons de décrire, ont résolu, avec un succès complet, un des problèmes de construction les plus compliqués et sont devenus de véritables types.

§ 251.

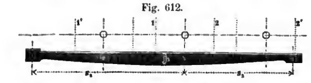
Glissières.

Les glissières se font en fer, en acier ou en fonte. Lorsque toute la pression porte sur une glissière unique, comme dans les derniers types que nous venons d'examiner, et que cette glissière n'est appuyée qu'à ses deux extrémités, écartées l'une de l'autre de la quantité $s_1 + s_2$, il convient de la calculer au point de vue de la résistance à la flexion. Si on désigne par Q la pression exercée sur la glissière, pour la position la plus défavorable de la manivelle, c'est-à-dire celle où cette manivelle est perpendiculaire à la glissière, par s_1 et s_2 les distances du milieu de la traverse aux deux points de fixation, fig. 612, le moment de flexion de la glissière se trouve représenté par $Q \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}$ et on en déduit, pour la hauteur h, en se donnant la largeur b:

$$h = \sqrt{\frac{6}{\mathfrak{S}} \frac{Q}{b} \frac{s_1 s_2}{s_1 + s_2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (246).$$

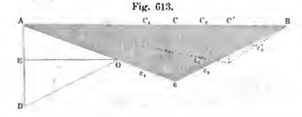
Avec le fer ou l'acier, on admet pour $\mathfrak{S}$ une valeur assez faible, environ 5^k, afin que la flexion de la glissière ne soit pas trop prononcée. Cette flexion est, en effet, plus nuisible qu'on ne le suppose ordinairement, puisqu'en supprimant, sur une

Fig. 612.



certaine longueur, le contact entre la glissière et la surface du patin, elle a, en réalité, pour résultat d'augmenter notablement la pression, par unité de surface, des parties qui restent en contact. Avec les dimensions ordinaires des glissières de locomotives, on trouve fréquemment des flexions de 1^{mm} et au delà (jusqu'à $2^{mm},5$), qui sont suffisantes pour donner une courbure appréciable. Lorsqu'on veut opérer avec une plus grande exactitude, on peut recourir au procédé graphostatique, qui se trouve indiqué par la fig. 613. Dans le polygone des forces, AD représente la force Q pour la position C du point d'application de la pression, tandis que C_1 et C_2 correspondent aux positions 1 et 2 des extrémités du patin, dans la fig. 612. On obtient ainsi la surface des moments ABc_2c_1; en opérant de même pour une nouvelle position C' de la traverse, on détermine une

Fig. 613.

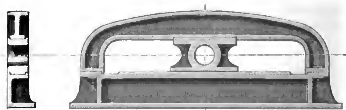


nouvelle surface des moments $ABc'_2c'_1\ldots$ etc. La courbe enveloppe des divers polygones, ainsi obtenus, donne le profil définitif de la surface des moments qu'il convient d'utiliser pour la détermination des dimensions.

La fig. 614 représente un cadre à glissières en fonte, qui est surtout avantageux dans le cas où la pression s'exerce dans une direction unique (de haut en bas). La glissière inférieure est ici supposée soutenue en tous les points de sa longueur, de

telle sorte que sa flexion peut être considérée comme nulle. La section, figurée sur la gauche, indique la disposition adoptée pour

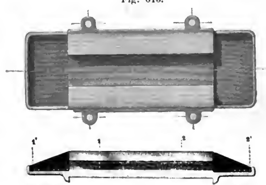
Fig. 614.



le graissage et qui donne de très-bons résultats; la glissière inférieure et la surface supérieure du coulisseau de la traverse sont munies de rebords, qui forment de véritables réservoirs d'huile. Les glissières supérieure et inférieure sont reliées par des boulons, qui, dans le cas où la machine tourne dans les deux sens (machines d'extraction des mines), doivent être fortement serrés. Dans ce cas, on emploie aussi fréquemment une disposition dans laquelle les deux glissières sont réunies par un cadre d'une seule pièce.

La fig. 615 représente une glissière pour une traverse à un seul patin, analogue à celle de la fig. 610, par exemple. Dans cette disposition, la question du graissage se trouve parfaitement résolue. Les rebords forment, à chaque extrémité, un véritable auge, où la surface mobile, dans chacune des positions 1 — 1′, 2 — 2′, se trouve baignée sur la moitié de sa longueur,

Fig. 615.



de telle sorte qu'elle se trouve complètement graissée à chaque course. On peut se demander s'il ne conviendrait pas de chercher une disposition analogue pour les glissières de locomotives, bien qu'on soit exposé, dans ce cas, à rencontrer, dans le défaut de place, un obstacle sérieux.

XVIII. Tuyaux et assemblages de tuyaux.

§ 252.

Formules empiriques relatives à l'épaisseur des parois des tuyaux.

Dans la construction des machines, on emploie surtout des tuyaux de fonte et de fer; les tuyaux d'acier, de bronze, de cuivre, de plomb, de bois, d'argile et de papier bitumé sont d'un usage beaucoup moins répandu. Pour les conduites souterraines d'eau et de gaz, les tuyaux en fonte présentent jusqu'à ce jour des avantages incontestables. Dans ce dernier cas, la question de construction des tuyaux a une importance telle que, pour la détermination de l'épaisseur à donner à leurs parois, on ne tient aucun compte de la pression intérieure, à moins qu'elle ne soit très-considérable, et qu'on préfère recourir à l'emploi de formules purement empiriques. Nous allons donner ici les formules de ce genre, qui sont le plus généralement adoptées.

Si on désigne par D le diamètre intérieur et par δ l'épaisseur de paroi d'un tuyau à établir, ces dimensions étant exprimées en millimètres, on doit prendre, pour δ, les valeurs suivantes:

tuyaux en fonte pour conduites d'eau et de gaz:

$$\delta = 8 + \frac{D}{80} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (247)$$

tuyaux de vapeur en fonte et cylindres de pompes à air:

$$\delta = 12 + \frac{D}{50} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (248)$$

cylindres à vapeur et corps de pompes alésés en fonte:

$$\delta = 20 + \frac{D}{100} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (249)$$

Les dimensions δ et D sont celles qu'on doit avoir après l'alésage.

Exemple. Un tuyau de pompe, de 300mm de diamètre, doit avoir comme épaisseur, d'après la formule (247): $\delta = 8 + \frac{300}{80} = 11^{mm},75$, *soit* 12^{mm}; *pour un tuyau de vapeur de même diamètre, on aurait, d'après la formule (248):* $\delta = 12 + \frac{300}{50} = 18^{mm}$. — *Dans les appareils de forage et d'aération du tunnel du Mont-Cenis, les tuyaux de conduite d'air, de 200mm de diamètre, qui avaient à supporter une pression intérieure de cinq atmosphères et qui, de plus, sur une longueur de 600 à 800 mètres, étaient naturellement soumis à de très-fortes variations de température, auraient dû avoir, comme épaisseur, d'après la formule (247):* $\delta = 8 + \frac{200}{80} = 10^{mm},5$; *on leur a donné* 10^{mm}. — *Pour un cylindre à vapeur, de 400mm de diamètre, l'épaisseur est, d'après la formule (249):* $\delta = 20 + \frac{400}{100} = 24^{mm}$.

Relativement à l'épaisseur des parois des cylindres à vapeur, les différentes usines de construction n'ont guère d'autre règle que la routine; dans certains cas, cependant, on a égard, pour cette épaisseur, à la qualité de la fonte dont on dispose et au but que doit remplir la machine; ces considérations peuvent aussi s'étendre aux tuyaux de vapeur et d'eau. Dans les machines à vapeur de bateaux, d'un faible tirant d'eau, on rencontre souvent des cylindres d'une épaisseur extrêmement faible, inférieure même à la moitié de celle que fournirait la formule (249), tandis que dans les machines à vapeur des grands navires, pour lesquels la considération de la charge, produite par le moteur, a une bien moindre importance, les résultats, donnés par cette formule, présentent une très-grande concordance avec les dimensions adoptées dans la pratique. Cette même formule donne également des épaisseurs très-convenables pour les cylindres des machines fixes.

Les tuyaux en fer étirés se trouvent employés pour les conduites d'eau et de gaz jusqu'au diamètre intérieur de 150^{mm}; on obtient, pour leurs épaisseurs, des valeurs qui concordent avec celles qu'on rencontre dans la pratique, lorsqu'on les détermine par la formule:

$$\delta = 2 + \frac{D}{12} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (250).$$

Les tuyaux en acier n'ont été, jusqu'à présent, que d'un usage assez limité; toutefois, on commence à les utiliser de plus en plus pour les chaudières à vapeur; en outre, grâce à l'extension donnée à la fabrication de l'acier, il est à espérer que ce métal ne tardera pas à être utilisé pour la construction des presses hydrauliques à pression très-élevée.

Les tuyaux en fer, obtenus par la rivure de tôles, sont étudiés au § 256.

Les tuyaux en cuivre et en laiton s'exécutent avec des épaisseurs qui correspondent sensiblement à la moitié de celles données par la formule (250).

Les tuyaux en plomb se fabriquent mécaniquement et se trouvent dans le commerce, de telle sorte que le constructeur de machines n'a pas à se préoccuper de la détermination de leurs épaisseurs, qui sont toutes comprises entre 3^{mm} et 6^{mm}.

Les tuyaux en bois de sapin d'Herzog, dont le mode de construction est analogue à celui des tonneaux, ont une épaisseur variable de 80 à 120^{mm}, qui se détermine d'ailleurs entièrement d'après les conditions de construction.

§ 253.

Calcul des tuyaux soumis à une forte pression intérieure.

La formule de Lamé, indiquée au § 19, donne, pour l'épaisseur des tuyaux soumis à une forte pression intérieure:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\mathfrak{S}+p}{\mathfrak{S}-p}} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (251)$$

p désignant la pression intérieure, par unité de surface, et $\mathfrak{S}$ le maximum de tension de la matière, dans la paroi du tuyau. Pour des tuyaux de dimensions déterminées, le maximum de tension est donné par l'expression:

$$\mathfrak{S} = p\,\frac{\left(\frac{D}{2} + \delta\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2}{\left(\frac{D}{2} + \delta\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (252).$$

Ce maximum est, comme on le voit, directement proportionnel à la pression intérieure. Lorsque cette pression est donnée en atmosphéres et qu'elle est, par exemple, supérieure de n atmosphères à la pression extérieure, on doit prendre $p = \frac{n}{100}$.

Il est facile, d'après cela, de déterminer les épaisseurs à adopter pour les cylindres de presses hydrauliques, en admettant pour $\mathfrak{S}$ les valeurs suivantes:

Fonte	3 à 7^k	par millim. carré,
Fer	6 à 14^k	- - -

Acier . . . . . 13 à 20^k par millim. carré,
Bronze . . . . . 2 à 5 - - -
Cuivre . . . . . 2 à 2,5 - - -

La table ci-dessus donne une série de valeurs, correspondant à ces tensions et calculées par la formule (251).

Lorsque la valeur de δ est faible par rapport à celle de D, la formule (251) peut être remplacée, avec une approximation suffisante, par la suivante:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{1}{2} \frac{p}{\mathfrak{S}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (253)$$

qui, pour de petites valeurs de p, donne des résultats parfaitement admissibles.

§ 254.

Table relative aux épaisseurs des réservoirs cylindriques soumis à une pression intérieure élevée.

Pression intérieure.		Valeurs de $\frac{\delta}{D}$, pour les valeurs de la tension dans la matière (kil. p. □mm.)								
n Atm.	p K. p. □mm.	$\mathfrak{S}=2$	3	4	5	6	8	10	15	20
50	0,5	0,14	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,03	0,02	0,01
100	1,0	0,37	0,21	0,14	0,11	0,09	0,07	0,05	0,03	0,03
150	1,5	0,82	0,50	0,24	0,18	0,15	0,11	0,08	0,05	0,04
200	2,0	—	0,62	0,37	0,26	0,21	0,15	0,11	0,07	0,05
250	2,5	—	1,66	0,54	0,37	0,28	0,19	0,15	0,09	0,07
300	3,0	—	—	0,82	0,50	0,37	0,24	0,18	0,11	0,08
350	3,5	—	—	1,43	0,69	0,47	0,30	0,22	0,13	0,10
400	4,0	—	—	—	1,00	0,61	0,37	0,26	0,15	0,11
450	4,5	—	—	—	1,71	0,82	0,44	0,31	0,18	0,12
500	5,0	—	—	—	—	1,16	0,54	0,37	0,20	0,14
600	6	—	—	—	—	—	0,82	0,50	0,26	0,16
700	7	—	—	—	—	—	1,43	0,69	0,32	0,22
800	8	—	—	—	—	—	—	1,00	0,40	0,26
900	9	—	—	—	—	—	—	1,68	0,50	0,31
1000	10	—	—	—	—	—	—	—	0,61	0,37

Les traits, dans les diverses colonnes, indiquent que la formule (251) fournit des valeurs imaginaires; ce qui signifie, en d'autres termes, que la paroi du cylindre, soumise aux pressions

correspondant à ces traits, se romprait, dans tous les cas, quelle que fût d'ailleurs son épaisseur. Les parties les plus exposées correspondent aux sections longitudinales du cylindre, de telle sorte qu'en cas de rupture, il doit se produire des fissures, dirigées dans le sens de la longueur, ainsi qu'on a pu, d'ailleurs, le constater assez fréquemment dans la pratique. Le cylindre se trouve également soumis à des efforts de rupture considérables, dans les sections perpendiculaires à l'axe et notamment dans les parties où il se raccorde avec le fond; le danger de rupture est d'ailleurs d'autant plus prononcé que le changement de direction se fait plus brusquement; aussi convient-il d'apporter la plus grande attention au raccordement du cylindre avec le fond.

Les presses hydrauliques, d'une grande puissance, ont le plus souvent des cylindres en fonte, dont l'établissement présente d'autant plus de difficultés que l'épaisseur doit être plus considérable. On cherche, par suite, à réduire cette épaisseur, en admettant une tension assez élevée et, dans ce but, on apporte les plus grands soins dans l'exécution du cylindre, de manière à obtenir une fonte aussi dense et aussi résistante que possible. L'expérience indique qu'on arrive à une matière très-convenable pour les cylindres de presses, en faisant usage de fonte qu'on soumet un certain nombre de fois à la fusion, en ayant soin chaque fois de la couler en plaques minces. On a obtenu également d'excellents résultats par l'addition d'une certaine quantité de fer dans le four à réverbère (métal de Stirling). Il est évident qu'on peut admettre, pour $\mathfrak{S}$, une valeur d'autant plus élevée que les matières premières ont été mieux choisies et que leur mise en œuvre a été exécutée avec plus de soins. Nous avons indiqué précédemment que, pour la fonte, la valeur de $\mathfrak{S}$ pouvait aller de 3 à 7^k. En pratique, on dépasse encore parfois ce dernier nombre; mais il convient de ne le faire que dans les cas tout-à-fait exceptionnels, où l'on est parfaitement sûr de disposer d'une fonte d'excellente qualité. Le bronze donne lieu à des observations du même genre. Le bon cuivre rouge ordinaire n'est pas susceptible de supporter, sans déformations permanentes, des tensions supérieures à 3^k ou $3^k,5$. Si on veut aller au delà, il convient de recourir à l'emploi d'un alliage plus résistant.

Nous allons donner ici quelques exemples, empruntés à la pratique et qui peuvent fournir d'utiles indications.

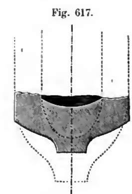
1er Exemple. Pour l'élévation du pont de Conway (1), on a fait usage d'une presse hydraulique, dont les dimensions étaient les suivantes: Diamètre du piston $K = 457^{mm}$, diamètre du cylindre $D = 508$, épaisseur des parois $\delta = 222^{mm}$. La charge à soulever était de 660000^k. La pression de l'eau devait être, dans ce cas, de 402 atmosphères ou de $4^k,02$ par millim. carré et la formule (252) donne alors, pour la tension: $\mathfrak{S} = \frac{(10+8,75)^2+10^2}{(10+8,75)^2-10^2} \cdot 4,02 = 7^k,2$. Le cylindre employé est indiqué par la fig. 616.

2e Exemple. Pour le montage du pont Britannia, on s'est servi de presses hydrauliques de différents genres de construction. L'un des appareils se composait d'une double presse, dont les cylindres avaient les mêmes dimensions que celui de la presse de l'exemple précédent; seulement la charge sur chaque piston n'était que de 467900^k et correspondait, par suite, à une pression d'eau de 285 atmosphères; dans ces conditions, le calcul donne $5^k,1$ pour le maximum de tension.

Fig. 616.



Fig. 617.



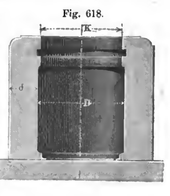
3e Exemple. Parmi les appareils d'élévation, employés dans cette opération gigantesque, se trouvait une presse simple, destinée à soulever une pièce, dont le poids était de 1162400^k; le diamètre du piston était de 508^{mm}, celui du cylindre de 559 et l'épaisseur des parois de 254^{mm}. Avec ces dimensions la pression de l'eau s'élevait à 573 atmosphères et la formule (252) donnait alors, pour la tension, le chiffre énorme de 10^k. Avant que la pièce soulevée ne fût arrivée au niveau des piles, le cylindre de la presse se brisa et la charge, en retombant sur les supports de sûreté qu'on avait établis, éprouva de fortes avaries. La rupture ne se produisit pas longitudinalement, comme on devait s'y attendre, mais transversalement, le fond s'étant séparé du cylindre, comme l'indique la fig. 617. Ainsi, malgré la valeur exagérée de la tension sur son pourtour, le cylindre

(1) V. Clark, The Britannia and Conway Tubular bridges. London, 1850.

a prouvé qu'il était capable d'une grande résistance, résultat qui doit être attribué au soin spécial apporté dans le choix et le mélange des matières premières et aux précautions prises dans l'opération du coulage de la fonte (1). Le détachement du fond tenait à ce que son raccordement avec le cylindre avait été fait à angle vif. Le nouveau cylindre reçut les mêmes dimensions que celui qui s'était rompu, mais le raccordement fut disposé d'une manière plus convenable, ainsi que l'indique la fig. 617.

4° Exemple. Les inconvénients, qu'entraine le raccordement du fond avec le cylindre, se trouvent complètement évités dans une grande presse imaginée par Hummel, de Berlin, grâce à une disposition, qui consiste à remplacer le fond par une plaque séparée, à surface plane, à laquelle le cylindre est réuni par une pièce à rebords rectangulaires, fig. 618. La presse, une des plus puissantes de celles qui existent, comprend deux cylindres juxtaposés. Le diamètre des pistons $K = 601^{mm}$, celui des cylindres $D = 628^{mm}$, l'épaisseur des parois $\delta = 222^{mm}$. La pression P, sur chaque piston, peut aller à un million de kilogrammes, ce qui donne deux millions pour la pression totale de la presse. La pression correspondante de l'eau est de 352 atmosphères et la tension $\mathfrak{S}$, calculée par la formule (252), est alors de $7^k,18$.

Fig. 618.



D'une manière générale, pour les presses qui doivent développer une grande puissance, il est préférable d'augmenter le diamètre du piston, plutôt que de donner à l'eau une pression exagérée, puisque la quantité de matière à employer pour la presse, au lieu d'augmenter avec le diamètre, diminue au contraire. On a, en effet, pour la surface de la section de la paroi du cylindre: $F = \pi (D + \delta)\delta$ et, en remplaçant δ par sa valeur, tirée de la relation (251): $F = \frac{\pi}{4} D^2 \frac{2p}{\mathfrak{S} - p}$, ou $F = \left(\frac{D}{K}\right)^2 \frac{2P}{\mathfrak{S} - p}$, en désignant par P la pression totale et par K le diamètre du piston; le rapport $\frac{D}{K}$ pouvant être considéré comme constant, on

(1) Dans une première opération, le cylindre avait été coulé renversé (le fond en haut) et il dût être rejeté, car le fond était poreux; une seconde opération, dans laquelle le fond était à la partie inférieure, fournit le cylindre qui se déchira, comme nous l'avons indiqué; la rupture montra que la fonte était à grains irréguliers; le troisième cylindre, pour lequel la fonte avait été préalablement soumise à une double fusion, résista parfaitement; un quatrième cylindre, fondu comme pièce de rechange, resta dès lors sans emploi.

voit que, pour une valeur déterminée de $\mathfrak{S}$, la section F' diminue avec la pression p par unité de surface.

5e *Exemple. La pompe en bronze de la presse du pont de Conway avait un piston de 27 mm de diamètre; l'épaisseur de la paroi du corps de pompe et son diamètre avaient la même valeur. La pression de l'eau, comme nous l'avons dit, atteignait 402 atmosphères. En calculant, par la formule (252), le maximum de tension, qui se produit à la surface intérieure du cylindre, on trouve:* $\mathfrak{S} = 4{,}02 \frac{(r+2r)^2+r^2}{(r+2r)^2-r^2} = 1{,}25 \cdot 4{,}02$, *soit* 5^k.

6e *Exemple. Si on calcule, par la formule de Lamé (252), les tensions de la matière dans les tuyaux de conduites, dont nous avons précédemment déterminé les épaisseurs par la formule empirique (247), on obtient les valeurs suivantes:*

	$D =$ 80	400	800	1200
	$\delta =$ 9	13	18	23
	$\frac{\mathfrak{S}}{n} =$ 0,050	0,159	0,227	0,266
Pour $n = 10$,	$\mathfrak{S} =$ $0^k{,}50$	$0^k{,}59$	$2^k{,}27$	$2^k{,}66$.

Il résulte de là que ces tuyaux sont parfaitement en état de supporter la pression d'épreuve de 10 atmosphères, à laquelle on les soumet ordinairement, à condition, bien entendu, qu'ils aient été coulés avec un noyau parfaitement concentrique à l'axe.

§ 255.

Réservoirs sphériques soumis à une forte pression intérieure.

Pour les réservoirs sphériques, d'un diamètre intérieur égal à D_1, la formule de Lamé est remplacée par la suivante:

$$\frac{\delta_1}{D_1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{S}+p)}{2\mathfrak{S}-p}} - 1\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (254)$$

qui donne une épaisseur beaucoup plus faible que celle d'un tuyau cylindrique de même diamètre. Pour une même épaisseur de paroi et pour le même coefficient de sécurité, les diamètres de deux réservoirs cylindrique et sphérique sont dans le rapport:

$$\frac{D_1}{D} = \frac{\sqrt{\frac{\mathfrak{S}+p}{\mathfrak{S}-p}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{2(\mathfrak{S}+p)}{2\mathfrak{S}-p}} - 1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (255)$$

Exemple. Pour $\mathfrak{S} = 6$ *et* $p = 3$, *la dernière formule donne* $\frac{D_1}{D} = \frac{\sqrt{\frac{9}{3}} - 1}{\sqrt[3]{\frac{18}{9}} - 1} = \frac{2}{0,26}$ *ou 8. Par conséquent, pour une calotte sphérique, employée comme fond d'un cylindre, il est facile d'obtenir une résistance bien supérieure à celle du cylindre lui-même. Il importe, toutefois, d'avoir soin de passer graduellement de l'une des formes à l'autre, c'est-à-dire en évitant les angles vifs.*

§ 256.

Épaisseur des parois de chaudières à vapeur à pression intérieure.

Les tensions qu'on admet, pour les chaudières à vapeur, sont très-faibles relativement à celles qui se produisent dans les fortes presses hydrauliques. L'ordonnance prussienne, qui réglait précédemment les épaisseurs des chaudières à vapeur, prescrivait, dans le cas d'une pression intérieure, l'emploi de la formule:

$$\delta = \frac{D}{2}(e^{0,003\,n} - 1) + 0,1 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (256)$$

où δ et D sont exprimés en pouces ($2^{mm},6$). Cette formule peut être remplacée très-approximativement par la suivante:

$$\delta = 1,54\,n\,D + 2^{mm},6 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (257)$$

où δ désigne l'épaisseur en millimètres, D le diamètre en mètres et n la pression effective en atmosphères. En France, l'ordonnance, qui réglait également l'épaisseur des chaudières, avant le décret de 1865, conduisait à une épaisseur un peu plus forte, correspondant à la formule:

$$\delta = 1,8\,n\,D + 3^{mm} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (258).$$

Pour les chaudières de locomotives, on n'exigeait que les $^2/_3$ de cette épaisseur.

En raison des constantes qu'elles renferment, ces trois formules peuvent être considérées comme purement empiriques.

La formule (257) se déduit, en réalité, de la formule (253), par l'addition d'une constante ($2^{mm},6$) correspondant à l'usure. En supposant qu'on ne tienne pas compte de cette constante, la tension de la matière serait celle que donne la formule (253), c'est-à-dire $\mathfrak{S} = 3^k,25$. En réalité, la tension se trouve diminuée par suite de cette surépaisseur, ainsi que l'indique la table suivante:

D	Pression effective en atmosphères.					
	$n = 4$		7		10	
	δ	$\mathfrak{S}$	δ	$\mathfrak{S}$	δ	$\mathfrak{S}$
600	6,3	1,90	9,1	2,31	11,8	2,54
800	7,5	2,13	11,2	2,50	14,9	2,70
1000	8,8	2,27	13,4	2,61	18,0	2,78

Les tensions, indiquées dans cette table, se rapportent à la tôle pleine; avec une rivure, ces tensions se trouvent augmentées à peu près dans le rapport de 3 à 2 (v. § 72 à 74). Pour les chaudières en acier, si on ne tient compte que de la résistance à l'extension, les épaisseurs devraient être les $^3/_5$ seulement de celles que donnent les formules précédentes, puisque la résistance de ce métal est à celle du fer dans le rapport de 5 à 3.

Lorsqu'une chaudière cylindrique se termine par une calotte sphérique, de rayon r_1, l'épaisseur de cette calotte peut se déterminer par la formule:

$$\delta_1 = 1{,}54\, n r_1 + 2^{mm}{,}6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (259).$$

Exemple. Une chaudière à vapeur, dont la pression effective est de 4 atmosphères, doit être terminée par des calottes sphériques de 2^m de rayon; d'après la formule (259), l'épaisseur de ces calottes doit être prise égale à $\delta_1 = 1{,}54 \cdot 4 \cdot 2 + 2^{mm}{,}6$ ou, très-approximativement, 15^{mm}.

§ 257.

Tuyaux de chaudières à vapeur soumis à une pression extérieure.

Les tuyaux cylindriques, pressés extérieurement, éprouvent un effet analogue à celui que nous avons signalé pour les pièces chargées debout, c'est-à-dire que, pour une certaine valeur limite de la pression, une légère déformation, qu'elle vienne à se produire accidentellement ou qu'elle existe antérieurement, peut entrainer la rupture. Dans les tubes de chauffe des chaudières de locomotives et de bateaux, les épaisseurs qu'on est conduit à donner, en raison de l'usure, sont suffisantes pour prévenir les dangers de rupture. Mais il n'en est pas de même

pour certaines chaudières à foyer intérieur, dont les tuyaux ont, le plus souvent, des dimensions telles qu'il convient de prendre ce danger en sérieuse considération. Les expériences de Fairbairn ont établi, conformément d'ailleurs aux indications de la théorie, que la longueur des tuyaux est un des éléments les plus importants au point de vue de la valeur de la résistance à l'écrasement; cette dernière est d'autant plus faible qu'elle correspond à une plus grande longueur de tuyau ou, plus exactement, à une distance plus considérable entre les deux sections qui sont protégées contre la déformation. De ses expériences Fairbairn a déduit que la pression extérieure effective p, capable de produire l'écrasement, pouvait être représentée par la formule:

$$p = 806\,300 \frac{\delta^{2,19}}{l D} \quad \cdots \cdots \quad (260)$$

où p est exprimé en livres anglaises par pouce carré, D et δ en pouces et l en pieds. En transformant toutes les dimensions en millimètres et la pression p en kilogr. par millim. carré, on arrive à la relation:

$$p = \frac{n}{100} = 367\,937 \frac{\delta^{2,19}}{l D} \cdot \quad \cdots \quad (261)$$

n désignant la pression en atmosphères. Cette formule se présente sous une forme très-incommode. Love a proposé de la remplacer par une autre du 2ᵉ degré (1). On obtient une approximation très-satisfaisante avec la formule (2):

$$100 p = n = 376\,721 \frac{\delta^2}{l D} + 116 \frac{\delta^2}{D} - 93 \frac{\delta}{D} \quad \cdots \quad (262)$$

(1) V. Civil-Ingénieur, Vol. VII, P. 238.

(2) Dans la formule de Love les constantes ont des valeurs différentes de celles de la formule (262). l, D et δ étant exprimés en centimètres et p en kilogrammes par centim. carré, on a d'après Love:

$$p = 512820 \frac{\delta^2}{l D} + 641 \frac{\delta^2}{D} - 224 \frac{\delta}{D}$$

tandis qu'avec les mêmes unités la formule (262) transformée donne:

$$p = 376721 \frac{\delta^2}{l D} + 1160 \frac{\delta^2}{D} - 93 \frac{\delta}{D}.$$

Les constantes de la formule (262) étaient à déterminer d'après les expériences de Fairbairn. Sur mon invitation, la société „die Hütte“ s'est chargée de ce travail, dont les résultats sont consignés dans les comptes-rendus de l'année 1870, P. 115. La comparaison de la formule de Love avec celle de Fairbairn et d'autres antérieures fait ressortir, entre tous les résultats des différences qui, bien que toujours sensibles, ne sont jamais très-considérables, en supposant, bien entendu, qu'on reste dans les con-

qui permet de calculer la pression sous laquelle se produit l'aplatissement d'un tuyau, de dimensions connues, pressé extérieurement.

Exemple. Dans une chaudière à foyer intérieur, construite pour une pression effective de 2 atmosphères $^1/_2$, *le tuyau à feu avait une longueur* $l = 7845^{mm}$, *un diamètre* $D = 601^{mm}$ *et une épaisseur* $\delta = 6^{mm},5$. *En calculant, d'après la formule (262), la pression de la vapeur, pour laquelle l'aplatissement de ce tuyau devait vraisemblablement se produire, on a :*

$$n = 376721 \frac{6,5^2}{7845 \cdot 601} + 116 \frac{6,5^2}{601} - 93 \frac{6,5}{601} = 3,375 + 8,154 - 1,005 = 10^{atm},524.$$

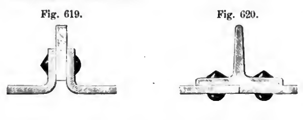
En réalité, le tuyau s'est déchiré sous une pression moindre. Mais si l'on veut bien remarquer que l'usure peut facilement réduire l'épaisseur de quelques millimètres, l'explosion s'explique naturellement. Dans un tuyau de vapeur de même diamètre, soumis à une pression intérieure, la tension de la matière, en tenant compte de la rivure, serait, d'après la table du paragraphe précédent, de $2^k,7$ *environ, ce qui correspond à un coefficient de sécurité égal à* $\frac{42}{2,7}$ *ou 15, en nombre rond, c'est-à-dire que la rupture ne se produirait, dans ce cas, que pour une tension de vapeur de 55 atmosphères environ. Il y a là, entre les deux cas, une disproportion, pour le coefficient de sécurité, qui n'est en rien motivée.*

Un moyen simple d'élever le coefficient de sécurité, sans être obligé d'augmenter l'épaisseur, c'est de diminuer la valeur de l; aussi Fairbairn a-t'il conseillé, dans ce but, l'emploi d'anneaux de renforcement aux joints d'assemblage des feuilles de tôle des tuyaux. On ne saurait assez s'étonner qu'en Allemagne on fasse aussi rarement usage de cette disposition, aussi simple qu'efficace, d'autant plus qu'il ressort de la statistique des explosions de chaudières que l'aplatissement du tube du foyer, si fréquent dans les chaudières, ne se produit jamais dans celles qui sont munies d'anneaux de renforcement. En Angleterre, les deux dispositions, qu'on emploie de préférence, sont celles d'Adamson, fig. 619, et de Hick, fig. 620; la seconde est d'une exécution plus facile, mais la première a l'avantage de n'exposer au feu aucune tête de rivet. Dans toutes les chaudières à foyer intérieur, il convient donc, comme le font d'ailleurs quelques

ditions des expériences de Fairbairn, lesquelles se rapportent à des tuyaux de faibles épaisseurs. La formule (262) est de toutes la plus exacte. Mais les différences deviennent très-marquées pour les cas de la pratique où δ a le plus souvent une assez grande valeur. Les résultats, donnés par la formule de Love, présentent alors des écarts de 30 à 40 p%. Pour l'exemple du texte, cette formule donnerait $n = 4,59 + 4,51 - 2,42 = 6^{atm},68$, au lieu de $10^{atm},52$.

constructeurs, d'établir un renforcement à chaque joint d'assemblage des tôles du tube à feu.

Fig. 619. Fig. 620.

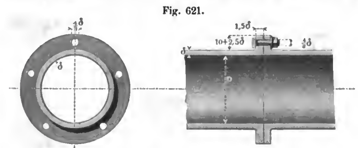


§ 258.

Assemblages des tuyaux de fonte.

Le mode d'assemblage, qui est le plus généralement employé, est l'assemblage à brides, fig. 621. Les dimensions proportionnelles qu'on doit adopter, dans ce cas, sont indiquées sur la figure. Autrefois, entre les trous de boulons et le bord intérieur, on laissait ordinairement une portée; mais aujourd'hui on la supprime généralement et on dresse au tour toute la surface de la

Fig. 621.



bride, ce qui donne un assemblage plus rigoureux et d'un aspect plus satisfaisant, sans entraîner d'ailleurs un excédant de dépense sensible. Dans ces dernières années, on a fait fréquemment usage, pour la garniture du joint, d'un anneau en fil de cuivre, qui se trouve pressé entre deux rainures, obtenues au tour, et donne au joint une étanchéïté complète. Dans les tuyaux ordinaires, qui ne doivent pas être soumis à une forte pression, on peut prendre, pour le nombre $\mathfrak{A}$ des boulons des brides:

$$\mathfrak{A} = 2 + \frac{D}{50} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (263)$$

D étant exprimé en millimètres.

Il résulte de là que, pour un tuyau de 100^{mm} de diamètre, il faut 4 boulons, 6 pour un tuyau de 200^{mm}, etc. La même formule donne, pour le cylindre d'une pompe à air, de 1500^{mm} de diamètre, $2 + \frac{1500}{50} = 32$ boulons.

Pour une pression intérieure moyenne, il est préférable de recourir à l'emploi de la formule:

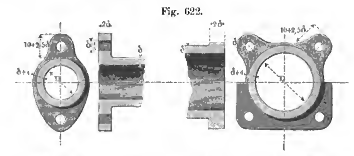
$$\mathfrak{A} = \frac{n}{180}\left(\frac{D}{d}\right)^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (264)$$

où d désigne le diamètre des boulons, D le diamètre du tuyau et n le nombre d'atmosphères de la pression exercée sur ce tuyau.

Exemple. Un cylindre à vapeur, de 1000^{mm} de diamètre, soumis à une pression effective de 4 atmosphères, doit avoir, comme épaisseur, d'après la formule (249); $\delta = 20 + \frac{1000}{100} = 30^{mm}$; d'après les indications de la figure, on doit prendre, pour le diamètre des boulons du couvercle: $d = \frac{4}{3} \cdot 30 = 40^{mm}$; enfin le nombre de ces boulons, donné par la formule (264), est: $\mathfrak{A} = \frac{4}{180}\left(\frac{1000}{40}\right)^2 = \frac{625}{45} = 14$.

La bride à oreilles, fig. 622, qui est une modification de la bride circulaire, est d'un emploi assez fréquent; comme la surface de contact est plus faible, l'épaisseur doit être portée à 2δ ou $2{,}5\,\delta$, au lieu de $\frac{4}{3}\,\delta$.

Fig. 622.



La fig. 623 représente un coude de tuyau, avec assemblage à bride. La courbure ne doit pas être trop brusque, afin que le liquide, à son passage dans ce coude, n'éprouve pas une perte de charge trop considérable. Pour chaque angle différent, que forment les axes des tuyaux d'une conduite, on est obligé de faire un modèle de coude. A ce point de vue, l'emploi du coude universel de Brown, fig. 624, est plus avantageux. Une seule des deux pièces, qui composent chaque coude, a ses trous de

boulons percés à l'avance; ceux de la seconde ne sont percés qu'au moment de la pose, après avoir été tracés sur place.

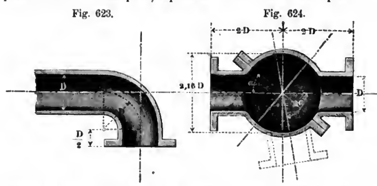


Fig. 623. Fig. 624.

Suivant la position relative des brides, l'angle du coude peut varier entre 2α et 180^0. Dans la figure, on a admis la valeur $\alpha = 40^0$, qui répond à peu près à toutes les exigences de la pratique.

L'assemblage à manchons, fig. 625 à 627, est surtout employé pour les tuyaux de conduites d'eau et de gaz.

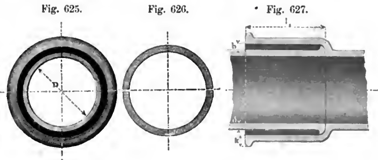


Fig. 625. Fig. 626. Fig. 627.

La garniture se fait au moyen de plomb, auquel on donne la forme d'un anneau en deux parties, fig. 626; cet anneau est introduit et serré fortement sur une première garniture d'étoupes.

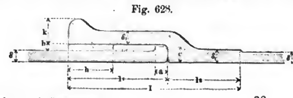


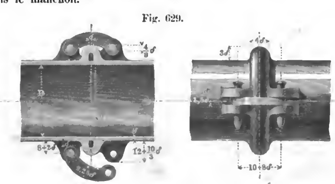
Fig. 628.

Les dimensions des manchons de tuyaux sont données par les nombres proportionnels ci-après, qui ont été choisis avec beaucoup de soin. L'épaisseur δ du tuyau est fournie par la formule (247), c'est-à-dire qu'on a: $\delta = 8 + \frac{D}{80}$. On a ensuite:

Épaisseur de la paroi du manchon . . .	δ_1	$= 10 + 0{,}0135\,D$
Largeur de la couronne	k	$= 18 + 0{,}0025\,D$
Longueur intérieure	l_1	$= 67 + 0{,}11\,D$
Longueur du col	l_2	$= 49 + 0{,}09\,D$
Longueur totale	l	$= 116 + 0{,}20\,D$
Largeur de la garniture	b	$= 5 + 0{,}007\,D$
Hauteur de l'anneau de plomb	h	$= 28 + 0{,}07\,D$
Hauteur du bourrelet	a	$= 1{,}2\,\delta$
Épaisseur du bourrelet	c	$= \delta + b - 2.$

Certains constructeurs pratiquent, à l'intérieur de la couronne du manchon, une rainure annulaire, destinée à maintenir la garniture de plomb; d'autres regardent cette rainure comme complètement inutile avec un métal aussi mou que le plomb. Depuis quelques années, on supprime assez fréquemment le bourrelet à l'extrémité du tuyau enveloppé (cette suppression est surtout avantageuse, lorsqu'on emploie la méthode anglaise pour le coulage des tuyaux: dans ce cas le manchon est muni d'une saillie intérieure près du bord. Pour les tuyaux de conduites d'eau, qui sont solidement posés, on peut, d'après Scholl, remplacer la garniture de plomb par une autre beaucoup plus économique, en imbibant, dans un mélange, opéré à chaud, de poix et de poudre de brique, des tresses de chanvre, qu'on chasse ensuite fortement dans le manchon.

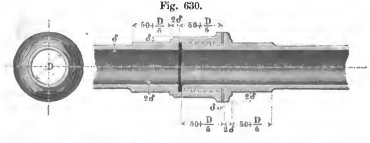
Fig. 629.



La fig. 629 représente l'assemblage à tuyaux du système Petit. Dans un manchon très-court se trouve introduite une rondelle de caoutchouc, qu'on comprime fortement, en se servant des tuyaux eux-mêmes comme de leviers; deux griffes, avec goupilles en fer, maintiennent la fermeture. Ce système d'assemblage, qui a été utilisé pour l'établissement de la grande conduite d'eau du camp de Châlons, a l'avantage de rendre très-rapide et très-économique la pose des tuyaux; il donne, en outre, aux conduites une certaine flexibilité, qui est d'une grande importance pour celles qui sont établies sur un sol exposé aux tassements. La seule observation à faire sur ce système d'assemblage se rapporte aux oreilles, pour lesquelles il paraît convenable d'adopter des dimensions supérieures à celles que leur a données l'inventeur.

La fig. 630 indique un assemblage à manchon fileté pour tuyaux en fonte de conduites d'eau (1). Les filets sont venus de fonte et la garniture consiste en une rondelle de plomb, qui se trouve comprimée par la surface plane annulaire terminant la partie filetée extérieure. Cet assemblage peut être considéré

Fig. 630.



comme un assemblage à brides à un seul boulon, établi concentriquement au tuyau et avec des dimensions en largeur telles qu'il puisse être percé d'une ouverture égale à la section de la conduite. Comme la partie filetée est d'une seule pièce avec le tuyau, il est nécessaire, pour le serrage, de pouvoir faire tourner chaque tuyau autour de son axe; à cet effet, chaque tuyau est muni, en avant du manchon, d'un renflement à plusieurs pans, qu'on peut saisir au moyen d'une grosse clef.

Fig. 631. Manchon de Normandy. La garniture se compose de deux rondelles de caoutchouc. Ce mode d'assemblage

(1) L'usine de Lauchhammer livre des assemblages de ce genre pour des tuyaux dont le diamètre intérieur va jusqu'à 50 et 60mm.

est d'une construction extrêmement simple et peut être employé, avec avantage, dans tous les cas où le caoutchouc n'est pas

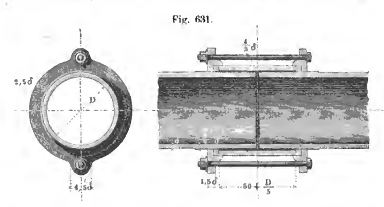


Fig. 631.

exposé à une altération trop rapide. Il permet, comme le système Petit (fig. 629), un certain degré de déformation de la ligne de tuyaux, en même temps qu'il rend leur réunion ou leur séparation extrêmement faciles. Dans certaines conduites d'eau, on rencontre un dispositif analogue avec une garniture en plomb. La rondelle forme alors une espèce de double manchon; les tuyaux sont complètement unis, sans surépaisseur ni bourrelet à leurs extrémités.

Le système Lavril ne diffère de celui de Normandy qu'en ce que l'un des colliers est venu de fonte avec le tuyau correspondant.

La distance des plans moyens des deux assemblages d'un tuyau constitue ce que l'on appelle sa longueur utile ou de construction. Dans tous les tuyaux droits en fonte, cette longueur doit toujours être, au minimum, comprise entre 1 et 2 mètres; pour les conduites d'un développement considérable, elle doit être prise aussi grande que possible. Dans les tuyaux à manchons, pour les conduites de gaz et d'eau, les valeurs adoptées sont, en général, les suivantes:

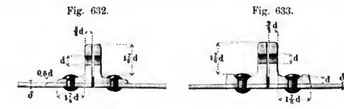
$D = 100^{mm}$	. . . . longueur de construction	2 à 3^{m}
300^{mm}	. . . . - - -	3 à 4^{m}
600^{mm} et au delà	- - -	4^{m}.

§ 259.

Assemblages de tuyaux en fer.

Les tuyaux de conduites d'eau, formés de feuilles de tôle rivées, s'assemblent au moyen de brides en fer, fig. 632, ou de brides en fonte, fig. 633.

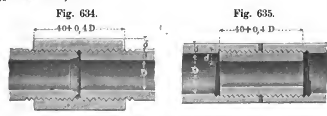
Fig. 632. Fig. 633.



Pour obtenir les dimensions des différents éléments de ces assemblages, on commence par chercher le diamètre d et le nombre des boulons, en utilisant les formules (263) et (264); les autres dimensions se trouvent alors déterminées au moyen des nombres proportionnels indiqués sur les figures.

Exemple. On a à construire les brides en fer d'un tuyau de turbine en tôle, qui a 1000^{mm} *de diamètre et qui doit supporter une tension de deux atmosphères. En calculant ce tuyau comme celui d'une chaudière à vapeur, on devrait lui donner une épaisseur* $\delta = 1{,}54 \cdot 2 + 2{,}6 = 5^{mm}{,}68$, *qui peut sans inconvénient être réduite à* 5^{mm}. *Si on prend* $d = 20^{mm}$, *pour le diamètre des boulons, on trouve, pour leur nombre, d'après la formule (263):* $\mathfrak{A} = 2 + \frac{1000}{50} = 22$ *et, d'après (264):* $\mathfrak{A} = \frac{2}{180}\left(\frac{1000}{20}\right)^2 = \frac{2500}{90} = 27$; *c'est ce dernier chiffre que nous admettrons. La fig. 632 donne alors, pour l'épaisseur des brides,* $\frac{5}{8} \cdot 20$ *ou* 13^{mm} *et, pour la largeur suivant le rayon,* $1\frac{7}{8} \cdot 20$ *ou* 38^{mm}, *etc.*

Fig. 634. Fig. 635.



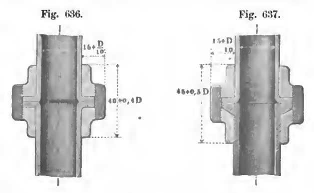
Les tuyaux en fer étiré s'assemblent souvent au moyen de manchons filetés, fig. 634 et 635. Dans la disposition de la fig. 634, l'un des bords est taillé en biseau et est pressé contre la base de l'autre, de manière à donner une fermeture hermétique;

dans la fig. 635, on a recours à l'interposition d'une garniture spéciale. Pour produire le vissage des manchons, on saisit les tuyaux au moyen de tenailles de serrage d'une forme convenable. La longueur de construction des tuyaux en fer varie de 3 à 4ᵐ.

§ 260.

Assemblages de tuyaux en plomb. Assemblages divers.

Les tuyaux en plomb s'assemblent fréquemment au moyen de brides en fer, qui pressent, l'un contre l'autre, les rebords qu'on obtient en rabattant les extrémités des tuyaux. La fig. 636 représente un manchon fileté pour tuyaux de plomb (système Lonch). Les trois parties qui composent ce manchon sont en fonte. C'est au même inventeur qu'est due la disposition de la fig. 637, pour l'assemblage d'un tuyau en plomb avec un tuyau en fer. Sur ce dernier tuyau est vissé un petit rebord en bronze, contre lequel

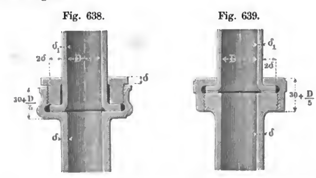


se trouve pressé le rebord du tuyau en plomb, au moyen d'un manchon en fonte. Les deux parties du manchon, qui portent sur les tuyaux, se terminent à l'extérieur par des surfaces à 6 ou 8 pans, de même que l'écrou qui les réunit. Ici, comme dans les deux dispositifs suivants, l'assemblage est encore produit par ce que nous avons appelé une vis élargie (§ 66). Les tuyaux de plomb ont une longueur de construction très-considérable, qui va facilement à 10ᵐ.

Fig. 638 et 639. Assemblage de tuyaux en fonte avec tuyaux en plomb. On emploie, dans ce cas, une garniture inter-

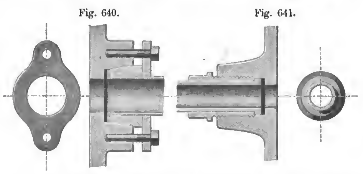
médiaire, composée d'une rondelle de caoutchouc ou d'une matière du même genre.

Fig. 638. Fig. 639.



Les fig. 640 et 641 représentent deux assemblages à brides libres, destinés à réunir à un rebord en fonte, le premier un tuyau de cuivre rouge avec une bride en fer, le second un tuyau de bronze. Ces deux modes d'assemblage, ou d'autres analogues, sont employés fréquemment pour les tuyaux des presses hydrauliques, surtout lorsqu'ils sont formés d'un métal d'une faible épaisseur; on les rencontre également dans les pompes à feu.

Fig. 640. Fig. 641.



Ces divers assemblages, suivant le but spécial qu'ils doivent remplir, reçoivent des formes et des proportions différentes, qu'il serait ici trop long d'énumérer.

§ 261.

Poids des tuyaux en fonte.

La table suivante donne les poids des tuyaux, par mètre courant, sans manchon et sans brides. Pour déterminer le poids de ces accessoires, on les transforme en un cylindre creux de diamètre D, d'épaisseur δ et de longueur l, dont on peut prendre alors le poids dans la table. La longueur l, pour une bride, exécutée d'après les indications de la fig. 621, peut être prise, en moyenne, égale à $10\,\delta$. Pour les manchons, établis d'après la fig. 628, la longueur l est sensiblement égale à $125 + 0{,}3\,D$.

1er Exemple. Une conduite, de 120^m de développement, comprend 40 tuyaux de 3^m de longueur, de 300^{mm} de diamètre et de 12^{mm} d'épaisseur. La table donne, pour le poids de chacun de ces tuyaux, sans brides: $3 \cdot 85{,}19 = 255^k{,}57$. Les deux brides étant équivalentes à une longueur de tuyau égale à $2 \cdot 10\,\delta = 2 \cdot 10 \cdot 12$, il en résulte que le poids d'un tuyau, avec ses brides, est $3{,}240 \cdot 85{,}19 = 276^k{,}02$ et le poids total de la conduite $40 \cdot 276{,}02 = 11041^k$.

2e Exemple. Pour les manchons d'une conduite de même diamètre, supposés établis d'après les proportions de la fig. 628, le poids est celui d'une longueur de tuyau égale à $125 + 0{,}3 \cdot 300 = 215$, c'est-à-dire $0{,}215 \cdot 85{,}19 = 18^k{,}3$. Un tuyau complet de 3^m pèse alors $3 \cdot 85{,}19 + 18{,}3 = 274^k{,}87$ et la conduite entière $40 \cdot 274{,}87 = 10995^k$.

Table relative au poids des tuyaux en fonte.

Diamètre des tuyaux *D*.	Poids par mètre courant des tuyaux d'épaisseur δ.						
	8	10	12	14	16	18	20
60	12,40	15,93	19,66	23,57	27,67	31,94	36,41
70	14,19	18,20	22,39	26,76	31,31	36,04	40,96
80	15,99	20,48	25,12	29,94	34,95	40,14	45,51
90	17,85	22,75	27,85	33,13	38,59	44,23	50,06
100	19,64	25,79	30,59	36,32	42,23	48,33	54,61
110	21,44	27,30	33,33	39,50	45,87	52,42	59,16
120	23,06	29,58	36,05	42,69	49,52	56,51	63,71
130	25,15	31,85	38,78	45,87	53,16	60,62	68,26
140	26,94	34,13	41,50	49,06	56,79	64,72	72,81
150	28,74	36,41	44,24	52,24	60,44	68,81	77,37
160	30,59	38,68	46,97	55,43	64,08	72,90	81,92
180	34,18	43,24	52,43	61,80	71,37	81,10	91,02
200	37,83	47,78	57,89	68,17	78,64	89,29	100,12
220	41,49	52,34	63,35	74,54	85,92	97,48	109,22
240	45,14	56,86	68,81	80,92	93,20	105,66	118,32
260	48,79	61,44	74,27	87,29	100,48	113,86	127,42
300	56,09	70,55	85,19	100,03	115,04	130,24	145,63
350	65,21	81,92	98,85	115,95	133,25	150,72	168,39
400	74,33	93,29	112,47	131,88	151,46	171,20	191,14
500	92,43	116,05	139,51	163,74	187,86	211,33	236,64
600	110,67	138,78	167,11	194,00	224,27	253,11	282,16
700	128,91	161,56	194,41	225,82	260,68	294,08	327,66
800	147,15	184,31	221,73	257,72	297,08	335,02	373,16
900	165,40	207,06	249,02	289,57	333,50	375,96	418,66
1000	183,63	229,82	276,34	323,03	369,90	416,93	464,16

XIX. Obturateurs.

§ 262.

Classification des obturateurs.

On désigne, sous le nom *d'obturateurs*, les différents dispositifs qui ont pour but de permettre de produire, à volonté, la fermeture ou l'ouverture des tuyaux de conduite et des réservoirs, ou, en d'autres termes, d'arrêter ou de rétablir l'écoulement des fluides, renfermés dans ces réservoirs et ces conduites. Les appareils, de formes extrêmement variées, qu'on emploie dans ce but, peuvent être divisés en deux classes principales:

1. *Les obturateurs par glissement,*
2. *Les obturateurs par soulèvement.*

A la première classe appartiennent les *robinets*, les *tiroirs* et généralement tous les obturateurs dans lesquels la partie mobile doit glisser sur la partie fixe, pour dégager ou masquer les orifices qui y sont pratiqués. La seconde classe comprend tous les dispositifs dans lesquels le dégagement de l'orifice se produit par la soulèvement de la partie mobile, comme, par exemple, dans les clapets, les soupapes coniques, sphériques, etc.

Chacune de ces classes donne elle-même lieu à deux subdivisions, si on considère le mouvement de la pièce d'obturation comme produit par une rotation autour d'un axe, qui peut être à une distance finie ou à une distance infinie. Les obturateurs par glissement donnent alors comme subdivisions:

a. *Les robinets et les tiroirs à rotation,*
b. *Les tiroirs à mouvement rectiligne.*

On a de même pour les obturateurs par soulèvement:

a. *Les clapets ou soupapes à articulations,*
b. *Les soupapes à levée rectiligne.*

Cette classification établie, nous allons examiner successivement les dispositifs d'obturation dont l'usage est le plus répandu.

A. Obturateurs par glissement.

§ 263.

Robinet conique.

Dans le robinet conique, la partie mobile, qui produit l'obturation, a la forme d'un tronc de cône. Les fig. 642 et 643 donnent les deux dispositions les plus employées pour ce genre de robinet. L'orifice présente une forme allongée, qui permet de réduire le diamètre de la clef; l'inclinaison de cette clef est, en général, de $^1/_9$ pour chaque côté, de telle sorte que, pour une longueur de 60^{mm}, par exemple, le plus grand diamètre de

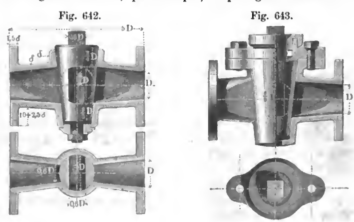


Fig. 642. Fig. 643.

la clef surpasse le plus petit de $2 \cdot \frac{60}{9} = 13^{mm},33$, soit 13^{mm}. Lorsque le boisseau est en fonte, son épaisseur δ se détermine par la formule (248), c'est-à-dire qu'on prend: $\delta = 12 + \frac{D}{50}$. Pour les boisseaux en bronze, qui portent des brides comme ceux de fonte, l'épaisseur n'est que les $^2/_3$ de la précédente. Dans les conduites d'eau, les surfaces frottantes doivent toujours être composées de bronze ou, du moins, d'une matière analogue, qui ne soit pas exposée à se rouiller, comme le fer ou la fonte.

Les fig. 644 à 647 reproduisent quatre dispositions différentes du robinet conique. Celle de la fig. 644 est destinée à réunir deux tuyaux inclinés; les robinets des deux figures 645 et 646 sont à trois voies; enfin la fig. 647 donne un robinet à quatre voies. Lorsqu'on connaît la largeur des orifices, ainsi

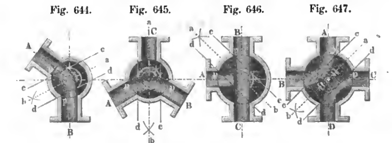


Fig. 644. Fig. 645. Fig. 646. Fig. 647.

que la valeur du recouvrement, on peut déterminer le diamètre moyen de la clef de la manière suivante. Dans les figures précédentes, du centre de cette clef on décrit deux cercles, ayant pour diamètres, l'un la largeur des orifices, l'autre cette même largeur augmentée du recouvrement, c'est-à-dire *c d*; tangentiellement au premier cercle, on trace les lignes limites des orifices, on divise par la ligne *a b* le plus petit angle de deux orifices voisins, puis on mène, parallèlement à *a b*, les deux lignes *c c* et *d d*, qui coupent les orifices aux points *p*, *p*, par lesquels doit passer le cercle correspondant à la section moyenne de la clef.

Les fig. 648 et 649 représentent deux robinets à clefs creuses, qui sont fréquemment employés comme robinets d'injection des condenseurs.

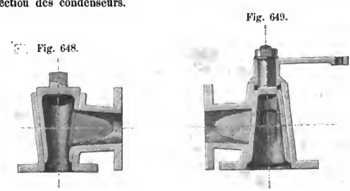


Fig. 648. Fig. 649.

Si l'on fait l'angle du cône égal à 180°, le robinet conique se transforme en tiroir plan à rotation. Si on suppose ce même angle égal à 0°, la clef devient cylindrique et, si on fait croître indéfiniment son rayon, on obtient le tiroir plan, à mouvement rectiligne; une forme très-remarquable et, en même temps, très-pratique du robinet conique est le tiroir à rotation de Wilson (1). Comme la construction des tiroirs rentre essentiellement dans celle des machines à vapeur, nous ne nous étendrons pas plus longuement sur ce genre d'organes.

B. Obturateurs par soulèvement.

§ 264.

Clapets.

Dans les obturateurs par glissement, la partie mobile ne peut jamais être déplacée par l'action du fluide, tandis que, dans les organes de la seconde classe, la pression de ce fluide, lorsqu'elle s'exerce du côté du siège, soulève elle-même la partie mobile; en d'autres termes, le soulèvement des organes de ce genre peut s'effectuer automatiquement et c'est ce qui a lieu le plus souvent, comme, par exemple, dans les pompes. Les soupapes à articulation automatiques constituent les clapets ordinaires.

Les fig. 650 et 651 représentent un clapet double avec sa boite. La garniture est formée de cuir ou de caoutchouc (avec bandes de toile interposées). Pour un diamètre D du clapet, la largeur s du siège est donnée par la formule:

$$s = 4 + \sqrt{D} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (265).$$

Ainsi, par exemple, pour $D = 100^{mm}$, on doit prendre $s = 4 + \sqrt{100} = 14^{mm}$. Les nombres proportionnels, indiqués sur les figures, se rapportent au module s. La boite du clapet est fermée par une porte, qui peut tourner autour d'une articulation, établie latéralement.

La fig. 652 donne un clapet en quatre parties. Dans cette disposition, comme dans la précédente, on fait usage de plaques en fer rivées, pour donner de la raideur aux bandes de cuir ou de caoutchouc. Dans les parties voisines de l'articulation, ces

(1) V. les annales de la société des Ingénieurs allemands, 1868.

plaques doivent recouvrir ou, au moins, affleurer la surface d'appui du clapet, afin d'éviter que la pression de l'eau ne vienne à courber le cuir.

La fig. 653 représente un clapet rond, formé d'un disque de caoutchouc; ce disque n'est pas garni de plaques en fer, afin

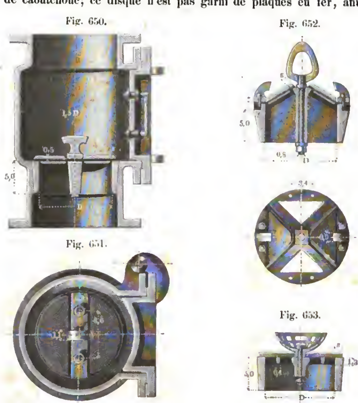


Fig. 650.

Fig. 652.

Fig. 651.

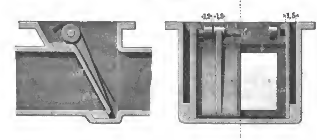
Fig. 653.

qu'il puisse se courber vers le haut et venir s'appliquer sur la surface courbe, destinée à limiter sa déformation; à la partie inférieure, il repose sur un grillage établi au niveau du siége. Ce clapet se trouve fréquemment employé dans les pompes à air des condenseurs des machines à vapeur.

Un clapet en bronze, qu'on rencontre également assez souvent dans les pompes à air des machines à vapeur et des appareils d'évaporation des sucreries, est celui de la fig. 654.

Le siège de ce clapet est formé par deux clavettes en fer, solidement fixées, et sa boite est fermée par un couvercle qui, sur la

Fig. 654.



figure, est supposé enlevé. Pour la détermination de la largeur du siège, on peut, ici encore, faire usage de la formule (265), en prenant pour D la valeur du plus petit côté de la section rectangulaire du conduit. Pour toutes les dispositions de clapets que nous venons d'indiquer, les figures représentent les pièces qui limitent la levée; l'angle d'ouverture des clapets est généralement compris entre 30° et 40°(1).

§ 265.

Soupapes simples de forme circulaire.

Parmi les soupapes à levée rectiligne, celles dont on fait le plus généralement usage sont les soupapes coniques, qui, comme les clapets à articulation, peuvent agir automatiquement. La fig. 655 représente deux soupapes de ce genre, qui sont disposées d'une manière très-convenable pour une pompe alimentaire. Pour éviter les effets de la rouille, les clapets se font en bronze. Sur la figure le siège du clapet inférieur est supposé en fonte; mais il est bien préférable de le faire également en bronze. Dans cette disposition, les surfaces des deux sièges forment deux troncs de cône identiques. La formule (265) sert à déterminer leur largeur s, qui, ici encore, est le module auquel se rapportent les nombres proportionnels inscrits sur la figure. La projection

(1) Au sujet des clapets et des soupapes, on trouve des observations très-remarquables dans le travail du prof. Finck, Ueber Pumpenventile und Klappen. Annales de la société des Ingénieurs allemands, 1870. P. 497.

de la surface conique annulaire a pour largeur $s - 4^{mm}$; il en résulte que, pour les petites soupapes, l'angle du cône est plus aigu que pour les grandes.

Dans la construction de la boite des soupapes, on doit veiller avec le plus grand soin à ce que l'orifice d'écoulement, au-dessus du sommet de chaque clapet, se trouve établi à une hauteur suffisante, pour que le courant de retour ne maintienne pas la soupape ouverte; c'est là un effet qui se produit très-fréquemment, par suite de la position vicieuse des orifices. Le mode de fermeture de la boite, indiqué sur la figure, dispense de l'usage de toute garniture. Il est, au contraire, indispensable d'en employer une, lorsque le couvercle repose simplement sur la boite par une surface plane.

Fig. 655. Fig. 656.

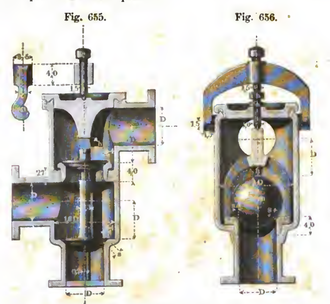


Fig. 656. Soupape sphérique ou à boulet. La largeur *s* du siège et celle de sa projection se calculent comme précédemment. Pour déterminer ensuite le diamètre de la sphère, qu'il convient d'adopter, il suffit d'élever des perpendiculaires par les points milieux des deux côtés du siège, contenus dans une section faite par l'axe, et de prendre leur point d'intersection *m* comme centre de la sphère. En raison de la grande hauteur de la

soupape, il est essentiel que l'orifice d'écoulement se trouve à une assez grande distance au-dessus du siège.

Un grand nombre de bons constructeurs estiment que la soupape à boulet n'est pas supérieure à la soupape conique. Le bon fonctionnement de ces deux espèces de soupapes dépend essentiellement de la position donnée à l'orifice d'écoulement. Lorsque cette position est mal choisie, les soupapes à boulet, comme les autres, arrivent rapidement à une marche assez irrégulière (1).

La levée h d'une soupape conique ou sphérique doit être égale ou légèrement supérieure à $\frac{D}{4}$.

§ 266.

Soupapes à double siège.

Lorsque, pour une soupape conique ordinaire, la pression du fluide s'exerce sur la base supérieure, le soulèvement du clapet exige un effort extérieur, assez considérable, proportionnel à la projection totale de la soupape. Dans les mêmes conditions, une soupape conique à double siège, présentant une des trois formes suivantes, exige, pour sa levée, un effort beaucoup plus faible, puisque cet effort est simplement proportionnel à la projection des surfaces qui constituent le double siège. C'est pour ce motif que les soupapes de ce genre se trouvent assez souvent utilisées dans les distributions des machines à vapeur.

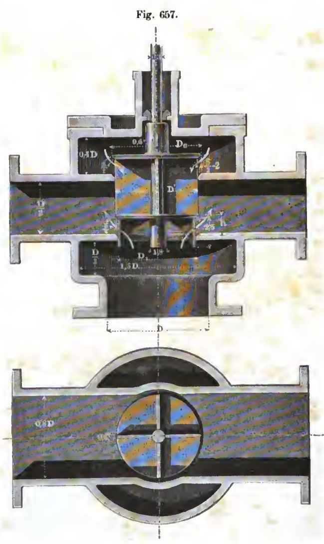
Fig. 657. Soupape de Hornblower. Dans cette disposition, le fluide s'introduit, dans la boite de la soupape, par la partie inférieure, pour être distribué ensuite également des deux côtés. Si on voulait le refouler d'un seul côté, il conviendrait d'adopter, pour la conduite d'évacuation, une section sensiblement double de celle qui est indiquée sur la figure.

En désignant par D le diamètre du tuyau d'entrée, on doit faire le diamètre moyen D' du clapet égal ou supérieur à $0{,}8\,D$. Lorsqu'on prend $D' > 0{,}8\,D$, la course h du clapet doit être plus faible que dans l'autre cas et on peut alors déterminer h, comme minimum, par la relation:

(1) Une disposition avantageuse pour les soupapes sphériques est celle de Weidtmann. V. Uhland, M. C. Pr. Page 83, Pl. 24.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h}{D'} = \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{D}{D'}\right)^2 \\ \text{ou} \quad \dfrac{h}{D} = \dfrac{1}{8}\,\dfrac{D}{D'} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (266).$$

Fig. 657.



Exemple. Si on veut obtenir une soupape aussi réduite que possible et si on fait, par conséquent, $D' = 0{,}8\ D$, on doit prendre: $\frac{h}{D'} = \frac{1}{8} \cdot 1{,}25^2 = 0{,}195$, ou $\frac{h}{D} = \frac{1 \cdot 25}{8} = 0{,}156$. Pour $D' = D$, il vient: $\frac{h}{D'} = \frac{h}{D} = \frac{1}{8} = 0{,}125$; pour $D' = {}^4/_5\ D$, $\frac{h}{D'} = \frac{1}{8}(0{,}8)^2 = 0{,}08$ et $\frac{h}{D} = 0{,}10$.

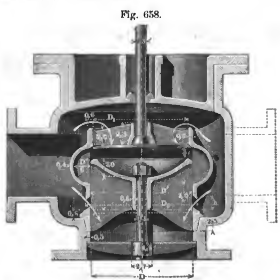
La largeur $\frac{s}{2}$ de chaque siège est la moitié de la valeur fournie par la formule (265), qui devient ici:

$$s = 4 + \sqrt{D'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (267)$$

et on doit prendre, comme précédemment, la somme des projections des sièges égale à $s - 4^{mm}$. Dans ces derniers temps, quelques constructeurs ont adopté, pour les soupapes doubles, une valeur de s encore plus petite et sont descendus jusqu'à la moitié de celle que donne la formule (267).

Exemple. Pour un diamètre de conduite de 300^{mm}, on a pris $D' = 0{,}8\ D = 0{,}8 . 300 = 240^{mm}$. La partie annulaire de chaque siège a, dans ce cas, pour largeur: $\frac{s}{2} = {}^1/_2\ (4 + \sqrt{240}) = {}^1/_2\ (4 + 15{,}5) = 10^{mm}$ et pour projection ${}^1/_2\ (s - 4) = 8^{mm}$.

Fig. 658.



La soupape de Gros, fig. 658, est d'un emploi très-satisfaisant, toutes les fois que le fluide doit s'introduire latéralement

dans la boite de la soupape et s'échapper par la partie inférieure. Le diamètre moyen D' du clapet doit être pris égal ou supérieur au diamètre D de l'orifice d'écoulement. Les formules (266) et (267) sont applicables à la détermination de h et de s. La partie en pointillé, sur la figure, montre qu'il est facile de faire arriver le fluide dans la boite par deux orifices latéraux.

La disposition de soupape tubulaire, indiquée par la fig. 659, dérive de celle de Hornblower. L'introduction du fluide a lieu par le bas et son écoulement se produit latéralement. Le diamètre moyen du clapet D' est égal à $D + s$ et, par conséquent, le diamètre inférieur D_1 doit être pris égal à D. La levée du clapet et la largeur des sièges se calculent par les formules précédentes.

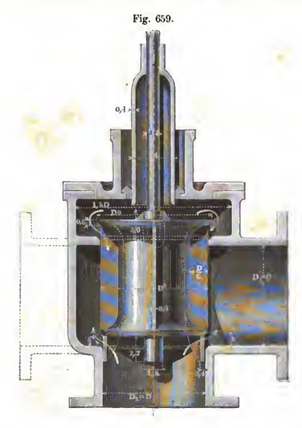
Dans la fig. 659, la tige du clapet est munie d'un piston creux, sur lequel agit, à l'intérieur, la pression du fluide. Ce dispositif, qui peut également s'appliquer aux deux soupapes précédentes, présente un assez grand intérêt pour les soupapes de grandes dimensions, dont la levée exige encore un effort souvent assez considérable, bien que la pression n'agisse, en sens contraire du mouvement, que sur une surface assez faible. Avec le piston, on peut réduire cet effort à telle valeur qu'on juge convenable, à la seule condition de donner à ce piston un diamètre suffisant. Il est facile, comme le montre le tracé en pointillé, d'établir un second orifice d'évacuation, dans les cas où il devient nécessaire. En remplaçant la section circulaire par une section rectangulaire, pour le conduit d'écoulement, on peut arriver à réduire assez notablement l'écartement des sièges, c'est-à-dire la hauteur de la soupape.

En Amérique, les soupapes de Hornblower, ainsi que celles de la forme précédente, s'exécutent le plus souvent en deux parties, qu'on réunit par des boulons; le plan de séparation est mené, normalement à l'axe, par le milieu de la hauteur; grâce à cet artifice, on peut augmenter le siége inférieur, le rendre très-sensiblement égal au siége supérieur, et réduire ainsi l'effort de soulèvement, en ne laissant subsister que la pression indispensable pour assurer la fermeture de la soupape.

Pour toutes les soupapes à double siége, on doit apporter, dans l'exécution, la plus grande attention à ce que les deux parties coniques du clapet viennent bien porter, en même temps, toutes les deux sur leurs siéges. Le guidage de la soupape,

dans la direction de l'axe, a également une très-grande importance. Aussi, dans un certain nombre d'appareils de construction

Fig. 659.



récente, le clapet, au lieu de se terminer par une tige de faible diamètre, comme sur nos figures, porte, immédiatement au-dessus de la partie conique, un cylindre de grand diamètre, qui paraît plus propre à guider la soupape dans son mouvement.

Parmi les trois formes de soupapes que nous venons d'examiner, la soupape de Hornblower est celle qui exige les plus faibles dimensions.

XX. Pistons.

§ 267.

Des différentes espèces de pistons et de leurs garnitures.

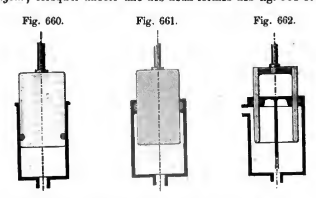
Les *pistons* sont des organes mobiles qui, suivant les cas, sont mis en mouvement par l'action des fluides ou servent à transmettre le mouvement qu'ils possèdent à des liquides ou à des gaz. L'action d'un organe de ce genre repose tout entière sur les variations que son mouvement relatif détermine, pour le volume compris entre lui et les parois du réservoir, dans lequel il se meut.

Si l'on veut que ce volume se trouve, à chaque instant, complètement isolé, il est essentiel que le piston s'applique sur les parois du réservoir au moyen d'une garniture, assez serrée pour produire une fermeture, sans devenir un obstacle au mouvement. Il est évident, d'après cela, que la disposition de cette garniture doit dépendre de la forme du piston et du réservoir qui le renferme. Le plus souvent, les pistons possèdent un mouvement rectiligne et ils affectent, par suite, la forme prismatique, qui, dans la majeure partie des cas, se trouve être, de plus, à section circulaire. Nous n'examinerons ici que les pistons cylindriques; des règles que nous allons établir, pour ce cas particulier, il sera d'ailleurs facile de déduire celles qu'il conviendrait d'adopter pour des pistons de formes différentes.

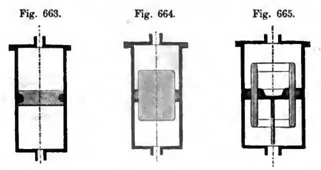
L'étanchéïté de la garniture peut s'obtenir d'un grand nombre de manières. Un des modes de garniture le plus employé est celui dans lequel la garniture se compose d'un anneau flexible, élastique, entourant le piston. Dans ce cas, un dispositif mobile permet d'exercer, sur la matière de cette garniture, une pression assez forte pour empêcher le fluide de la traverser.

L'anneau, dont se compose la garniture, peut être logé dans l'intérieur de la paroi du cylindre fixe ou, au contraire, dans celle du cylindre plein, c'est-à-dire du piston. On a ainsi deux espèces de garniture, extérieure et intérieure, représentées par les fig. 660 et 661. La fig. 662 donne une garniture double pour un seul piston. La disposition de la fig. 661 rentre dans

la catégorie des garnitures avec boite-à-étoupes, tandis que celle de la fig. 660 constitue plus particulièrement ce qu'on appelle une garniture de piston. Lorsque le cylindre fixe est ouvert sur un côté, comme dans les fig. 660 à 662, le piston est dit à *simple effet;* on le désigne spécialement, sous le nom de piston *plongeur*, lorsqu'il affecte une des deux formes des fig. 661 et 662.


Fig. 660. Fig. 661. Fig. 662.

Lorsque le cylindre fixe a une ouverture de chaque côté du piston, comme dans les fig. 663 à 665, le piston est dit à *double effet.* Pour qu'un piston de ce genre puisse recevoir son


Fig. 663. Fig. 664. Fig. 665.

mouvement en dehors du corps de pompe, on le munit ordinairement d'une tige, sortant à l'extérieur, fig. 666 et 667, qui passe elle-même à travers une garniture et qui est, en réalité, un véritable piston plongeur, relié avec le premier. La garniture de la tige peut être intérieure, comme, par exemple, en a, ou extérieure, comme en a', fig. 666 (en pointillé).

Cette tige agissant sur le fluide comme plongeur, il en résulte que l'action sur ce fluide est différente au-dessus et au-dessous du piston. Si l'on veut éviter cette différence, il convient d'établir, au-dessous, une seconde tige, de même diamètre que la première, ainsi que le représente la fig. 666 en pointillé. L'addition d'une tige peut être évitée de plusieurs manières, en adoptant, par exemple une disposition analogue à celle de la fig. 668, dans laquelle une commande directe par manivelle se

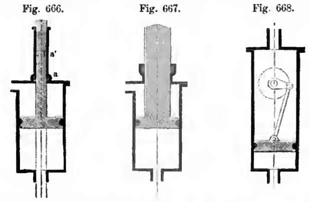


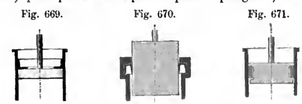
Fig. 666. Fig. 667. Fig. 668.

trouve établie à l'intérieur du cylindre; un autre procédé consiste à mettre le piston en mouvement par la pression d'un fluide (presse hydraulique, distribution du marteau à vapeur de Joy, etc.).

Les pistons, à simple et à double effet, sont fréquemment percés d'ouvertures, qu'on munit de soupapes; on les désigne alors sous le nom de pistons à soupapes.

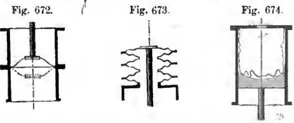
Dans le mode de garniture que nous venons d'examiner, l'étanchéïté ne s'obtient qu'à la condition d'exercer une pression extérieure sur la garniture elle-même. Entre cette garniture et la surface sur laquelle elle glisse, imaginons une couche mince du fluide que le piston doit isoler (eau, air, vapeur, etc.), il est évident que la portion du fluide, située du côté où la pression du piston est la plus forte, ne pourra pas passer de l'autre côté, si on exerce, sur la garniture, une action telle que la pression, transmise à la couche fluide interposée, soit précisément équivalente à la plus grande de celles qui règnent sur les faces du piston. Cette pression entre la garniture et la surface de glissement se trouve très-simplement réalisée dans les garnitures *automatiques* ou *autoclaves*.

Les fig. 669 et 670 représentent des garnitures de ce genre (en cuir) pour pistons à disques et pistons plongeurs; le fluide,


Fig. 669. Fig. 670. Fig. 671.

soumis à la pression la plus forte, agit sur la face postérieure du rebord de la garniture et tend à l'appliquer sur les parois de la partie fixe, avec une force précisément égale à celle que nous avons indiquée comme nécessaire, pour donner une fermeture étanche. La fig. 671 est une garniture métallique, qu'on emploie assez souvent pour les pistons plats et plus rarement pour les pistons plongeurs; le fluide, soumis à la pression la plus forte, agit sur la face intérieure de l'anneau métallique et le presse à la fois contre la surface fixe et contre l'un des rebords du disque, dans lequel se trouve pratiqué le logement de cet anneau.

La garniture à membrane, dont la disposition est analogue à celle des soufflets, est utilisée pour les pistons de pompes des prêtres, fig. 672. En employant une matière réellement imperméable, cette disposition ne peut donner lieu à aucune fuite. En 1852, Martini l'a appliquée à une machine à vapeur, en faisant usage de plaques métalliques (en acier). Pour obtenir, dans ce cas, une surface très-élastique, il convient d'adopter, comme pour les manomètres, une forme ondulée, fig. 673. La disposition de la fig. 674, qui est une modification de la précédente


Fig. 672. Fig. 673. Fig. 674.

et qu'on désigne sous le nom de garniture à poche, a été employée, avec succès, comme piston d'une pompe destinée à comprimer de l'air.

Dans la catégorie des garnitures automatiques, on peut encore faire rentrer les deux dispositifs, à fermeture hydraulique (pour pistons plongeurs), que représentent les fig. 675 et 676. La première forme est employée, pour l'extraction de l'eau, dans les appareils de lavage des minerais, tandis que la seconde est utilisée pour les gazomètres, les pompes à air, les appareils élévatoires à pression d'air de Seiler, les cloches à plongeur,

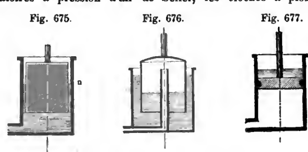


Fig. 675. Fig. 676. Fig. 677.

les caisses à air des constructions sous l'eau (fondation de piles), etc. Avec les garnitures à étoupes ordinaires ou à rebords, le piston est assez souvent recouvert d'une couche d'eau ou d'huile, destinée à empêcher l'introduction d'air (fig. 677).

Une dernière classe de garnitures de pistons est celle que représente la fig. 678, dans laquelle le contour du piston est muni d'une série de rainures, formant un véritable labyrinthe, à travers lequel doit circuler le fluide, avant de s'échapper. Cette disposition est utilisée, de préférence, pour les pistons à air. Par suite des variations de la section du canal qu'il doit suivre pour s'échapper, l'air circule, en réalité, dans ce labyrinthe avec une vitesse qui va constamment en diminuant, de telle sorte que sa tension, à la sortie du piston, est notablement plus faible que de l'autre côté et la différence est d'autant plus forte que la vitesse du piston, dans la direction de la marche de l'air, est elle-même plus considérable. A la limite inférieure de ce genre de garnitures, se présentent les dispositifs analogues à celui de la fig. 679, dans lequel le piston se compose d'une simple plaque, dont les bords sont à une distance très-faible des parois du corps de pompe, comme, par exemple, dans les chapelets, destinés à l'élévation de l'eau, dans les roues de côté, dans les ventilateurs à ailettes, dans ceux de Fabry, de Lemielle, etc. Au système des pistons à rainures on peut encore rattacher le dispositif de

piston à brosses de la fig. 680, dont on rencontre une application dans une voie ferrée à air comprimé, établie au palais de Sydenham.

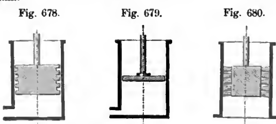


Fig. 678. Fig. 679. Fig. 680.

Les pistons cylindriques, sans aucune espèce de garniture, sont assez rarement employés. Toutefois, c'est à ce genre qu'appartiennent les pistons des indicateurs; on en trouve également un autre exemple dans les pompes de Metz, où ces pistons semblent faire un bon service et peuvent être utilisés aussi bien pour l'extraction de l'air que pour celle de l'eau. Il arrive, d'ailleurs, que, dans certaines circonstances, les pistons à anneaux métalliques perdent leur élasticité et finissent par se comporter comme de véritables cylindres fixes, introduits à frottement doux dans leurs corps de pompe.

§ 268.

Boites à étoupes ou Stuffing-box.

D'après ce que nous avons dit précédemment, entre les boites-à-étoupes et les garnitures de pistons il n'existe, en réalité, qu'une simple différence de construction. Dans les boites-à-étoupes, la matière, qui forme la garniture (chanvre, cuir, coton, avec talc, caoutchouc, feutre, sciure, segments métalliques), est placée sur la surface concave du corps enveloppant, tandis que les garnitures de pistons, proprement dites, sont établies sur la surface convexe du corps enveloppé.

Les fig. 681 et 682 représentent complètement deux Stuffing-box cylindriques, disposés, tous les deux, pour recevoir une garniture de chanvre, mais en sens inverses.

Afin de diminuer l'usure, les deux parties qui embrassent la tige, le grain et le chapeau, sont composées de pièces de bronze rapportées. Le profil en coin annulaire, qui les termine et qui

est dû à Farcot, est préférable à l'ancienne disposition à un seul biseau, qui avait l'inconvénient de laisser souvent un passage ouvert au fluide, entre la garniture et la surface concave, sur

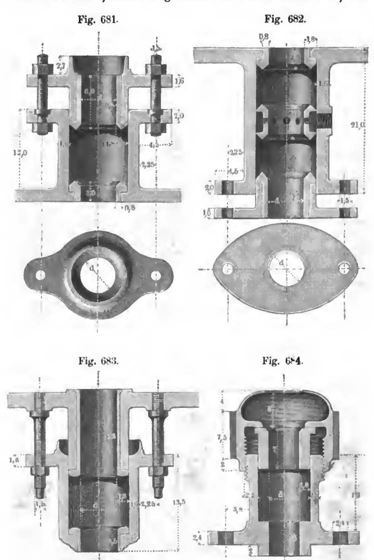


Fig. 681. Fig. 682.

Fig. 683. Fig. 684.

laquelle elle était supposée appliquée. Dans ces derniers temps, on a adopté une disposition intermédiaire entre celle de Farcot et l'ancienne; la pièce, destinée à transmettre la pression à la garniture, se termine par une surface entièrement plane, comme dans la fig. 684, ou encore par une surface légèrement courbe, comme dans la fig. 683. Cette dernière figure indique une disposition très-convenable de Stuffing-box suspendu. Sur le fond du cylindre, autour de l'orifice du Stuffing-box, est ménagé un petit rebord, destiné à empêcher l'eau de condensation de s'écouler dans la boite. A l'extrémité libre, les deux boulons se terminent par une partie cylindrique, dont le diamètre est précisément celui du noyau de la partie filetée; cette disposition, dont l'emploi, depuis quelque temps, tend à se généraliser, a l'avantage de faciliter beaucoup l'entrée de l'écrou sur le filet.

Le presse-étoupes devant toujours rester concentrique à la tige du piston, pour qu'on n'ait pas à redouter de coincements, il s'ensuit qu'on doit s'attacher à ce que les deux écrous s'avancent constamment de la même quantité; dans les grandes machines à vapeur, celles de la marine, par exemple, on obtient facilement ce résultat, en munissant les écrous de roues dentées, commandées par deux vis sans fin, établies sur un axe commun. Dans les boites-à-étoupes de petites dimensions, on peut employer une disposition encore plus simple, qui consiste à produire le serrage au moyen d'un écrou unique, concentrique à l'axe de la tige, fig. 684. La boite-à-étoupes, que représente cette dernière figure, et qui est très-convenable pour les tiges de tiroirs, est supposée entièrement en bronze. L'écrou porte six ou huit entailles prismatiques, dans lesquelles s'engagent les dents de la clef, destinée à produire le serrage.

Le module des nombres proportionnels, indiqués sur les figures, est donné par la formule empirique:

$$s = 4\sqrt[4]{d} + 1 - 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

d désignant le diamètre intérieur du presse-étoupes. Les résultats, calculés au moyen de cette formule, sont consignés dans la table suivante.

Exemple. Une boite-à-étoupes, de 80mm de diamètre intérieur, a pour module de construction, d'après la formule (268), $s = 9^{mm}$. L'épaisseur de la garniture est alors $1{,}8 \cdot s = 1{,}8 \cdot 9 = 16^{mm}$; quant à la hauteur du presse-étoupes lui-même, elle est $12 \cdot s = 12 \cdot 9 = 108^{mm}$, pour le dispositif de la fig. 683, et $21 \cdot s = 21 \cdot 9 = 189$, pour celui de la fig. 682 etc.

d	*s*	*d*	*s*	*d*	*s*
5	3	150	11	915	19
9	4	198	12	1093	20
16	5	256	13	1296	21
26	6	326	14	1526	22
39	7	410	15	1785	23
57	8	509	16	2076	24
81	9	625	17	2401	25
112	10	760	18	3164	26

Lorsqu'une boite à garniture de chanvre doit être placée horizontalement, il convient de donner à la portée du fond une longueur assez considérable, de 8 à 12 *s*, afin qu'elle ne soit pas exposée à une usure trop rapide. Pour les épaisseurs des parois de la boite, on peut, dans certains cas, être conduit à s'écarter des dimensions indiquées par les nombres proportionnels; c'est ce qui a lieu, par exemple, lorsque les parois des parties voisines ont une épaisseur plus considérable, dont il convient de tenir compte, afin d'obtenir des pièces bien fondues. Dans tous les cas de ce genre, les données précédentes doivent être simplement utilisées comme indications. Dans les Stuffing-box des tiges de tiroirs de machines à vapeur, le presse-étoupes s'exécute souvent en deux parties, séparées par un plan passant par l'axe de la tige. Le plan des rebords de la boite du tiroir passe alors lui-même par ce même axe. Cette disposition offre l'avantage de faciliter l'ajustage du tiroir et l'introduction de la tige.

Les fig. 685 et 686 représentent deux dispositions de Stuffing-box, avec garnitures en cuir embouti, qui sont spécialement employées dans les presses hydrauliques; la première est applicable aux pistons d'un petit diamètre, tandis que la seconde convient surtout pour ceux dont le diamètre est assez considérable. Le cuir embouti de la fig. 686 est soutenu par un anneau en fer fendu, qui l'oblige à se placer convenablement, avant que la pression de l'eau n'ait commencé à agir. Lorsqu'un Stuffing-box, dans le genre de celui de la fig. 686, doit être disposé horizontalement, il convient d'introduire, au-dessous du cuir embouti (dans la cavité figurée en pointillé), un anneau de bronze en plusieurs parties, dont le diamètre soit rigoureusement le même que celui du piston, de manière à empêcher que ce piston

ne vienne à frotter sur la paroi en fonte du corps de pompe; cet anneau est, de plus, légèrement en saillie sur le bord intérieur du logement du cuir, afin d'éviter complètement le contact du piston avec cette paroi en fonte.

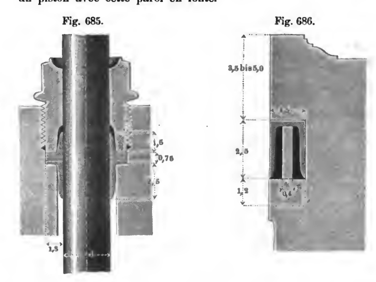


Fig. 685. Fig. 686.

Le frottement qu'éprouvent un piston plongeur ou une tige de piston, dans une garniture ordinaire, dont le serrage se fait par des écrous, ne peut pas être calculé à priori, puisqu'il dépend essentiellement de la pression exercée sur la garniture. Il n'en est pas de même dans les garnitures en cuir embouti, où la pression de la garniture est précisément celle du fluide emprisonné. Des remarquables expériences de Hick il résulte que, dans une garniture en cuir embouti, parfaitement graissée, le frottement (contrairement à l'opinion admise) est indépendant de la hauteur du rebord et est en rapport simple avec la pression de l'eau et le diamètre du piston. Si on désigne par P la charge du piston de la presse, par D le diamètre de ce piston et par F le frottement, on a:

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{D} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (269).$$

Pour un cuir neuf, la valeur du frottement est une fois et demie environ celle que donne cette formule. Si, au lieu de P, on

introduit la pression p de l'eau par millim. carré, la relation précédente devient:

$$\frac{F}{p} = \frac{\pi}{4} D \quad \ldots\ldots \quad (270).$$

Exemple. Pour un piston de presse de 10^{mm} de diamètre, la formule (269) donne, pour la perte due au frottement, $^1/_{10}$ ou $10\,p\,^0/_0$ de la charge totale; pour un diamètre de piston de 600^{mm}, cette perte n'est plus que de 0,00167 ou $^1/_6\,p\,^0/_0$. Si on suppose, par exemple, que la pression de l'eau soit de 300 atmosphères, ou de 3^k par millim. carré, la résistance correspondant au frottement est, d'après la formule (270), $F = \frac{\pi}{4}\,600 \cdot 3 = 1414^k$; la pression P exercée sur le piston est elle-même: $P = 3 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 600^2 = 3 \cdot 282743 = 848229^k$.

§ 269.

Pistons à vapeur.

De tous les pistons les plus importants sont ceux dont on se sert dans les machines à vapeur. Pour les machines à basse pression, on emploie encore assez fréquemment des pistons à garniture de chanvre; mais, pour les machines à haute pression, on a recours aux garnitures métalliques, qui se composent d'anneaux ou de segments, appliqués par des ressorts contre les parois du cylindre et, de plus, fortement pressés contre ces parois par la pression même de la vapeur; dans un certain nombre de cas, on arrive à un résultat très-satisfaisant en faisant usage d'une garniture mixte, dans laquelle les anneaux métalliques se trouvent pressés par une garniture de chanvre, remplaçant les ressorts.

Le module que nous adopterons pour les dimensions des pistons est le même que celui du paragraphe précédent:

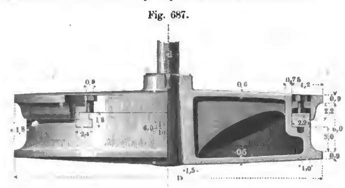
$$s = 4\sqrt[4]{D+1} - 3 \quad \ldots\ldots \quad (271).$$

D désignant le diamètre du piston.

Fig. 687. Piston à garniture de chanvre, en forme de boite creuse en fonte, disposé suivant le système de construction de Penu; le serrage de la garniture s'effectue au moyen d'un couvercle annulaire mobile; les boulons, sur lesquels on agit, pour produire cet effet, s'engagent dans des écrous fixes en bronze. Dans le cas de grands diamètres, le corps du piston présente, vers le centre, un certain bombement, qu'on détermine

en prenant, pour la hauteur au milieu, $6s + \frac{D}{10}$ et, pour celle des bords, 7,8 s; dans le cas où cette dernière valeur se trouve supérieure à la précédente, on doit l'adopter également pour la hauteur au centre et il n'y a plus alors de bombement.

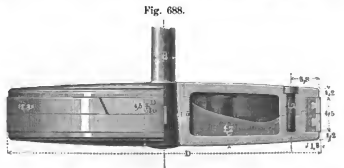
Fig. 687.



Exemple. Pour un piston à garniture de chanvre, dont le diamètre $D = 600^{mm}$, on a $s = 17$. L'épaisseur de la garniture est, par suite, de $1,8 \cdot 17 = 31^{mm}$ et sa hauteur, près des bords, de $7,8 \cdot 17 = 133^{mm}$; la hauteur du piston, près du moyeu, a pour valeur $6 \cdot 17 + \frac{600}{10} = 162^{mm}$, qui est notablement supérieure à la hauteur précédente.

La fig. 688 représente un piston métallique (de Krauss), qui donne de très-bons résultats. La garniture est formée de deux anneaux, coupés obliquement, en acier recouvert de métal blanc. Si l'on veut faire disparaître le défaut d'étanchéïté, qui

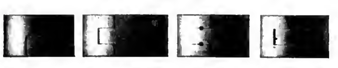
Fig. 688.



correspond à la coupure de chaque anneau, on peut recourir à l'un quelconque des dispositifs de la fig. 689. Les différentes

pièces rapportées doivent s'ajuster rigoureusement sur les entailles correspondantes de l'anneau; il doit en être de même pour le premier mode de fermeture, qui est à simple recouvrement.

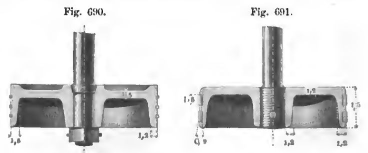
Fig. 689.



Il est extrêmement important d'employer, pour les anneaux, un métal plus mou que celui du cylindre, afin que l'usure se produise principalement sur ces anneaux, qui sont beaucoup plus faciles à remplacer. A ce point de vue, les anneaux entièrement en bronze sont d'un emploi avantageux; le fer et l'acier, au contraire, sont peu satisfaisants; on obtient d'assez bons résultats avec des anneaux en fonte très-douce, surtout lorsque la fonte des parois du cylindre présente suffisamment de dureté.

Fig. 690. Piston de Ramsbottom. La garniture de ce piston, qui a pour lui la sanction d'une longue expérience, se compose de trois anneaux en acier, ou mieux en laiton, dont la section est un carré de 6^{mm} de côté. La fig. 691 représente ce qu'on appelle le piston Suédois. Les anneaux, dont la jonction est à recouvrement, comme dans le premier dispositif de la fig. 689, sont en fonte bien homogène, en bronze élastique ou encore (ce qui est moins bon) en fer; ces anneaux reçoivent

Fig. 690. Fig. 691.



une courbure telle qu'ils puissent s'appliquer exactement dans les rainures pratiquées sur le corps du piston.

On rencontre de nombreuses applications de cette dernière disposition, avec anneaux en fer, dans les machines de bateaux

en Suède (Karlssunder) et dans les chemins de fer français. Dans ces derniers temps, le piston suédois a été également appliqué avec succès aux pompes à air.

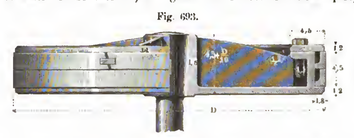
La fig. 692 représente un piston suédois pour machine fixe, emprunté à une grande machine soufflante, d'une construction très-remarquable (Egestorff). Le corps du piston a la forme d'une boite creuse, comme celui de la fig. 687; sur la figure en plan se trouvent indiqués les trous ronds, qui servent au dégagement du noyau, lorsque la pièce est fondue. La garniture se compose d'anneaux en fonte, qui s'assemblent à recouvrement, comme dans la premier dispositif de la fig. 689, et dont la position est assurée par de petits tenons. Le mode de fixation du moyen du piston mérite d'attirer l'attention; la clavette transversale est maintenue par une seconde clavette, qui est elle-même munie d'un boulon de sûreté.

Fig. 692.



La fig. 693 représente un piston, à garniture mixte, applicable à une machine à simple effet. La garniture en chanvre, tassée derrière les anneaux métalliques, assure une étanchéïté satisfaisante, car on peut lui donner une assez grande résistance, tout en lui conservant suffisamment d'élasticité. Ce mode de garniture, qui fournit des résultats très-satisfaisants dans les machines de mines, pourrait être substitué avec avantage, dans les machines de bateaux, aux garnitures entièrement métalliques,

Fig. 693.



qui sont exposées à des détériorations assez rapides, par suite des vibrations que tendent à imprimer au piston les mouvements d'oscillation du navire, lorsqu'ils arrivent à être très-prononcés.

§ 270.

Pistons de pompes.

Pour les pistons de pompes, les garnitures en cuir peuvent être employées avec avantage, tant que la température du fluide, sur lequel on doit agir, ne dépasse pas 30°; pour les températures plus élevées, on a recours ordinairement aux garnitures de chanvre; ainsi, par exemple, ce sont celles qu'on emploie le plus souvent pour les pompes d'alimentation des chaudières à vapeur, ainsi que pour les pompes à air des machines à condensation et des appareils de cuite des sucreries.

La fig. 694 représente un piston à disques, avec garniture en cuir embouti, et la fig. 695 un piston, avec garniture simple en cuir et double clapet, qui convient parfaitement pour les pompes de puits, auxquelles on l'applique le plus ordinairement. La garniture de ce piston se compose de rondelles coniques de cuir et de chanvre superposées. Dans les deux pistons, la garniture se trouve appliquée contre les parois du corps de pompe

par la pression de l'eau. Pour les pompes d'épuisement des mines, lorsqu'on se trouve en présence d'eaux acides, qui attaqueraient les garnitures en cuir, on munit souvent les pistons

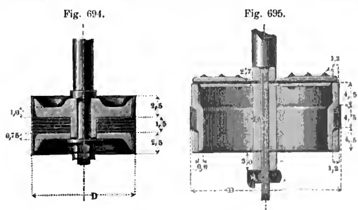


Fig. 694. Fig. 695.

d'anneaux métalliques, en fonte douce; à Fahlun, en Suède, dans un cas de ce genre, on s'est décidé à employer, pour la garniture des pistons, l'écorce de bouleau, qui, après des essais multipliés, avait été reconnue comme la matière la plus convenable. Le module, correspondant aux nombres proportionnels des figures, est l'unité s de la formule (271). Dans les pompes de puits à pistons plongeurs, la garniture des stuffing-box est composée de tresses de chanvre.

§ 271.

Calcul des tiges de pistons.

Les tiges de pistons se font ordinairement en fer ou en acier; lorsqu'une tige de ce genre ne doit être soumise qu'à des efforts de traction, il convient de la calculer en ayant égard à la résistance d'extension, mais lorsqu'elle a à résister, en même temps, à des efforts de compression et que sa longueur est relativement considérable, elle doit être calculée comme une pièce chargée debout. Si, au contraire, la longueur est faible, il suffit d'avoir égard à la résistance de compression, qui conduit aux mêmes dimensions que la résistance à la traction. Par conséquent, les tiges qui doivent être calculées comme des pièces chargées

debout ne peuvent jamais avoir de diamètres inférieurs à ceux qu'on déterminerait, en ayant simplement égard à la résistance de traction.

a. *Calcul d'une tige de piston, en ne tenant compte que de la traction.*

Si on désigne par D le diamètre du piston et par n la pression effective, en atmosphères, la pression totale P de la vapeur, sur le piston, a pour expression $\frac{n}{100} \frac{\pi}{4} D^2$. Pour une tige supposée en fer et soumise simplement à la traction, la section, au point où elle est la plus faible, ne doit pas avoir à supporter une tension supérieure à 6^k. On doit donc prendre pour le diamètre δ de cette section:

$$\frac{\delta}{D} = 0{,}0408 \sqrt{n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (272)$$

ou, avec une approximation suffisante:

$$\frac{\delta}{D} = \frac{57 + 7n}{1000} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (273).$$

Exemple. Pour $n = 4$, la formule (272) donne: $\frac{\delta}{D} = 0{,}0816$; on a, par suite, pour un diamètre de piston de 500^{mm}, $\delta = 500 \cdot 0{,}0816 = 40{,}8$ ou 41^{mm}. La formule approximative (273) donnerait: $\frac{\delta}{D} = \frac{57 + 28}{1000} = 0{,}085$ ou $\delta = 42^{mm},5$.

Pour une tige en acier, soumise simplement à un effort de traction, le diamètre doit être pris égal à 0,8 de celui d'une tige en fer.

Lorsque la tige d'un piston se trouve affaiblie par un trou de clavette ou par un filetage, cet affaiblissement doit être compensé par une augmentation du diamètre. Pour ce motif, on a été conduit, dans certains cas, à adopter un renflement aux extrémités de la tige, comme, par exemple, dans les locomotives; de là la nécessité de faire le chapeau du stuffing-box en deux parties.

b. *Calcul d'une tige de piston, considérée comme pièce chargée debout.*

En conservant les notations précédentes et en désignant, de plus, par L la longueur de la tige, on doit prendre:

$$\frac{\delta}{D} = 0{,}0573 \sqrt{\frac{L}{D}} \sqrt[4]{n} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (274)$$

formule qui a servi à calculer la petite table suivante:

$\frac{L}{D}$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$
1,5	0,070	0,083	0,093	0,099	0,105	0,110	0,114	0,118
2,0	0,081	0,096	0,107	0,115	0,121	0,127	0,132	0,136
2,5	0,091	0,108	0,120	0,128	0,136	0,142	0,148	0,153

Les valeurs, fournies par cette table, sont aussi bien applicables aux tiges en acier qu'aux tiges en fer (v. le calcul des corps de bielles § 243 et le rapport des coefficients d'élasticité des deux matières, table du § 2).

Exemple. Dans un cylindre à vapeur, de 400^{mm} de diamètre et de 1000^{mm} de course de piston, la pression effective est de 4 atmosphères; comme $\frac{L}{D} = \frac{1000}{400} = 2{,}5$, *on doit prendre, d'après la table (colonne 5, ligne 3):* $\frac{\delta}{D} = 0{,}128$, *ou* $\delta = 0{,}128 \cdot 400 = 51^{mm}$.

Pour la clavette du piston, qui doit toujours être en acier, on détermine ses dimensions de manière à ce qu'elle ne soit soumise qu'à un effort de cisaillement de 4 à 6^k. Il convient, en outre, de ne pas donner à cette clavette une largeur trop faible, afin que la pression, par unité de surface, sur le plus petit côté ne soit pas trop considérable. D'après les indications fournies par des constructions, qui ont reçu la sanction de l'expérience, cette pression, par unité de surface, varie de 5 à 6^k, dans les machines fixes, et de 8 à 10^k dans les locomotives.

XXI. Câbles et chaines.

§ 272.

Des différentes espèces de câbles et de chaines.

Les *câbles* et les *chaines* sont, en général, utilisés pour produire des efforts de traction, c'est-à-dire qu'on peut les considérer comme des organes ayant essentiellement pour but la

transmission d'efforts de ce genre; on les divise en deux classes principales:

1. *Les câbles et chaines fixes,*
2. *Les câbles et chaines mobiles.*

Dans la première classe rentrent ceux de ces organes qu'on emploie pour supporter simplement des charges ou pour consolider certaines pièces, comme on en trouve de nombreux exemples dans les ponts suspendus, les ponts de bateaux, les cordages de navires, les tendeurs des cheminées en tôle, etc. Les organes de la seconde classe se rencontrent dans les moufles, les treuils, les cabestans, les grues et dans les roues de transmission à action indirecte (§ 153). Ces derniers organes peuvent se diviser eux-mêmes en deux catégories:

a. *Câbles et chaines de charge,*
b. *Câbles et chaines de transmission.*

Dans la pratique, ces deux variétés présentent des dispositions différentes, qui tiennent à ce que, pour les câbles et les chaines de transmission, on doit s'attacher particulièrement à empêcher l'usure et que, de plus, on doit leur donner une forme sans fin (v. ch. XI).

Pour l'exécution des câbles, on fait usage de matières fibreuses, du chanvre notamment, et de fils métalliques, surtout de fils de fer; pour les chaines, on n'emploie guère d'autre métal que le fer. Nous sommes ainsi conduits à étudier séparément les câbles en chanvre, les câbles métalliques et les chaines.

A. Câbles en chanvre.

§ 273.

Câbles ronds ou cordes.

Les câbles dont l'usage est le plus répandu sont les câbles ronds à trois torons. On les fait plus ou moins serrés, suivant qu'ils doivent être principalement employés comme câbles fixes ou comme câbles mobiles; la tension qu'on peut leur faire supporter est évidemment plus faible dans le second cas que dans le premier. Si on désigne par:

d le diamètre du cercle circonscrit aux trois torons,
u le contour du câble (c'est-à-dire la longueur d'un fil embrassant ce câble),
δ le diamètre de chaque toron,

on a d'abord:
$$\left.\begin{aligned} d &= 2{,}15\,\delta \\ u &= 6{,}14\,\delta = 2{,}85\,d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (275).$$

Si on désigne, en outre, par P la charge, on peut, pour les câbles lâches ou peu serrés, admettre, dans la section, une tension de $^1/_3{}^k$ et poser, par suite:
$$\left.\begin{aligned} d &= 1{,}2\,\sqrt{P} \\ u &= 3{,}42\,\sqrt{P} \\ P &= 0{,}7\,d^2 = 0{,}085\,u^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (276).$$

Pour les câbles fortement serrés, la tension peut s'élever à 2^k et on a alors:
$$\left.\begin{aligned} d &= \sqrt{P} \\ u &= 2{,}85\,\sqrt{P} \\ P &= d^2 = 0{,}125\,u^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (277).$$

La table du § 275 donne une série de valeurs calculées d'après ces formules. Pour les câbles lâches, bien exécutés et formés de chanvre de bonne qualité, la charge de rupture est de 8 à 9^k, tandis qu'elle est de 12 à 13^k pour les câbles très-serrés; il ne faut pas perdre de vue, d'ailleurs, que, dans le calcul de la tension, on doit prendre, pour valeur de la section du câble, la somme des sections de ses torons.

Dans le cas où il s'agit de cordes mobiles sur des poulies ou des tambours, le rayon de ces poulies ou de ces tambours ne doit jamais être inférieur à 3 ou $4\,d$, pour les cordes lâches, et à 6 ou $8\,d$, pour les cordes fortement serrées; le rayon se mesure du centre du tambour au milieu de la corde. Dans les applications d'une certaine importance, comme, par exemple, dans les appareils d'extraction des mines, le rayon R n'est jamais inférieur à $25\,d$.

Le câbles plats en chanvre se composent de 4 à 6 câbles ronds, juxtaposés, qui doivent être calculés chacun pour une charge égale à $^1/_4$ ou $^1/_6$ de la charge totale, en supposant, toutefois, qu'on apporte le plus grand soin dans le mode de réunion de ces câbles.

§ 274.

Poids des câbles en chanvre.

Le poids G_0, par mètre courant, est, en moyenne:

pour les câbles peu serrés:

$$G_0 = 0{,}00071\,d^2 \quad \ldots\ldots \quad (278)$$

pour les câbles fortement serrés:

$$G_0 = 0{,}00106\,d^2 \quad \ldots\ldots \quad (279).$$

Ce poids peut encore être représenté par une même expression pour ces deux natures de câbles (ronds ou plats, à trois ou à quatre torons):

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= \frac{P}{1000} \\ \text{d'où} \quad P &= 1000\,G_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (280).$$

Cette dernière formule montre que le poids d'un câble, en chanvre de bonne qualité et d'une exécution soignée, peut servir à déterminer l'effort que ce câble est susceptible de supporter. Cet effort, en négligeant l'action du poids propre du câble, s'élève à 1000 fois la valeur du poids par mètre courant.

Si l'on veut tenir compte du poids propre de la partie du câble qui est verticale, ce qui, en général, n'est pas nécessaire, on doit, dans les formules (276) et (277), remplacer P par la valeur $\dfrac{P}{1-\dfrac{L}{1000}}$, en désignant par L la longueur en mètres de cette partie verticale.

Pour $L = 1000$, d devient infiniment grand, c'est-à-dire que, pour cette longueur limite, un câble ne peut supporter que son propre poids. Pour une longueur plus grande, le poids seul du câble donne lieu à une tension supérieure à la limite que nous avons admise. Pour une longueur de 5000 à 6000^m, le câble arrive à se rompre sous son propre poids.

Pour un câble complètement immergé dans l'eau (câble d'ancre, ligne de sonde), les longueurs correspondant à la charge limite et à la rupture atteignent et dépassent même le double des valeurs précédentes.

§ 275.

Table relative aux câbles en chanvre à trois torons.

Câbles.		Câbles lâches.			Câbles serrés.			
						R		
d	u	P	R	G_0	P	Treuils.	Appareils d'extraction.	G_0
10	28,5	70	30	0,071	100	60	250	0,106
12	34	101	36	0,102	144	72	300	0,153
15	43	158	45	0,160	225	90	375	0,229
20	57	280	60	0,284	400	120	500	0,424
25	71	438	75	0,444	625	150	625	0,663
30	85	630	90	0,64	900	180	750	0,95
35	100	858	105	0,87	1225	210	875	1,30
40	114	1120	120	1,14	1600	240	1000	1,70
45	128	1418	135	1,44	2025	270	1125	2,15
50	143	1750	150	1,78	2500	300	1250	2,65
55	157	2118	165	2,15	3025	330	1375	3,21
60	171	2520	180	2,56	3600	360	1500	3,82
65	185	2958	195	3,00	4225	390	1625	4,48
70	200	3430	210	3,48	4900	420	1750	5,19
75	214	3938	225	4,00	5625	450	1875	5,96
80	228	4480	240	4,54	6400	480	2000	6,78
90	257	5670	270	5,75	8100	540	2250	8,59
100	285	7000	300	7,10	10000	600	2500	10,60

Exemple. Une corde de moufle doit supporter une traction de 450^k; cette corde devant être supposée peu serrée, il convient, d'après la table (colonne 3, ligne 5), de lui donner un diamètre $d = 25^{mm}$; le rayon des poulies doit être au moins de 75^{mm}; pour une longueur de 150^m, le poids de cette corde est de $150.0,444 = 66^k,6$.

Une corde fortement serrée, de 50^{mm} de diamètre, peut être soumise à une charge de 2500^k (colonne 6, ligne 10) et son poids, par mètre courant, est de $2^k,65$. Dans le cas où la partie pendante de cette corde aurait une longueur de 400^m, la charge à appliquer à l'extrémité ne serait plus que de $\left(1-\frac{400}{1000}\right) 2500 = 0,6.2500 = 1500^k$.

B. Câbles métalliques.

§ 276.

Câbles ronds en fils de fer.

Les câbles en fils de fer sont le plus souvent à 36 fils et comprennent 6 torons de 6 fils chacun. Si on désigne par:

δ le diamètre d'un fil,
i le nombre des fils,
P le charge appliquée au câble,

on doit prendre:

$$\delta = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{P}{i}} \quad \ldots \ldots \quad (281)$$

$$\frac{P}{i} = 7{,}11\,\delta^2 \quad \ldots \ldots \quad (282)$$

d'où on déduit, pour $i = 36$:

$$\delta = \frac{1}{16}\sqrt{P} \quad \ldots \ldots \quad (283)$$

$$P = 256\,\delta^2 \quad \ldots \ldots \quad (284).$$

On a, en même temps, $d = 8\,\delta$. La tension, par unité de surface, que cette charge détermine pour chaque fil, est de 9^k, valeur qu'on admet fréquemment en Allemagne; en France on dépasse rarement 8^k. L'enroulement sur les tambours se produit exactement dans les mêmes conditions que pour les câbles de transmission; il en résulte qu'on doit donner à ces tambours un rayon R assez considérable. Si on admet 27^k pour la somme des tensions d'allongement et de flexion, ce qui revient à prendre 18^k pour la dernière tension, la formule (160) montre que la valeur du rayon R ne doit pas être inférieure à celle que donne la relation:

$$\frac{R}{\delta} = 555 \quad \ldots \ldots \quad (285)$$

qui, pour un câble de trente-six fils, donne approximativement $\frac{R}{d} = 70$ (1).

(1) Dans les machines d'extraction des mines on trouve encore très-souvent des valeurs de R plus faibles.

Exemple. Pour un câble d'extraction de 42 fils, destiné à élever une charge de 2100ᵏ, le diamètre de chaque fil, d'après la formule (281), doit être $\delta = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2100}{42}} = \frac{3}{8}\sqrt{50} = 2^{mm},65$.

Pour un câble de 36 fils, soumis à la même charge, le diamètre serait, d'après la formule (283); $\delta = \frac{\sqrt{2100}}{16} = 2^{mm},86$. *Dans le premier cas, le rayon du tambour d'enroulement devait être, au moins, de* $555 \cdot 2,65 = 1470^{mm}$ *et, dans le second cas, de* $555 \cdot 2,86 = 1587^{mm}$.

§ 277.

Câbles métalliques plats.

Pour les charges considérables on a généralement recours à l'emploi des câbles plats, qui ont l'avantage d'exiger des diamètres de tambours relativement plus petits que les câbles ronds et de s'enrouler de telle manière que leur ligne moyenne reste toujours dans le même plan. Le plus ordinairement les câbles plats sont formés de six torons, comprenant chacun 24 fils ($i = 144$) et qui sont réunis ensemble, soit par d'autres fils transversaux, soit par des goupilles plates. On peut utiliser, pour le calcul de ces câbles, les formules (281) à (285). Il importe de remarquer que les câbles plats d'extraction, malgré leurs avantages incontestables, ont été pendant longtemps d'un usage moins répandu que les câbles ronds, résultat qui doit être attribué au peu de solidité que présentait l'assemblage des torons dans le sens transversal.

Exemple. Pour un câble plat de 144 fils, destiné à porter une charge de 2100ᵏ, le diamètre de chaque fil, d'après la formule (281), doit être $\delta = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{2100}{144}} = 1^{mm},43$, *et, d'après la formule (285), on doit prendre, pour le rayon du tambour:* $R = 555 \cdot 1,43 = 794^{mm}$.

§ 278.

Poids des câbles métalliques.

Le poids G_0, par mètre courant, d'un câble métallique, composé de i fils de fer, d'un diamètre δ, est donné par l'expression:

$$G_0 = 0,007\, i\, \delta^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (286)$$

d'où on déduit, pour $i = 36$:

$$G_0 = \frac{\delta^2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (287).$$

Exemple. Le câble du paragraphe précédent, qui a 36 fils de $2^{mm},86$ de diamètre, a, par mètre courant, un poids de $\frac{2,86^2}{4} = 2^k,04$.

De même que dans les câbles en chanvre, le poids, par mètre courant, est encore proportionnel à la charge limite, ce qui donne:

$$\left.\begin{aligned} G_0 &= \frac{P}{1000} \\ P &= 1000\, G_0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (288).$$

On voit, d'après cela, que, pour la même longueur et la même charge, un câble métallique a un poids égal à celui d'un câble en chanvre, calculé à l'aide des formules que nous avons indiquées précédemment; par conséquent, du poids d'un câble métallique (de qualité supposée convenable), on peut aussi déduire directement la charge limite qu'il peut porter.

La longueur correspondant à cette charge est, d'après la formule (288), égale à 1000^m; quant à la longueur qui correspond à la charge de rupture, elle se trouve comprise entre 5000 et 6500^m. Si, dans la détermination du diamètre d'un câble métallique, on veut tenir compte du poids propre de la partie qui pend, il convient, comme précédemment, de remplacer P par la valeur $\frac{P}{1 - \frac{L}{1000}}$.

Pour un câble plongé dans l'eau, les longueurs correspondant à la charge limite et à la charge de rupture se trouvent légèrement augmentées, dans le rapport de 10 à 9 environ.

Exemple. Le câble, calculé précédemment pour une charge de 2100^k, étant supposé appliqué à un puits de mine de 400^m de profondeur, la valeur qu'il convient d'introduire, pour la charge, devient $\frac{2100}{1-0,4} = \frac{2100}{0,6} = 3500^k$ et le diamètre du fil doit, par suite, être notablement augmenté. Un fil de sonde ou un câble sous-marin, en fer, se romprait sous son propre poids, s'il se trouvait à une profondeur égale à $^{10}/_9 \cdot 6500$ ou 7200^m environ. La profondeur de 3000^m, qu'atteint, en certains points, le câble transatlantique, ne peut donc pas encore être considérée comme offrant des dangers sérieux, au point de vue de la rupture de ce câble.

§ 279.

Table relative aux câbles métalliques.

Diamètre des fils δ^{mm}.	Câbles ronds à 36 fils			Câbles plats à 144 fils				R (Minim.)
	d	P	G_0	d	b	P	G_0	
	mm.	Kil.	Kil.	mm.	mm.	Kil.	Kil.	mm.
1	8,0	256	0,25	6,0	36,0	1024	1,00	555
1,2	9,6	369	0,36	7,2	43,2	1474	1,45	666
1,4	11,2	502	0,49	8,4	50,4	2007	1,98	777
1,6	12,8	655	0,64	9,6	57,6	2621	2,58	888
1,8	14,4	829	0,81	10,8	64,8	3317	3,27	999
2,00	16,0	1024	1,00	12,0	72,0	4095	4,03	1110
2,25	18,0	1296	1,26	13,5	81,0	5183	5,10	1249
2,50	20,0	1600	1,56	15,0	90,0	6399	6,30	1388
2,75	22,0	1936	1,89	16,5	99,0	7743	7,62	1526
3,00	24,0	2304	2,25	18,0	108,0	9215	9,07	1665

Exemple. Une machine d'extraction doit élever, d'une profondeur de 150ᵐ, des charges de 600ᵏ, placées dans des caisses du poids de 950ᵏ; en supposant qu'on emploie, à cet effet, un câble plat de 144 fils, la valeur à introduire, pour l'effort de traction, est $\frac{950+600}{1-0,150} = \frac{1550}{0,85} = 1820^k$*; pour cet effort, la table indique (colonne 8, ligne 3) un diamètre de fil de* $1^{mm},4$ *et un rayon de tambour de* 777^{mm} *au minimum; la largeur de ce câble est* $6\cdot 6\cdot 1,4 = 50^{mm},4$ *et son poids de* $1^k,98$ *par mètre courant. — Dans les mêmes conditions, un câble rond de 36 fils devrait avoir, d'après la table (colonne 4, ligne 9) un diamètre de fil de* $2^{mm},75$ *et exigerait un rayon de tambour de* 1526^{mm}*, c'est-à-dire que, dans ce cas, l'emploi d'un câble rond serait peu satisfaisant. Toutefois, si on tenait à conserver la forme ronde, il conviendrait d'augmenter le nombre des fils et de le porter à 50 ou 60.*

C. Chaines.

§ 280.

Chaines de charge.

Les chaines, dont se sert le constructeur de machines, se laissent diviser en deux catégories principales: *les chaines de*

charge et *les chaines de transmission*. Dans la première se trouvent comprises toutes les chaines qui servent simplement à supporter ou à déplacer des charges, tandis que la seconde renferme celles qu'on emploie, pour la transmission du mouvement, dans les roues à action indirecte. Nous étudierons ici, plus particulièrement, les chaines de charge; ces organes, pour lesquels le fer est le seul métal employé, présentent une assez grande variété de formes, dont les plus importantes sont les suivantes:

1. Les chaines à *larges maillons* (chaines allemandes), fig. 696,
2. Les chaines à *maillons étroits* (chaines anglaises), fig. 697,
3. Les chaines à *étançons*, fig. 698,
4. Les chaines à *crochets* (chaines de Vaucanson) fig. 699,
5. Les chaines à *articulations* (chaines de Galle), fig. 700.

La distance de deux chainons consécutifs, qui, sur les fig. 696 à 700, est désignée par l, se nomme *la longueur de construction* du chainon.

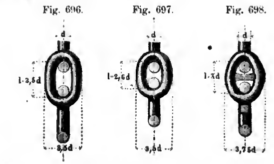


Fig. 696. Fig. 697. Fig. 698.

La chaine à larges maillons ne se distingue de la chaine à maillons étroits que par sa plus grande longueur de construction,

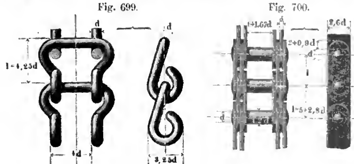


Fig. 699. Fig. 700.

qui est, en réalité, de 3,5 d au lieu de 2,6 d. Cette augmentation de dimension permet de souder un maillon, après qu'on y a introduit les deux autres, ce qu'il n'est pas possible de faire dans l'autre cas; elle a, de plus, l'avantage de donner une chaine un peu plus légère. Les chaines 1 et 2 sont parfois désignées, sous le nom de chaines ouvertes, par opposition à la suivante (3), dans laquelle l'étançon remplit le vide en partie. Cette pièce accessoire a pour but, non seulement de donner plus de résistance à la chaine, mais encore d'empêcher les maillons de s'enchevêtrer, les uns dans les autres; c'est pour ce motif que la chaine à étançons se trouve fréquemment employée comme chaine d'ancre.

Les nombres proportionnels, indiqués sur les figures précédentes, fournissent, pour les maillons, des dimensions très-convenables, mais ils ne sont pas complètement invariables. Ainsi, par exemple, l'amirauté anglaise, pour les chaines ouvertes et à étançons, a adopté, comme longueur de construction, $l = 4\,d$ et, comme largeur intérieure, 1,6 d, nombres qui sont tous les deux supérieurs à ceux qu'indique la fig. 696, pour la chaine à larges maillons. En France, on descend jusqu'à la longueur 2,6 d de la fig. 697, avec une largeur intérieure, qui reste au-dessous de 1,4 d; toutefois, dans la marine militaire, on exige la longueur $l = 3{,}25\,d$ et la largeur 1,4 d, pour les chaines ouvertes; pour les chaines à étançons, les dimensions correspondantes exigées sont 3,85 d et 1,75 d (comme sur la figure). Une autre cause des variations qu'on observe tient aux irrégularités de l'exécution. Pour les grues et les autres appareils d'élévation, on doit employer, de préférence, les chaines calibrées, qui sont établies avec une très-grande perfection. Dans ces derniers temps, la fabrication s'est particulièrement perfectionnée, au point de vue de la qualité des produits, par suite de l'application des chaines à la navigation dans les rivières, qui nécessite l'emploi de maillons parfaitement calibrés et forgés avec le plus grand soin. On fait usage, dans ce cas, de chaines ouvertes à maillons étroits. Ainsi, par exemple, dans le canal d'eau douce de Suez, la chaine de touage a, pour longueur, $l = 3\,d$, pour largeur intérieure, 1,2 d, et, pour diamètre du fer, $d = 17^{mm},5$; le recouvrement à la soudure est de 40 ^{mm}, tandis que, dans la méthode suivie jusqu'ici en Angleterre, on arrive au plus à la moitié de cette longueur. De plus, la soudure est

faite sur le plus petit côté du chainon, au lieu de l'être sur le grand, comme dans l'ancienne méthode. On voit, d'après cela, que le procédé de fabrication usité en France, pour les chaines de touage, est notablement supérieur au procédé anglais. Nous devons ajouter, d'ailleurs, que le système français, dans ces derniers temps, a commencé à s'introduire en Angleterre (1).

Dans les chaines à crochets, qui ne conviennent que pour de faibles efforts, les chainons ne sont pas soudés, mais simplement recourbés. Les chaines de ce genre peuvent être employées, comme organes de transmission, pour de petites forces.

Dans ces dernières années, Neustadt a utilisé, comme chaines de charge, les chaines à articulations, qui, jusqu'à lui, n'avaient été généralement employées que comme organes de transmission. Les chaines de ce genre sont surtout convenables pour les grues et les appareils du même genre, parce qu'elles permettent l'usage de tambours de faibles rayons et conduisent ainsi à une réduction notable des dimensions du mécanisme de transmission.

§ 281.

Calcul des chaines à maillons soudés.

Les chaines à maillons soudés, provenant des bonnes fabriques, sont dans une situation exceptionnelle par rapport aux autres éléments de machines, en raison même de leur mode de construction; avant d'être livrées, elles sont toujours soumises à une charge d'épreuve. Il en résulte que, même pour les chaines qui ne sont pas en service, on connaît par expérience les charges qu'elles peuvent supporter. On admet que la charge d'épreuve doit être proportionnelle à la section totale des deux brins d'un maillon. Pour les chaines ouvertes, elle est de 14^k par millim. carré et, pour les chaines à étançons, de 17^k (en Angleterre $17^k,9$). En réalité, ces charges correspondent à la limite d'élasticité et, pour des charges plus considérables, il commence à se produire des allongements permanents (2). Dans la marine, les efforts réels, auxquels les chaines se trouvent

(1) Les fabriques de Dorémieux fils à S[t] Amand (Nord) et de Plichon Havez à Guérigny fournissent des chaines bien calibrées; on trouve également des produits de ce genre très-soignés dans les usines de Hawks Crawshay et Schleiper, en Angleterre.

(2) La charge d'épreuve de 16^k, qui avait été prescrite pour les chaines de Suez, doit être, pour ce motif, considérée comme trop élevée.

soumises, ne sont connus que d'une manière très-approximative; dans les appareils d'élévation, au contraire, la charge est parfaitement déterminée et il convient de ne pas dépasser, autant que possible, la moitié de la charge d'épreuve.

La charge de rupture des chaines précédentes a une importance encore plus considérable que la charge d'épreuve. Aussi, pour les grandes fournitures de chaines, prescrit-on toujours un minimum pour cette charge; la vérification se fait sur un certain nombre de maillons, prélevés à cet effet. On exige ordinairement que, pour les tiges de fer, destinées à la confection des chainons, la charge de rupture soit comprise entre 32 et 36^k, par millim. carré de la section, et que celle de la chaine terminée soit de 23 à 26^k. On attache, en outre, une grande importance à la ténacité de la matière et on exige, par exemple, qu'avant la rupture, le fer brut soit capable de prendre un allongement relatif permanent, compris entre 10 et 20 p. 100 (1).

Pour les chaines ouvertes, avec l'hypothèse d'une tension de 14^k, la charge d'épreuve est donnée par la seconde des relations:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{,}211\sqrt{P} \\ P &= 22\,d^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (289)$$

et pour les chaines à étançons (avec une tension de 17^k):

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{,}194\sqrt{P} \\ P &= 26{,}7\,d^2 \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (290).$$

C'est d'après ces formules qu'ont été calculées les charges d'épreuves de la table du § 284.

Pour les poulies et les tambours, destinés à l'enroulement des chaines des quatre premiers genres, le rayon R, supposé mesuré de l'axe au milieu de la chaine, doit être compris entre $10\,d$ et $12\,d$. Pour recevoir convenablement les chainons, la couronne de la poulie est tournée et présente, soit une rainure unique, fig. 701, de telle sorte que de deux chainons consécutifs l'un se trouve dans le plan de la poulie et l'autre dans un plan perpendiculaire, soit (d'après une disposition assez récente) une double rainure, fig. 702, de manière à ce que les chainons soient

(1) A l'usine de Guérigny, l'allongement permanent doit être:

pour des tiges de	40^{mm} à 21^{mm}	de diamètre	18 p. 100
- -	20^{mm} à 12^{mm}	-	16 -
	10^{mm}	-	14 -
	8^{mm}	-	12 -
	6^{mm}	-	10 -

tous inclinés de 45° sur l'axe de la poulie. Cette nouvelle disposition à l'avantage de ne pas obliger la chaine à une flexion transversale, comme le faisait l'ancienne.

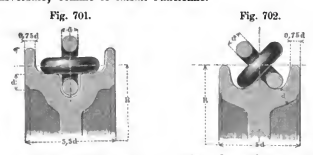


Fig. 701. Fig. 702.

La chaine de Vaucanson, en raison de sa forme, présente une résistance extrêmement faible. Son emploi n'est admissible qu'à la condition de ne pas dépasser la charge fournie par les formules:

$$\left.\begin{aligned} d &= 0{,}5\sqrt{P} \\ P &= 4\,d^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (291).$$

Cette chaine, dont la construction est d'ailleurs très-facile, est rarement employée.

§ 282.

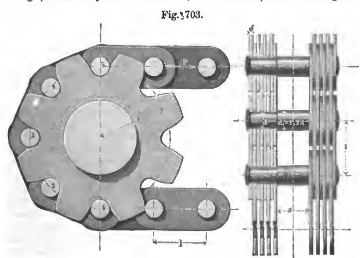
Calcul des chaines articulées.

Les applications qu'a faites Neustadt des chaines articulées ou de Galle sont si nombreuses et les résultats qu'elles ont donnés ont été si satisfaisants qu'elles peuvent être considérées comme un des perfectionnements les plus remarquables, apportés à la construction des grues. En France, les grues de Neustadt ont presque entièrement remplacé les anciennes, tandis qu'elles ne font que commencer à s'introduire en Allemagne, où on semble ne pas apprécier suffisamment leurs avantages, dont les principaux sont la réduction du rayon du tambour du treuil et la faible largeur de ce tambour. La diminution du rayon a naturellement pour conséquence de simplifier la transmission par engrenages, puisqu'elle permet d'adopter un rapport plus faible que dans les grues avec chaines à maillons soudés; la faible largeur du tambour permet également de simplifier beaucoup le bâti, de telle sorte que la grue avec chaine de Galle est beaucoup plus facile

à établir que les anciens appareils du même genre avec chaines à maillons soudés. Nous ne saurions donc trop appeler l'attention des ingénieurs sur les appareils de Neustadt, qui comprennent non seulement les grues de petites et de grandes dimensions, qu'il a établies pour le service des chantiers et des chemins de fer, mais encore ses puissantes machines à mâts (dont la puissance est de 50 tonnes et la hauteur de 40 mètres) (1). Les divers essais qui ont eu pour but d'utiliser les chaines ordinaires à anneaux sur de petits tambours (recevant 6 chainons), en laissant leur extrémité libre se dérouler (comme dans l'appareil d'élévation de Bernier), ont montré que cette disposition n'était pas applicable pour de grandes charges; la chaine éprouverait, dans ce cas, des frottements trop considérables.

La chaine articulée, destinée à soulever une charge doit être établie absolument comme si elle devait remplir l'office de chaine de transmission. Elle s'enroule sur un pignon, dont les dents s'engagent entre les fuseaux des maillons, et elle l'abandonne après une rotation d'un demi tour environ, fig. 703. Le brin conducteur de la chaine est soumis à la traction de la charge, tandis que le brin libre, ou conduit, se trouve guidé

Fig. 703.

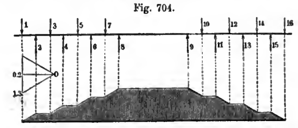


(1) V. Grues et appareils de levage à chaine Galle, par Camille Neustadt, Paris 1867, ainsi que la description d'une série d'installations d'appareils de ce genre, dans la publication industrielle et le Génie industriel d'Armengaud.

par une boite (en tôle ou en fonte), qui enveloppe le pignon. L'ouverture de cette boite est évasée pour faciliter l'entrée de la chaine qui, après son passage sur le pignon, s'élève dans une gaine. La détermination rigoureuse des dimensions des différentes parties de la chaine constitue un problème d'une très-grande complication, qu'on ne peut éviter qu'en ayant recours à une méthode d'approximation (1).

(1) Si on suppose la charge uniformément répartie sur tous les maillons, les actions exercées aux différents points d'un boulon ou fuseau, dans la partie droite de la chaine, peuvent être représentées graphiquement par la fig. 704; la direction de ces actions change de sens d'un maillon à l'autre.

Fig. 704.



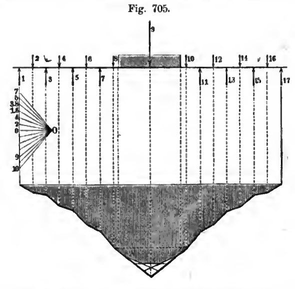
Les dimensions, dans les chaines établies par Neustadt, sont déterminées de manière à correspondre aux indications de ce diagramme, avec la condition que la tension $\mathfrak{S}$ ne soit d'ailleurs jamais supérieure à 8^k. Toutefois, cette méthode est inexacte et il convient de procéder différemment. On doit commencer par déterminer le maximum de tension des fuseaux, non dans la partie libre de la chaine, mais dans celle qui est enroulée sur le pignon, lequel fait l'office de tambour de treuil. Ce pignon porte au moins 8 dents, dont chacune exerce, sur le corps d'un fuseau, une action qui n'est pas connue à priori. Si on suppose 5 dents en prise et si on admet, ce qui est assez plausible, que les pressions des dents croissent en progression arithmétique et qu'elles soient proportionnelles aux nombres 1, 2, 3, 4 et 5, il en résulte que la charge, supportée par le corps du dernier fuseau, n'est que $^5/_{15}\,P$ ou $^1/_3\,P$. Sur les tourillons ou fusées de ce même fuseau s'exerce alors, en arrière, un effort égal à $^1/_3\,P$ et, en avant, un autre effort égal à $^1/_2\,P$. En partant de ces hypothèses et en admettant, de plus, une égale répartition de la charge sur les maillons, on obtient le diagramme de la fig. 705, établi à la même échelle que le précédent. L'examen de ce nouveau diagramme montre que les fuseaux se trouvent soumis à des efforts à peu près doubles de ceux que donne le premier, ce qui reviendrait à dire que, dans les chaines de Neustadt, la tension maximum est de 16^k, au lieu de 8^k. Mais il importe de remarquer que les choses ne se passent pas exactement comme nous l'avons supposé dans ces deux tracés. Par suite de l'état complexe de la chaine, la direction de l'effort fléchissant se trouve être variable d'un maillon à l'autre, de telle sorte que les moments fléchissants ne sont

Les appareils, construits par Neustadt, correspondent à des charges comprises entre 500 et 30000^k; les dimensions de ses chaines se trouvent convenablement exprimées par les formules suivantes:

$$\delta = \frac{0,35}{i+1} \sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

pas ceux que nous avons admis, c'est-à-dire que la force P n'est pas uniformément répartie sur les maillons. Il parait assez vraisemblable qu'il se

Fig. 705.



produit une répartition de la charge, analogue à celle qu'indique la fig. XI, page 14. Les maillons intérieurs se trouvant alors plus fortement chargés que les autres, il en résulte une diminution notable du moment statique, qui tend à produire la flexion du fuseau. Les dimensions adoptées par Neustadt ont subi, d'une façon très-satisfaisante, l'épreuve de la pratique. Ses nombreuses expériences, qui lui ont toujours donné, pour la rupture, une charge quadruple ou quintuple de celle que nous avons admise dans le calcul précédent, semblent confirmer l'observation que nous venons de faire; il a constaté, en effet, que, dans ces essais, les maillons ne se rompaient pas tous en même temps, mais seulement l'un après l'autre. Il est probable que la rupture se produisait d'abord pour les maillons intérieurs, puis gagnait successivement les maillons extérieurs, à mesure que leur charge augmentait. Les efforts, auxquels se trouve soumise l'extrémité de la chaine, qui se fixe au crochet, ne présentent aucune analogie avec ceux que nous avons admis dans la fig. 705. Il convient de renforcer cette extrémité, en donnant aux maillons une plus grande largeur et au fuseau un diamètre plus considérable

$$d = 0{,}2\,\frac{(i+2)}{(i+1)}\,\sqrt{P}$$

ou

$$\frac{d}{\delta} = 0{,}57\,(i+2) \quad \ldots\ldots \quad (293)$$

dans ces relations, δ représente l'épaisseur de la tôle des maillons, i leur nombre et d le diamètre du tourillon d'un fuseau; comme i doit être un nombre entier et pair, on prend, pour i, le nombre pair qui se rapproche le plus de la valeur fournie par l'expression:

$$i = {}^1\!/_3 \sqrt[3]{P} \quad \ldots\ldots \quad (294).$$

Le pignon doit avoir 8 dents au minimum; d'après Neustadt, ce nombre doit être légèrement augmenté pour les fortes charges; c'est ainsi qu'il prend:

$\mathfrak{z} = 8$ pour $P = 250$ à 3000^k
$\mathfrak{z} = 9$ - $P = 4000$ à 20000^k
$\mathfrak{z} = 10$ - $P = 20000^k$ et au-delà.

Le rayon r du cercle primitif doit être déterminé de manière à ce que la corde, qui correspond à un pas, soit égale à la longeur l des maillons. C'est ce qui a lieu, si l'on fait:

$$r = \frac{l}{2 \sin \frac{180}{\mathfrak{z}}} \quad \ldots\ldots \quad (295).$$

D'où on déduit:

pour $\mathfrak{z} =$	8	9	10
$r =$	$1{,}3066\,l$	$1{,}3619\,l$	$1{,}6180\,l$.

Les simples rouleaux-guides ont de 16 à 30 dents. Quant aux autres dimensions de la chaine, elles sont fournies par les nombres proportionnels de la fig. 703, lesquels sont rapportés au module d.

Exemple. Supposons qu'on ait à construire une chaine de Galle, destinée à soulever une charge $P = 10000^k$. La relation (294) donne: $i = {}^1\!/_3 \sqrt[3]{10000} = 7{,}16$; nous devrons donc prendre 8, pour le nombre des maillons d'un fuseau, et nous aurons ensuite: $\delta = \frac{0{,}35\sqrt{10000}}{81} = 3{,}9$ ou 4^{mm}, $d = 4 \cdot 0{,}57 \cdot 10 = 23^{mm}$, la longueur de construction $l = 5 + 2{,}8 \cdot 23 = 70^{mm}$, la largeur des maillons $b = 2{,}6 \cdot 23 = 60^{mm}$, la longueur du corps du fuseau $= 6 + 1{,}67 \cdot 23 = 44^{mm}$ et son diamètre $d_1 = 1{,}2\,d = 1{,}2 \cdot 23 = 28^{mm}$, la saillie du sommet des maillons sur le tourillon du fuseau $= 2 + 0{,}9 \cdot 23 = 23^{mm}$. Pour un pignon de 8 dents, le rayon $r = 1{,}3065 \cdot 70 = 91^{mm}$.

On trouvera, un pen plns loin, au § 285, nne table, qni contient, pour une série de charges, les valeurs des différentes dimensions des chaines articulées de Neustadt.

§ 283.

Poids des chaines.

La longueur S de la barre de fer rond, nécessaire pour former les maillons d'une chaine ordinaire de longueur L, est à cette grandenr L dans le rapport de la longuenr s d'un maillon développé à la longueur de construction l de ce maillon, c'est-à-dire qn'on a:

$$\frac{S}{L} = \frac{s}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (296).$$

Pour tenir compte dn déchet qu'entraine le forgeage, il convient d'admettre, ponr chaqne maillon, une perte de longueur égale à $\frac{d}{2}$, de telle sorte qn'avec ce déchet la longueur S devient S_1, qui est déterminée par la relation:

$$\frac{S_1}{L} = \frac{s + \frac{d}{2}}{l} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (297).$$

Il résnlte de là qne le poids G_0, par mètre courant, s'obtient en multipliant par $\frac{s}{l}$ le poids, par mètre conrant, d'nne barre de fer rond de diamètre d. On a alors:

ponr les chaines ouvertes à maillons étroits:

$$G_0 = 0{,}0226\, d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (298)$$

pour les chaines ouvertes à maillons larges:

$$G_0 = 0{,}0190\, d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (299)$$

pour les chaines à étançons:

$$G_0 = 0{,}0235\, d^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (300).$$

Dans ce dernier cas, pour tenir compte approximativement de l'étançon en fonte, il convient d'ajonter le poids d'nn cylindre ayant pour diamètre et pour longueur d, c'est-à-dire qu'il convient de remplacer $\frac{s}{l}$ par $\frac{s'}{l}$, où s' désigne la longueur idéale d'nn maillon simple, qui anrait précisément nn poids éqnivalent à celui du maillon réel avec son étançon. La table, que nons donnons ci-après, renferme les valeurs fonrnies par ces formules.

Pour les chaines, comme pour les câbles, il existe un rapport constant entre le poids, par mètre courant, d'une chaine et la charge qu'on peut lui faire supporter. Dans la table ci-dessous, L_c désigne la longueur correspondant à la charge limite d'une chaine et L_r la longueur de rupture; $\mathfrak{S}$ est le maximum de tension, dans la section la plus exposée, pour la charge limite, B_r la tension qui se produit dans cette même section, lorsqu'il y a rupture.

Désignation des chaines.	$\frac{s}{d}$	$\frac{s}{l}$	$\frac{s'}{l}$	$\mathfrak{S}$	$\frac{G_0}{P}$	L_c Mètr	B_r	L_r Mètr.
Chaine à maillons larges	11,0	3,14	—	6	0,0020	500	24	2000
Chaine à maillons étroits	9,6	3,68	—	6	0,0024	400	24	1600
Chaine à étançons	10,6	3,53	3,87	9	0,0017	600	32	2100
Chaine à nœnds	36,0	6,00	—	8,25	0,0014	700	26(?)	2100
Chaine de Vancanson . .	21,25	5,00	—	2,5	0,0078	130	10	520
Chaine de Galle	—	—	3,58 (1)	8,0	0,0034	300	36	1350

De ces nombres se déduisent très-nettement les valeurs relatives des différentes chaines, jusqu'aux limites que permet l'emploi du fer. Les longueurs de rupture de toutes ces chaines, comme on le voit, ne sont pas très-considérables. Aussi, dans les grandes profondeurs de l'océan atlantique (3000 à 4000^m), le poids propre des chaines d'ancres peut facilement amener leur rupture, puisque, dans l'eau, les longueurs de rupture sont très-peu supérieures à celles du tableau (dans le rapport $^9/_8$ environ).

Pour les chaines articulées, la longueur correspondant à la charge limite est relativement très-faible; toutefois, l'emploi de ces chaines est très-admissible pour les grues et les treuils, puisque, dans ce cas, on n'a que des longueurs insignifiantes.

D'une manière générale, il résulte de la formule (296) que, pour une chaine, le rapport entre la charge et le poids propre est d'autant plus avantageux que les maillons sont plus longs par rapport au diamètre du fer dont ils sont formés; il en résulte que, pour les chaines verticales, il est avantageux de les composer de tiges forgées à oreilles ou disposées en forme d'anneaux très-allongés (v. § 286).

(1) Ce nombre n'est qu'une valeur moyenne, puisqu'en raison de la constante qui entre dans l'expression de la longueur de construction, le rapport $\frac{s}{l}$ n'est pas constant.

§ 284.

Table relative aux chaines ordinaires à maillons soudés.

Chaines ouvertes.				Chaines à étançons.		
d	Charge d'épreuve P	G_0 maillons étroits	G_0 maillons larges	d	Charge d'épreuve P	G_0
6	792	0,81	0,68	15	6008	5,29
7	1078	1,11	0,93	16	6835	6,02
8	1408	1,45	1,21	17	7716	6,79
9	1782	1,83	1,54	18	8651	7,61
10	2200	2,26	1,90	19	9639	8,48
11	2662	2,73	2,30	20	10680	9,40
12	3168	3,25	2,74	22	12923	11,37
13	3718	3,82	3,21	24	15379	13,54
14	4312	4,43	3,72	26	18049	15,89
15	4950	5,09	4,28	28	20933	18,42
16	5632	5,79	4,86	30	24300	21,15
17	6358	6,23	5,49	32	27341	24,06
18	7128	7,32	6,16	34	30865	27,16
19	7942	8,16	6,86	36	34603	30,46
20	8800	9,04	7,60	38	38555	33,93
21	9702	9,97	8,38	40	42720	37,60
22	10648	10,94	9,20	42	47099	41,45
23	11638	11,96	10,05	44	51691	45,50
24	12672	13,02	10,94	46	56497	49,73
25	13750	14,13	11,88	48	61517	54,14
26	14872	15,28	12,84	50	66750	58,75
27	16038	16,48	13,85	52	72197	63,54
28	17248	17,72	14,90	54	77857	68,53
29	18502	19,01	15,98	56	83731	73,70
30	19800	20,34	17,10	58	89819	79,05

1er Exemple. Ainsi que nous l'avons fait remarquer précédemment, la charge normale, pour les chaines à maillons soudés, employées dans les grues, ne doit pas dépasser notablement la moitié de la charge d'épreuve. Si une chaine de ce genre, à maillons ouverts, doit être établie pour une charge $P = 10000^k$, on cherche, dans la table, le nombre qui se rapproche le plus de cette valeur et on trouve, pour le diamètre correspondant, $d = 30^{mm}$. Si on voulait admettre pour la charge normale les $^3/_4$ de la charge d'épreuve, il faudrait chercher le diamètre correspondant à $^4/_3 \cdot 10000$ et on trouverait

alors $d = 24^{mm}$. Avec une chaine à étançons, en admettant, comme charge normale, la moitié seulement de la charge d'épreuve, le diamètre correspondant à $P = 10000^k$ serait $d = 28^{mm}$ (col. 5, ligne 10).

Sur les vaisseaux, les chaines d'ancres viennent se loger dans des caisses spéciales. L'espace, en mètres cubes, qu'occupe une chaine à étançons, d'un poids G, est égal à $0{,}00043\ G$, si elle est rangée avec soin et à $0{,}00045\ G$, dans le cas contraire.

2e Exemple. Si la chaine précédente à étançons a une longueur de 200^m, son poids est $200 \cdot 18{,}42 = 3684^k$; si elle est rangée sans soin, elle occupe un espace de $0{,}00045 \cdot 3684 = 1^{m.c}66$.

§ 285.

Table relative aux chaines articulées, d'après Neustadt.

Charge P	Nombre des plaques i	Epaisseur des plaques δ	Largeur des plaques b	Diamètre des tourillons d	Longueur de construction l
250	2	2	13	5	18
500	2	3	16,5	6,5	21
750	4	2	19	7,5	23
1000	4	2	23	8	28
1500	4	3	25	10	32
2000	4	3	31	11	38
3000	6	3	34	14	41
4000	6	4	36	16	44
5000	6	4	42	17	51
7500	6	4	56	19,5	66
10000	8	4	61	23	71
15000	8	5	73	29	86
20000	8	6	85	35	100
25000	8	7	96	40	112
30000	8	8	108	44	130

Les valeurs que contient cette table ne sont pas établies d'après les charges d'épreuve, mais d'après celles qu'on peut admettre comme charges normales; elles n'ont pas été calculées par nos formules et reproduisent directement les données indiquées par l'ingénieur Neustadt; toutefois, ces valeurs présentent une concordance assez satisfaisante avec celles qu'on déduirait de nos formules, ainsi d'ailleurs qu'on peut le vérifier en comparant les

dimensions fournies par la table, pour une charge de 10000^{k}, avec celles que nous avons obtenues dans l'exemple du § 282. Les tôles, employées pour les maillons, sont des tôles au bois d'Audincourt, de première qualité; les tourillons doivent être assez longs pour qu'on puisse les river facilement à l'extrémité. On peut se guider, à ce sujet, sur les indications de la fig. 703, qui a été établie exactement d'après les prescriptions de Neustadt.

XXII. Assemblages de câbles et de chaines.

§ 286.

Organes d'assemblages pour les chaines fixes et mobiles.

Les chaines fixes, utilisées comme tendeurs dans les constructions, comme amarres de vaisseaux, comme ancrages permanents dans les ponts de bateaux et les ponts suspendus, etc. sont généralement formées de maillons très-allongés, qui permettent de réduire, dans une certaine mesure, les dépenses de matière et de main d'œuvre. Pour réunir différents brins d'une chaine de ce genre, on fait usage d'une pièce à deux branches, en forme de fourchette, qui se ferme au moyen d'un boulon. La fig. 706 représente la disposition, adoptée par l'amirauté anglaise, pour les chaines de rives. La longueur de construction l des maillons est toujours de $\frac{1}{2}$ brasse ou de 914^{mm}, quelle que soit d'ailleurs la grandeur de la section du fer dont ils sont composés. La longueur de chacun des brins de chaines est de 10 brasses ou de 20 maillons; les boulons des pièces d'assemblage des différents brins, ainsi que leurs goupilles, sont en acier étamé. La section du fer des maillons est un carré, à arêtes légèrement arrondies. Les nombres proportionnels de la figure sont tous rapportés à la longueur du côté de ce carré. La fig. 707 représente une autre disposition de chaine, avec maillons à longues tiges. Pour rendre ces chaines plus mobiles, les différents maillons à tiges, dont la longueur de construction atteint, dans certains cas, $1^{m},50$, sont réunis, deux à deux, par un chainon ovale ordinaire; souvent aussi on intercale trois de ces chainons entre deux tiges. La pièce d'assemblage de ces chaines est

fermée par un boulon fileté ordinaire. Les nombres proportionnels, inscrits sur la figure, montrent que la tension, dans la partie droite des grands maillons, est supposée le double de celle de chacune des branches des chainons ovales, ce qui paraît d'ailleurs assez rationnel.

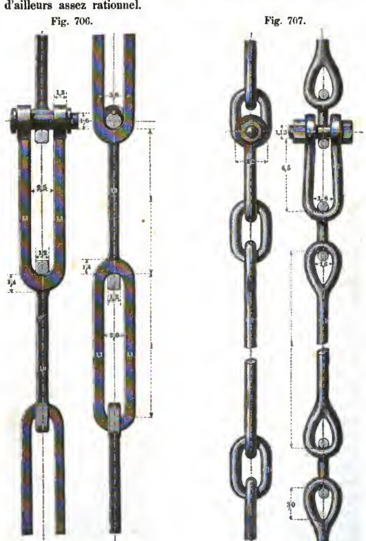
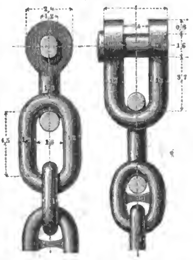


Fig. 706. Fig. 707.

Dans les chaines à étançons, on emploie également, comme moyen d'assemblage, le dispositif de la fig. 706. Les chaines à étançons, établies suivant les prescriptions de l'amirauté anglaise, ont tonjours une longueur de 12 brasses $^1/_2$ on de $22^m,85$ et se terminent, à nne extrémité, comme l'indiqne la fig. 708. Entre la pièce d'assemblage et la chaine proprement dite est toujours interposé un chainon ordinaire, sans étançon, dans lequel peut s'introduire l'une des branches de cette pièce. Le diamétre du fer de ce chainon est égal à celui du fer des maillons de la chaine mnltiplié par 1,2. Le boulon, qui a une section ovale, est en acier étamé, de même que sa goupille; cette dernière pièce a une longuenr un peu plus faible que le trou correspoudant, de manière à ce qu'on puisse assurer sa position au moyen de petits tampons de plomb, chassés fortement aux deux extrémités. Lorsque la chaine doit être reliée à un maillon de plus fort diamètre, à un anneau d'ancre, par exemple, il convient d'augmenter, en conséquence, les dimensions de la piéce d'assemblage. Pour une grue de qnai ordinaire, une longuenr de chaine de 12 brasses $^1/_2$ ($22^m,85$) est toujours suffisante et, dans ce cas, il n'est pas nécessaire de recourir à un assemblage.

Fig. 708.

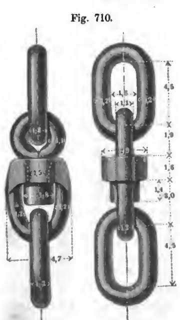


Lorsqu'une chaine d'une très-grande longueur doit passer sur un tambour mobile, comme c'est le cas, par exemple, pour une chaine de touage, le dispositif précédent ne convient plus pour l'assemblage des différents brins de chaines. Dans ce cas, on doit, antant que possible, éviter d'employer tout dispositif d'assemblage, dont la forme serait notablement différente de celle des maillous de la chaine, car il se produirait forcément des chocs au passage de chaque pièce de ce genre sur le tambour. Pour ces chaines spéciales, on a toujours recours à un accouplement articulé, en acier fondu, qui, à l'extérieur, présente com-

plètement la forme d'un maillon ordinaire, mais qui, en réalité, se compose de deux parties égales, qui, d'un côté, sont reliées par une articulation, tandis qu'à l'autre, elles sont fermées au moyen d'une goupille en acier, après qu'on y a introduit les deux maillons extrêmes des brins des chaines qu'il s'agit de réunir.


Fig. 709.

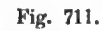
Pour assembler une chaine avec deux autres plus faibles, on peut utiliser avec avantage le maillon double, représenté par la fig. 709, qui, en raison de sa forme ramassée, est préférable à un anneau rond. Afin de faciliter l'opération de la soudure, les trois maillons qui viennent s'assembler sur la pièce jumelle doivent avoir des longueurs supérieures à celles des maillons normaux.

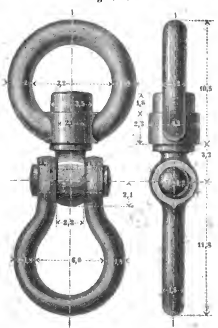

Fig. 710.

Il est souvent nécessaire de donner à un brin de chaine la possibilité de tourner autour de son axe. Dans ce cas, on peut employer le mode d'assemblage à maillon tournant, que la fig. 710 représente tel qu'on le construit normalement, en Angleterre, pour les chaines à étançons. A ce chainon viennent se fixer deux maillons ouverts d'une assez grande longueur, qui terminent les deux parties qu'il s'agit de réunir et dont les autres maillons sont formés de fer rond, ayant pour diamètre le module des nombres proportionnels inscrits sur la figure. Il est évident que, pour présenter une rési-

stance suffisante, un semblable dispositif exige un travail de forge extrêmement soigné.

La fig. 711 représente un anneau tournant, de grandes dimensions, pour les chaînes de rives, dont le mode de construction est indiqué par la fig. 706.


Fig. 711.



La partie inférieure peut recevoir deux maillons ou deux boulons de pièces d'assemblage de ces chaînes, tandis que l'anneau lui-même peut en recevoir jusqu'à trois. Le module, pour les nombres proportionnels, est le diamètre du fer des maillons des deux chaînes, que cet organe est supposé réunir.

§ 287.

Crochets de câbles et de chaînes.

Les crochets sont les organes intermédiaires qu'on emploie pour suspendre les charges aux câbles, aux moufles et aux chaînes.

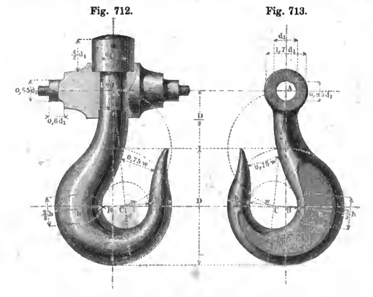
La construction d'un crochet exige d'autant plus d'attention qu'on est exposé, dans ce cas, à d'assez graves erreurs, lorsqu'on veut évaluer, au sentiment, la limite de charge admissible. Les crochets exigent des dimensions relativement considérables, en raison des différents genres d'actions, auxquels ils se trouvent soumis. Il ne faut d'ailleurs pas oublier que la rupture d'un crochet peut entraîner de graves accidents (1) et, à ce point de vue, on ne saurait être trop prudent.

Les deux figures suivantes représentent deux crochets simples. Dans la fig. 712, c'est une partie filetée qui supporte le crochet et, par suite, la charge; le diamètre du noyau du filet peut être déterminé par la formule (32), c'est-à-dire qu'on peut prendre:

$$d_1 = 0{,}67\sqrt{P} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (301)$$

en désignant par P la charge suspendue au crochet. Cette formule correspond à l'hypothèse d'un effort de traction de $2^k{,}8$, par unité de surface, sur le noyau du filet; mais il ne faut pas

Fig. 712. Fig. 713.



(1) Dans son traité, *Cranes and machinery*, Glynn fait remarquer avec raison que, de toutes les ruptures d'organes d'une grue, celle du crochet est de beaucoup la plus dangereuse et que c'est à elle que correspond le plus grand nombre de morts ou de blessures.

perdre de vue que, dans le cas où la charge agit un peu obliquement, cet effort peut facilement atteindre une valeur quintuple (§ 18). Toutes les dimensions du crochet sont rapportées au diamètre d_1, déterminé par la formule (301). Si on désigne par w le diamètre intérieur du crochet et par h la plus grande des dimensions transversales du corps de ce crochet, l'autre dimension doit être prise égale à $^2/_3\, h$; en tenant compte de la résistance composée (v. § 16, cas n° I) et en admettant 10^k pour le maximum de tension dans la gorge du crochet, on trouve alors:

$$\frac{h}{d_1} = 1{,}30 \sqrt{\frac{w}{h} + {}^5/_4} \quad \text{ou} \quad \frac{h}{\sqrt{P}} = 0{,}87 \sqrt{\frac{w}{h} + {}^5/_4} \,. \quad (302).$$

Dans la section diamétralement opposée à celle qui a pour hauteur h, le diamètre est égal à $\frac{h}{2}$ et, par suite, le cercle qui détermine le profil extérieur de la partie principale du crochet a pour diamètre $D = w + 1{,}5\, h$. Ces différentes relations conduisent à la série des valeurs suivantes:

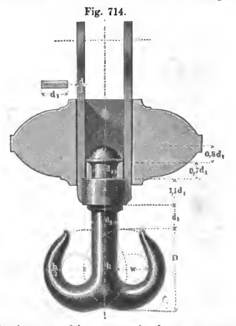
$\frac{w}{h}$ =	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$\frac{h}{d_1}$ =	1,77	1,82	1,86	1,91	1,95	1,99	2,03	2,08	2,12	2,16
$\frac{h}{\sqrt{P}}$ =	1,19	1,22	1,25	1,28	1,31	1,33	1,36	1,39	1,41	1,44
$\frac{w}{d_1}$ =	1,06	1,27	1,49	1,72	1,95	2,19	2,44	2,70	2,97	3,24
$\frac{D}{d_1}$ =	3,72	4,00	4,28	4,59	4,88	5,18	5,48	5,82	6,15	6,48.

Le plus ordinairement on prend $\frac{w}{h} = 1$. Dans la fig. 713, la pièce tournante du crochet est réunie à la chaîne par un maillon à boulon, analogue à ceux des fig. 706 et 708. Le meilleur moyen de fixation de ce boulon, pour les grues, consiste en une clavette fendue, qui permet, à l'occasion, de changer facilement la pièce de suspension et de remplacer, par exemple, un crochet simple par un crochet double.

Dans les grues de quais, on a souvent l'habitude de disposer directement sur le crochet un poids assez lourd, pour équilibrer le poids de la chaîne, qui se déroule en grimpant dans l'intérieur de la flèche, et pour surmonter les résistances dues aux frottements du tambour, dans le mouvement de descente de la chaîne; il est évident qu'on doit alors adopter une forme et

des dimensions spéciales pour la pièce de suspension. On peut voir, sur la fig. 714, une disposition de ce genre, pour un crochet double. Le crochet double, qu'on désigne aussi sous le nom de tête de bélier, doit être considéré comme se composant de deux

Fig. 714.



crochets simples; toutefois, comme la charge se trouve appliquée, dans ce cas, suivant l'axe de symétrie des deux crochets, la partie verticale n'a plus besoin d'être renflée comme dans le crochet simple. Les dimensions w, h et D sont rapportées au module 0,7 d_1; les autres dimensions, rapportées à d_1, sont indiquées sur la figure.

Exemple. Pour un crochet simple, dont la forme est celle de la fig. 712, la charge s'élève à 2000^k*; d'après la formule (301), le noyau de la partie filetée doit avoir pour diamètre:* $d_1 = 0{,}67\sqrt{P} = 0{,}67 \cdot 44{,}7 = 30^{mm}$. *Si on suppose, de plus, qu'on fasse* $\frac{w}{h} = 1$, *la table précédente donnera:* $h = w = 1{,}95 \cdot 30 = 59^{mm}$, $D = 4{,}88 \cdot 30 = 146^{mm}$, $\frac{h}{2} = 29^{mm}$. *Pour un crochet double, le module serait, dans ces conditions,* $0{,}7 \cdot 30 = 21^{mm}$ *et, en supposant encore* $h = w$, *on trouverait:* $h = w = 1{,}95 \cdot 21 = 41^{mm}$, $D = 4{,}88 \cdot 21 = 102^{mm}$, $\frac{h}{2} = 20^{mm}$.

Dans les chaînes articulées, l'établissement des crochets simples et doubles ne présente aucune difficulté; seulement, dans ce cas, ainsi que nous l'avons fait dans la fig. 714, il convient de munir ces crochets d'une partie tournante, dont l'extrémité soit susceptible de recevoir un boulon transversal; ce boulon s'assemble directement avec la chaîne, ou sert comme axe de poulie.

§ 288.

Boites de câbles. Tampons de câbles.

Pour relier un câble rond en fils en fer avec des pièces métalliques rigides, on engage son extrémité dans une boite ou tube en fer, dont la longueur est dix à douze fois le diamètre de ce câble et qui présente un léger évasement conique à l'extrémité opposée. Lorsque les fils ont dépassé cette extrémité, on les replie à 180° sur une faible longueur; si on fait alors mouvoir le câble en sens inverse, comme son diamètre se trouve notablement augmenté par tous ces nœuds, il ne peut pas dépasser la partie évasée de la boite et, en coulant du zinc fondu dans les interstices qui subsistent encore, on obtient une liaison intime du câble avec l'intérieur de cette boite. Extérieurement, la boite d'un câble est disposée de manière à pouvoir se relier facilement à d'autres parties métalliques, d'un plus grand diamètre, (elle peut être, par exemple, filetée ou munie de brides); il convient, dès lors, de traiter cette pièce comme l'extrémité d'une tige en fer.

Les câbles métalliques plats sont munis de boites, dont la section intérieure est un rectangle, arrondi sur ses petits côtés; ils peuvent encore être serrés entre deux plaques en fer, qu'on peut réunir par des boulons, après avoir replié les extrémités de tous les fils, comme nous venons de l'indiquer.

Dans les machines d'extraction des mines, on a à relier le câble proprement dit aux chaînes (le plus souvent au nombre de quatre), qui soutiennent la benne d'extraction. Comme, dans ce cas, à certains moments, la benne chargée, ou même vide, peut se trouver lancée et donner lieu, par suite, à des chocs assez violents sur le câble, on a généralement l'habitude d'interposer un *tampon* entre le câble et les chaînes. Ce tampon se

compose essentiellement d'un ou de deux ressorts coniques en acier (v. N° 12, page 62), qui transmettent au câble la traction des chaînes et agissent comme les tampons de wagons des chemins de fer. L'emploi de ces tampons réduit très-notablement l'usure des câbles d'extraction et, à ce point de vue, on ne saurait trop le recommander.

QUATRIÈME PARTIE.

TABLES ET FORMULES MATHÉMATIQUES.

---

§ 289.

Courbes, Surfaces et Volumes.

Les tables que nous reproduisons ci-après donnent, rassemblées sous une forme assez commode, les propriétés géométriques et mécaniques de la série des courbes usuelles, qui présentent le plus d'intérêt pour le constructeur de machines; ces tables fournissent, en même temps, les expressions des surfaces limitées par ces courbes et celles des volumes simples qu'elles engendrent. Les notations inscrites sur les figures sont, en général, suffisantes, pour faire comprendre les formules; toutefois, nous croyons devoir ajouter ici quelques explications, relatives à la signification de ces formules.

Dans la rectification des courbes, s est la longueur de la partie de courbe, comprise entre le point choisi comme origine et le point xy, φ est l'angle correspondant, S la longueur totale de la courbe.

Pour les moments d'inertie, la densité a été supposée égale à 1, afin de ne pas multiplier inutilement le nombre des lettres. Le moment d'inertie d'une surface est *équatorial* ou *polaire*, suivant l'axe par rapport auquel sont pris les moments. Cet axe est dit équatorial, quand il est situé dans le plan de la surface, et polaire, lorsqu'il est perpendiculaire à ce même plan.

Tout axe de la première espèce, qui passe par le centre de gravité de la surface, est plus spécialement un axe d'équateur; de même, on donne le nom d'axe de pôle à l'axe polaire qui passe par ce même centre de gravité. On voit, d'après cela, qu'une surface n'a qu'un seul axe de pôle, tandis qu'elle a une infinité d'axes d'équateur.

On obtient le moment d'inertie polaire J_p d'une surface, en faisant la somme des deux moments d'inertie équatoriaux J_{q_1} et J_{q_2}, dont les axes se rencontrent à angle droit sur l'axe polaire:

$$J_p = J_{q_1} + J_{q_2} \quad (303).$$

Le moment d'inertie J' d'une surface par rapport à un axe, situé à une distance a du centre de gravité S de cette surface, peut se déduire du moment d'inertie J par rapport à l'axe parallèle, mené par S, et est représenté, dans ce cas, par l'expression:

$$J' = J + a^2 F \quad (304)$$

F désignant la mesure de la surface. Cette relation est également applicable à un volume, à la condition de remplacer F par la masse du corps.

Pour les volumes, on peut admettre une division entièrement analogue à la précédente. Dans chacun des corps, que nous donnons ci-après, on peut considérer, comme axe de pôle, l'un des axes principaux passant par les centres de gravité de toutes les sections qui lui sont normales et, comme section d'équateur, la section menée, normalement à cet axe, par le centre de gravité du corps; on peut donc diviser, ici encore, les moments d'inertie en équatoriaux et polaires, suivant la position de leurs axes par rapport à la section équatoriale. Dans tous les exemples que nous donnons pour les volumes, les axes sont toujours, en réalité, des axes d'équateur et de pôle.

Pour un prisme droit, dont la demi-hauteur est l et dont la base a pour moment d'inertie polaire i_p, le moment d'inertie polaire est:

$$J_p = 2\, l\, i_p \quad (305)$$

et le moment d'inertie par rapport à un axe d'équateur:

$$J_q = {}^2/_3\, f\, l^3 + 2\, l\, i_q \quad (306)$$

en désignant par f la mesure de la surface de la section et par i_q le moment d'inertie équatorial de cette surface par rapport au même axe que J_q.

Les centres de gravité et les moments d'inertie, pour les surfaces de formes irrégulières, peuvent, dans un grand nombre de cas, se déterminer facilement et très-exactement, à l'aide de la méthode graphique. Le procédé à suivre peut se déduire de la solution des problèmes que nous avons traités au chap. V et consiste, en réalité, dans l'emploi répété du polygone des forces et du polygone funiculaire.

Nos.	Courbes.	Equation en coordonnées rectilignes.	Propriétés diverses.
I. Cercle.	Y, S, r, M, f, φ, b, O, a, X	Origine des axes en un point quelconque O: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ Origine au sommet S: $y^2=2rx-x^2$. Au centre M: $x^2+y^2=r^2$.	Approximativement, pour une faible valeur de $\frac{x}{y}$: $\frac{r}{y}=\frac{y}{2x}$.
II. Parabole.	L, Y, A, S, F, p, r, φ, y, X, x, L	Origine des axes au sommet S: $y^2=2px$.	Demi-paramètre $=p$ $AS=SF=\frac{p}{2}$. LL Directrice. F Foyer.
III. Ellipse.	S, p, F, φ, r, M, y, r', p, F', X, a, e, b	Origine au centre M: $y^2a^2+x^2b^2=a^2b^2$. Origine au sommet S: $y^2=\left(\frac{b}{a}\right)^2(2ax-x^2)$ $y^2=2px-\frac{p}{a}x^2$.	Excentricité: linéaire $=e$ $=\sqrt{a^2-b^2}$ numérique $\varepsilon=\frac{e}{a}$ Demi-paramètre: $p=a(1-\varepsilon^2)=\frac{b^2}{a}$.
IV. Hyperbole.	Y, F', b, a, O, a, b, F, φ, y, X, p, e, p	Origine au centre O: $-y^2a^2+x^2b^2=a^2b^2$.	Excentricité: lin. $=OF=e$ $=\sqrt{a^2+b^2}$ numér. $\varepsilon=\frac{e}{a}$. Axe $b=a\sqrt{\varepsilon^2-1}$ Demi-paramètre: $p=a(\varepsilon^2-1)=\frac{b^2}{a}$
V. Chaînette.	Y, a, φ, h, x, l, S, s, y, L, c, C, L	Origine au point C: $y=\frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right)$	$\operatorname{tg}\varphi=\frac{l}{c}=\sqrt{\frac{h^2+2hc}{c^2}}$ LL Directrice.

Equation polaire.	Rayon de courbure.	Rectification.
Rapportée à un point quelconque O: $\varrho^2 + f^2 - 2\varrho f \cos\varphi = r^2$. Au sommet S: $\varrho = 2r\cos\varphi$.	$\varrho = r$.	$s = r\varphi$ $S = 2r\pi$.
Au foyer F: $r = \frac{p}{2} + x$ $r = \frac{p}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}$.	$\varrho = p\sqrt{\left(1+2\frac{x}{p}\right)^3}$.	$s = \frac{p}{2}\left[\sqrt{\frac{2x}{p}\left(1+\frac{2x}{p}\right)} + \log.nat.\left(\sqrt{\frac{2x}{p}} + \sqrt{1+\frac{2x}{p}}\right)\right]$. Approximativement, pour $\frac{x}{y}$ faible: $s = y\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{x}{y}\right)^4\right]$.
Au foyer F: $r = p + \varepsilon x = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$. Rayons vecteurs: $r = a + \varepsilon x, r' = a - \varepsilon x$.	$\varrho = \frac{(rr_1)^{3/2}}{ab}$. En S: $\varrho = \frac{b^2}{a}$, En A: $\varrho = \frac{a^2}{b}$.	$S = (a+b)\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \ldots\right)$, où $n = \frac{a-b}{a+b}$.
Au foyer F: $r = p + \varepsilon x = \frac{e^2 - a^2}{a - e\cos\varphi} = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$. Rayons vecteurs: $r = \varepsilon x - a, r' = \varepsilon x + a$.	$\varrho = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{3/2}}{a^4b^4}$.	Très-compliquée.
—	$\varrho = \frac{y^2}{c}$	$s = \frac{c}{2}\left(e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right) = \sqrt{y^2 - c^2}$, $l = \sqrt{h^2 + 2hc}$.

Nos.	Courbes.	Equation.
VI. Cycloïde.		$x = r\left(\omega - \frac{r'}{r}\sin\omega\right)$ $y = r\left(1 - \frac{r'}{r}\cos\omega\right)$.
VII. Epicycloïde.		$x = (R+r)\cos\frac{r}{R}\omega - r'\cos\frac{R+r}{R}\omega$ $y = (R+r)\sin\frac{r}{R}\omega - r'\sin\frac{R+r}{R}\omega$.
VIII. Hypocycloïde.		$x = (R-r)\cos\frac{r}{R}\omega + r'\cos\frac{R-r}{R}$ $y = (R-r)\sin\frac{r}{R}\omega - r'\sin\frac{R-r}{R}\omega$.
IX. Péricycloïde.		$x = (r-R)\cos\frac{r}{R}\omega - r'\cos\frac{r-R}{R}\omega$ $y = (r-R)\sin\frac{r}{R}\omega - r'\sin\frac{r-R}{R}\omega$.
X. Développante de cercle.		$x = R'\cos\vartheta + R\vartheta\sin\vartheta$ $y = R'\sin\vartheta - R\vartheta\cos\vartheta$.
XI. Spirale d'Archimède.		$r = a\omega = R\frac{\omega}{2\pi}$.
XII. Spirale logarithmique.		$r = a^{\omega}$.

Rectification.	Rayon de courbure.	Observations.
$s = 4r\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S = 8r.$	$\rho = 4r \sin\frac{\omega}{2}.$	r' est le rayon pour le point décrivant. Si $r' = r$, comme nous l'avons supposé ici dans les expressions de la rectification et de la courbure, les équations donnent la cycloïde, l'épicycloïde, l'hypocycloïde et la pérycycloïde ordinaires. De même, dans les équations de la développante de cercle, R' désigne la distance du point décrivant au centre O du cercle fixe, pour $\vartheta = 0$; pour $R' = R$, on obtient la développante de cercle ordinaire.
$s = 4r\frac{R+r}{R}\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S = 8r\frac{R+r}{R}.$	$\rho = 4r\frac{R+r}{R+2r}\sin\frac{\omega}{2}.$	
$s = 4r\frac{R-r}{R}\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S = 8r\frac{R-r}{R}.$	$\rho = 4r\frac{R-r}{R-2r}\sin\frac{\omega}{2}.$	
$s = 4r\frac{r-R}{R}\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right)$ $S = 8r\frac{r-R}{R}.$	$\rho = 4r\frac{r-R}{2r-R}\sin\frac{\omega}{2}.$	
$s = \frac{R\vartheta}{2}\vartheta.$	$\rho = R\vartheta.$	
$s = \frac{\omega}{4\pi}\sqrt{1+\omega^2}$ $+ \frac{1}{2}\log.nat.(\omega + \sqrt{1+\omega^2}).$	$\rho = \frac{(r^2+a^2)^{3/2}}{2(r^2+2a^2)}.$	Dans la spirale logarithmique, la tangente, en un point quelconque P, forme avec le rayon vecteur OP un angle constant α, qui est donné par la relation: $\cot g.\,\alpha = \log.nat.\,a$.
$s = r\frac{\sqrt{1+(\log.nat.a)^2}}{\log.nat.a}.$	$\rho = r\sqrt{1+(\log.nat.a)^2}$ $= \frac{r}{\sin\alpha},$ où $\cot g.\,\alpha = \log.nat.\,a$	

Nos.	Forme.	Mesure de la surface.
XIII. Secteur de cercle.		$F = r^2 \frac{\beta}{2}.$
XIV. Demi-cercle.		$F = \frac{r^2 \pi}{2}.$
XV. Cercle.		$F = r^2 \pi.$
XVI. Portion de couronne circulaire.		$F = (r_1^2 - r_2^2) \frac{\beta}{2}$ $= b r \beta.$

Position du centre de gravité.	Moment d'inertie.
$z = \frac{4}{3} r \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\beta}$. $= \frac{s r^2}{3 F}$.	Pour l'axe polaire mené par le centre C: $J_c = \frac{\mu}{2} r^2 = \frac{r^4 \beta}{4}$. Pour l'axe de pôle passant au centre de gravité S: $J_s = \frac{\mu}{2} r^2 \left(1 - \frac{16}{9} \frac{1-\cos\beta}{\beta^2}\right) = \frac{r^4}{4}\left(\beta - \frac{16}{9}\frac{1-\cos\beta}{\beta}\right)$.
$z = \frac{4}{3\pi} r$.	Pour l'axe polaire C: $J_c = \frac{\mu}{2} r^2 = \frac{\pi}{4} r^4$. Pour l'axe de pôle S: $J_s = \frac{\mu}{2} r^2 \left(1 - \frac{32}{9\pi^2}\right) = 0{,}320\, \mu r^2$ $= \frac{r^4}{4}\left(\pi - \frac{32}{9\pi}\right) = 0{,}500\, r^4$. Pour les axes équatoriaux XX et YY: $J_x = J_y = \frac{\mu r^2}{4} = \frac{\pi}{8} r^4$.
$z = 0$.	Pour l'axe de pôle C: $J_c = \frac{\mu}{2} r^2 = \frac{\pi}{2} r^4$. Pour l'axe d'équateur XX: $J_x = \frac{\mu}{4} r^2 = \frac{\pi}{4} r^4$.
$z = \frac{4}{3} \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\beta} \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$ $= \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\beta} r \left(2 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{r^2}\right)$.	Pour l'axe polaire C: $J_c = \frac{\mu}{2}(r_1^2 + r_2^2) = \mu\left(r^2 + \frac{b^2}{4}\right)$ $= \frac{\beta}{4}(r_1^4 - r_2^4) = \frac{\beta}{4}(4 b r^3 + r b^3)$.

Nos.	Forme.	Mesure de la surface.
XVII. Segment de cercle.		$F = \frac{r^2}{2} (\beta - \sin \beta)$.
XVIII. Parabole.		$F = \frac{2}{3} x y$.
XIX. Ellipse.		$F = a b \pi$.
XX. Triangle.		$F = \frac{b h}{2}$.

Position du centre de gravité.	Moment d'inertie.
$z = \frac{s^3}{12\,F}$ $= \frac{4}{3}\,r\,\frac{\sin^3\frac{\beta}{2}}{\beta - \sin\beta}.$	Pour l'axe polaire C: $J_c = \frac{r^4\beta}{4} - \frac{1}{4}\left[s r^3 \cos^3\frac{\beta}{2} + \frac{r s^3 \cos\frac{\beta}{2}}{12}\right]$ $= \frac{r^4}{4}\left[\beta - \frac{2}{3}\sin\beta - \frac{1}{3}\sin\beta\cos\beta\right].$
$z_1 = {}^3/_5\,x$ $z_2 = {}^3/_8\,y.$	Pour les axes équatoriaux XX et YY: $J_x = \mu\,\frac{y^2}{5} = \frac{2}{15}\,x\,y^3$ $J_y = \frac{8}{35}\,\mu x^2 = \frac{16}{105}\,y\,x^3.$
$z = 0.$	Pour l'axe d'équateur XX: $J_x = \frac{\pi}{4}\,a\,b^3.$ Pour l'axe de pôle C: $J_c = \frac{\pi}{4}\,(a^2 + b^2) = \frac{\pi}{4}\,a\,b^3\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right).$
$z = \frac{h}{3}.$	$J_x = \mu\,\frac{h^2}{6} = \frac{b\,h^3}{12}$ $J_z = \mu\,\frac{h^2}{18} = \frac{b\,h^3}{36}$ $J_y = \mu\,\frac{h^2}{2} = \frac{b\,h^3}{4}$ $J_c = \frac{b\,h^3}{4} + \frac{h}{12}\,(u^3 + v^3)$ $J_b = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{h}{4}(u^3 + v^3) - \frac{b\,h}{24}\,[8(u^2 + v^2) - 3\,b^2)$ $J_s = \frac{b\,h^3}{36} + \frac{h}{12}\,(u^3 + v^3) - \frac{b\,h}{18}\,[2\,(u^2 + v^2) - b^2].$

Nos.	Forme.	Expression de la surface.
XXI. Prisme triangulaire.		Surface latérale: $F_1 = 2l(a+b+c)$. Surface d'une base: $F_2 = \frac{bh}{2}$.
XXII. Prisme rectangulaire.		Surface latérale: $F_1 = 4l(b+h)$. Surface d'une base: $F_2 = bh$.
XXIII. Prisme rhomboïdal.		Surface latérale: $F_1 = 8l\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$. Surface d'une base: $F_2 = bh$.
XXIV. Prisme à six faces.		Surface latérale: $F_1 = 12lr$. Surface d'une base: $F_2 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} = 2{,}598\,r^2$.
XXV. Cylindre.		Surface latérale: $F_1 = 4lr\pi$. Surface d'une base: $F_2 = r^2\pi$.

Mesure du volume.	Moment d'inertie.
$V = b\,h\,l.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left[\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{18}\right] = \frac{b\,h\,l^3}{3} + \frac{b\,l\,h^3}{18}.$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = l\left[\frac{b\,h^3}{18} + \frac{h}{6}(u^3+v^3) - \frac{b\,h}{9}(2[u^2+v^2]-b^2)\right].$
$V = 2\,b\,h\,l.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left(\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{12}\right).$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{m}{12}(h^2+b^2).$
$V = 2\,b\,h\,l.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left(\frac{l^2}{3} + \frac{h^2}{6}\right).$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = m\left(\frac{h^2}{6} + \frac{b^2}{24}\right).$
$V = 3lr^2\sqrt{3} = 5{,}196\,lr^2.$	Pour les axes d'équateur QQ et Q_1Q_1: $J_q = J_{q_1} = m\left(\frac{l^2}{3} + \frac{5}{24}r^2\right).$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{5}{12}m\,r^2.$
$V = 2\,\pi\,lr^2.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left(\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{4}\right).$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{1}{2}m\,r^2.$

Nos.	Forme.	Expression de la surface.	Mesure du volume.
XXVI. Cylindre creux.		Surface latérale: $F_1 = 4\pi l (r_1 + r_2)$ $= 8\pi l r.$ Surface d'une base: $F_2 = \pi (r_1^2 - r_2^2)$ $= 2\pi r b.$	$V = 2\pi l (r_1^2 - r_2^2)$ $= 4\pi r b l.$
XXVII. Prisme parabolique.		Surface d'une base: $F_2 = \frac{4}{3} x y.$	$V = \frac{8}{3} l x y.$
XXVIII. Tore.		$F = 4\pi^2 R r.$	$V = 2\pi^2 R r^2.$
XXIX. Pyramide rectangulaire.		Surface latérale: $F_1 = a\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$ $+ b\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}}.$ Surface de la base: $F_2 = ab.$	$V = F_2 \frac{h}{3} = \frac{abh}{3}.$
XXX. Cône droit.		Surface latérale: $F_1 = r\pi\sqrt{h^2 + r^2}$ $= s r \pi.$ Surface de la base: $F_2 = r^2 \pi.$	$V = \frac{\pi r^2 h}{3}.$

Position du centre de gravité.	Moment d'inertie.
Milieu de la figure.	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left[\frac{l^2}{3} + \frac{r_1{}^2 + r_2{}^2}{4}\right] = m\left[\frac{l^2}{3} + \frac{r^2}{2} + \frac{b^2}{8}\right].$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{m}{2}[r_1{}^2 + r_2{}^2] = m\left[r^2 + \frac{b^2}{4}\right].$
$z = \frac{3}{5}x.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left[\frac{l^2}{3} + \frac{y^2}{5}\right].$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = m\left[\frac{y^2}{5} + x^2\left(\frac{8}{35} - \frac{4}{25}\right)\right].$
Milieu de la figure.	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left[\frac{R^2}{2} + \frac{5}{8}r^2\right].$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = m\left[R^2 + \frac{3}{4}r^2\right].$
$z = \frac{h}{4}.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left[\frac{3}{80}h^2 + \frac{b^2}{20}\right].$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{m}{20}[a^2 + b^2].$
$z = \frac{h}{4}.$ Pour l'enveloppe seule: $z' = \frac{h}{3}.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = \frac{3}{20}m\left[r^2 + \frac{h^2}{4}\right].$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{3}{10}mr^2.$

Nos.	Forme.	Expression de la surface.	Mesure du volume.
XXXI. Tronc de cône.		Surface latérale: $F_1 = \pi(r_1 + r_2)\sqrt{h^2 - (r_1 - r_2)^2} = 2\pi r s$. Surface des bases: $F_2' = r_1^2 \pi$, $F_2'' = r_2^2 \pi$.	$V = \frac{\pi}{3} h [r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2]$.
XXXII. Sphère.		$F = 4 r^2 \pi$.	$V = \frac{4\pi}{3} r^3$.
XXXIII. Secteur sphérique.		Surface de l'enveloppe conique: $F_1 = a \pi r = \pi r \sqrt{2 r h - h^2}$.	$V = \frac{2}{3} \pi r^2 h$.
XXXIV. Segment sphér.		Surface de la zône: $F_1 = 2\pi r h = \pi(a^2 + h^2)$. Surface de la base: $F_2 = a^2 \pi$, $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$.	$V = \pi h^2 \left(r - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi}{6} h (3a^2 + h^2)$.
XXXV. Ellipsoïde.		—	$V = \frac{4}{3} \pi a b c$.
XXXVI. Paraboloïde de révolution.		Surface de la base: $F_2 = y^2 \pi$.	$V = \frac{\pi}{2} x y^2$.

Position du centre de gravité.	Moment d'inertie.
$z = \frac{h}{4}\left(\frac{r_1^2 + 2r_1r_2 + 3r_2^2}{r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2}\right).$	Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{3}{10}m\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}.$
Milieu de la figure.	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = \frac{2}{5}mr^2.$
$z = \frac{3}{4}\left(r - \frac{h}{2}\right).$	Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{m}{5}(3rh - h^2).$
$z = \frac{3}{4}\frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$ Pour la zône seulement: $z' = \frac{h}{2}.$	Pour l'axe de pôle PP: $J_p = m\left[r^2 - \frac{3}{4}rh + \frac{3}{20}h^2\right]\frac{2h}{3r-h}.$
Milieu de la figure.	Pour l'axe d'équateur QQ qui coïncide avec a: $J_a = \frac{m}{5}(b^2 + c^2).$
$z = \frac{x}{3}.$	Pour l'axe d'équateur QQ: $J_q = m\left(\frac{y^2}{6} + \frac{x^2}{18}\right).$ Pour l'axe de pôle PP: $J_p = \frac{m}{3}y^2.$

§ 290.

Lignes trigonométriques.

La table suivante contient, sous la forme ordinaire, les sinus, cosinus, tangentes et cotangentes des angles de 0° à 90°, de 10 en 10 minutes; elle donne, de plus, les longueurs d'arcs (pour le rayon 1). Pour faciliter la détermination des longueurs d'arcs correspondant à de grands angles, on a indiqué, à la partie inférieure de chaque page, les longueurs de plusieurs arcs, qui sont d'un usage fréquent et qui correspondent, les uns à des angles extrêmement faibles, les autres à des angles supérieurs à 90°. Les nombres intercalés sont les différences pour les parties correspondantes de la table.

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
0	0	0,0000	0,0000	1,0000	0,0000	∞	1,5708	90	0
	10	0,0029	0,0029	1,0000	0,0029	343,77	1,5679		50
	20	0,0058	0,0058	1,0000	0,0058	171,89	1,5650		40
	30	0,0087	0,0087	1,0000	0,0087	114,59	1,5621		30
	40	0,0116	0,0116	0,9999	0,0116	85,940	1,5592		20
	50	0,0145	0,0145	0,9999	0,0145	68,750	1,5563		10
			29	1	29	11,460			
1	0	0,0175	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	1,5533	89	0
	10	0,0204	0,0204	0,9998	0,0204	49,104	1,5504		50
	20	0,0233	0,0233	0,9997	0,0233	42,964	1,5475		40
	30	0,0262	0,0262	0,9997	0,0262	38,188	1,5446		30
	40	0,0291	0,0291	0,9996	0,0291	34,368	1,5417		20
	50	0,0320	0,0320	0,9995	0,0320	31,242	1,5388		10
			29	1	29	2,606			
2	0	0,0349	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	1,5359	88	0
	10	0,0378	0,0378	0,9993	0,0378	26,432	1,5330		50
	20	0,0407	0,0407	0,9992	0,0407	24,542	1,5301		40
	30	0,0436	0,0436	0,9990	0,0437	22,904	1,5271		30
	40	0,0465	0,0465	0,9989	0,0466	21,470	1,5243		20
	50	0,0495	0,0494	0,9988	0,0495	20,206	1,5213		10
			29	1	29	1,125			
3	0	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	1,5184	87	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	
ang.=0°1′		0°5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc.=0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
3	0	0,0524	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	1,5184	87	0
	10	0,0553	0,0552	0,9985	0,0553	18,075	1,5155		50
	20	0,0582	0,0581	0,9983	0,0582	17,169	1,5126		40
	30	0,0611	0,0610	0,9981	0,0612	16,350	1,5097		30
	40	0,0640	0,0640	0,9980	0,0641	15,605	1,5068		20
	50	0,0669	0,0669	0,9978	0,0670	14,924	1,5039		10
			29	2	29	623			
4	0	0,0698	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	1,5010	86	0
	10	0,0727	0,0727	0,9974	0,0729	13,727	1,4981		50
	20	0,0756	0,0756	0,9971	0,0758	13,197	1,4951		40
	30	0,0785	0,0785	0,9969	0,0787	12,706	1,4923		30
	40	0,0814	0,0814	0,9967	0,0816	12,251	1,4893		20
	50	0,0844	0,0843	0,9964	0,0846	11,826	1,4861		10
			29	2	29	396			
5	0	0,0873	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	1,4853	85	0
	10	0,0902	0,0901	0,9959	0,0904	11,059	1,4806		50
	20	0,0931	0,0929	0,9957	0,0934	10,712	1,4777		40
	30	0,0960	0,0958	0,9954	0,0963	10,385	1,4748		30
	40	0,0989	0,0987	0,9951	0,0992	10,078	1,4719		20
	50	0,1018	0,1016	0,9948	0,1022	9,7882	1,1690		10
			29	3	29	2738			
6	0	0,1047	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	1,4661	84	0
	10	0,1076	0,1074	0,9942	0,1080	9,2553	1,4632		50
	20	0,1105	0,1103	0,9939	0,1110	9,0098	1,4603		40
	30	0,1134	0,1132	0,9936	0,1139	8,7769	1,4573		30
	40	0,1164	0,1161	0,9932	0,1169	8,5555	1,4544		20
	50	0,1193	0,1190	0,9929	0,1198	8,3450	1,4515		10
			29	4	29	2007			
7	0	0,1222	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	1,4486	83	0
	10	0,1251	0,1248	9,9922	0,1257	7,9530	1,4457		50
	20	0,1280	0,1276	0,9918	0,1287	7,7704	1,4428		40
	30	0,1309	0,1305	0,9914	0,1317	7,5958	1,4399		30
	40	0,1338	0,1334	0,9911	0,1346	7,4287	1,4370		20
	50	0,1367	0,1363	0,9907	0,1376	7,2687	1,4341		10
			29	4	29	1533			
8	0	0,1396	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	1,4312	82	0
	10	0,1425	0,1421	0,9899	0,1435	6,9682	1,4283		50
	20	0,1454	0,1449	0,9894	0,1465	6,8269	1,4254		40
	30	0,1484	0,1478	0,9890	0,1495	6,6912	1,4224		30
	40	0,1526	0,1507	0,9886	0,1524	6,5606	1,4195		20
	50	0,1542	0,1536	0,9881	0,1554	6,4348	1,4166		10
			28	4	30	1210			
9	0	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584	6,3183	1,4137	81	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	
ang. = 0° 1′ *arc.*=0,0003		0° 5′ 0,0015	135° 2,3562	180° 3,1416	225° 3,9270	270° 4,7124	315° 5,4978	360° 6,2832	

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
9	0	0,1571	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	1,4137	81	0
	10	0,1600	0,1593	0,9872	0,1614	6,1970	1,4108		50
	20	0,1629	0,1622	0,9868	0,1644	6,0844	1,4079		40
	30	0,1658	0,1650	0,9863	0,1673	5,9758	1,4050		30
	40	0,1687	0,1679	0,9858	0,1703	5,8708	1,4021		20
	50	0,1716	0,1708	0,9853	0,1733	5,7694	1,3992		10
			28	5	30	981			
10	0	0,1745	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	1,3963	80	0
	10	0,1774	0,1765	0,9843	0,1793	5,5764	1,3934		50
	20	0,1804	0,1794	0,9838	0,1823	5,4845	1,3904		40
	30	0,1833	0,1822	0,9833	0,1853	5,3955	1,3875		30
	40	0,1862	0,1851	0,9827	0,1883	5,3093	1,3846		20
	50	0,1891	0,1880	0,9822	0,1914	5,2257	1,3817		10
			28	6	30	811			
11	0	0,1920	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	1,3788	79	0
	10	0,1949	0,1937	0,9811	0,1974	5,0658	1,3759		50
	20	0,1978	0,1965	0,9805	0,2004	4,9894	1,3730		40
	30	0,2007	0,1994	0,9799	0,2035	4,9152	1,3701		30
	40	0,2036	0,2022	0,9793	0,2065	4,8430	1,3672		20
	50	0,2065	0,2051	0,9787	0,2095	4,7729	1,3643		10
			28	6	31	683			
12	0	0,2094	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	1,3614	78	0
	10	0,2123	0,2108	0,9775	0,2156	4,6382	1,3584		50
	20	0,2153	0,2136	0,9769	0,2186	4,5736	1,3555		40
	30	0,2182	0,2164	0,9763	0,2217	4,5107	1,3526		30
	40	0,2211	0,2193	0,9757	0,2247	4,4494	1,3497		20
	50	0,2240	0,2221	0,9750	0,2278	4,3897	1,3468		10
			28	6	31	582			
13	0	0,2269	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	1,3439	77	0
	10	0,2298	0,2278	0,9737	0,2339	4,2747	1,3410		50
	20	0,2327	0,2306	0,9730	0,2370	4,2193	1,3381		40
	30	0,2356	0,2334	0,9724	0,2401	4,1653	1,3352		30
	40	0,2385	0,2363	0,9717	0,2432	4,1126	1,3323		20
	50	0,2414	0,2391	0,9710	0,2462	4,0611	1,3294		10
			28	7	31	503			
14	0	0,2443	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	1,3264	76	0
	10	0,2473	0,2447	0,9696	0,2524	3,9617	1,3235		50
	20	0,2502	0,2476	0,9689	0,2555	3,9136	1,3206		40
	30	0,2531	0,2504	0,9681	0,2586	3,8667	1,3177		30
	40	0,2560	0,2532	0,9674	0,2617	3,8208	1,3148		20
	50	0,2589	0,2560	0,9667	0,2648	3,7760	1,3119		10
			28	7	31	439			
15	0	0,2618	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	1,3090	75	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	taug.	arc	Angle	

ang. = 0° 1′	0° 5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°
arc. = 0,0003	0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
15	0	0,2618	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	1,3090	75	0
	10	0,2647	0,2616	0,9652	0,2711	3,6891	1,3061		50
	20	0,2667	0,2644	0,9614	0,2742	3,6470	1,3032		40
	30	0,2705	0,2672	0,9636	0,2773	3,6059	1,3003		30
	40	0,2734	0,2700	0,9628	0,2805	3,5656	1,2974		20
	50	0,2763	0,2728	0,9621	0,2836	3,5261	1,2945		10
			28	8	31	387			
16	0	0,2793	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	1,2915	74	0
	10	0,2822	0,2784	0,9605	0,2899	3,4495	1,2886		50
	20	0,2851	0,2812	0,9596	0,2931	3,4124	1,2857		40
	30	0,2880	0,2810	0,9588	0,2962	3,3759	1,2828		30
	40	0,2909	0,2868	0,9580	0,2994	3,3402	1,2799		20
	50	0,2938	0,2896	0,9572	0,3026	3,3052	1,2770		10
			28	9	31	343			
17	0	0,2967	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	1,2741	73	0
	10	0,2996	0,2952	0,9555	0,3089	3,2371	1,2712		50
	20	0,3025	0,2979	0,9546	0,3121	3,2041	1,2683		40
	30	0,3054	0,3007	0,9537	0,3153	3,1716	1,2654		30
	40	0,3083	0,3035	0,9528	0,3185	3,1397	1,2625		20
	50	0,3113	0,3062	0,9520	0,3217	3,1081	1,2595		10
			28	9	32	307			
18	0	0,3142	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	1,2566	72	0
	10	0,3171	0,3118	0,9502	0,3281	3,0475	1,2537		50
	20	0,3200	0,3145	0,9492	0,3314	3,0178	1,2508		40
	30	0,3229	0,3173	0,9483	0,3346	2,9887	1,2479		30
	40	0,3258	0,3201	0,9474	0,3378	2,9600	1,2450		20
	50	0,3287	0,3228	0,9465	0,3411	2,9319	1,2421		10
			27	10	32	277			
19	0	0,3316	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	1,2392	71	0
	10	0,3345	0,3283	0,9446	0,3476	2,8770	1,2363		50
	20	0,3374	0,3311	0,9436	0,3508	2,8502	1,2334		40
	30	0,3403	0,3338	0,9426	0,3541	2,8239	1,2305		30
	40	0,3432	0,3365	0,9417	0,3574	2,7980	1,2275		20
	50	0,3462	0,3393	0,9407	0,3607	2,7725	1,2246		10
			27	10	33	250			
20	0	0,3491	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	1,2217	70	0
	10	0,3520	0,3448	0,9387	0,3673	2,7228	1,2188		50
	20	0,3549	0,3475	0,9377	0,3706	2,6985	1,2159		40
	30	0,3578	0,3502	0,9367	0,3739	2,6746	1,2130		30
	40	0,3607	0,3529	0,9356	0,3772	2,6511	1,2101		20
	50	0,3636	0,3557	0,9346	0,3805	2,6279	1,2072		10
			27	10	34	228			
21	0	0,3665	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	1,2043	69	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	
ang. = 0° 1′		0° 5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc. = 0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
21	0	0,3665	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	1,2043	69	0
	10	0,3694	0,3611	0,9325	0,3872	2,5826	1,2014		50
	20	0,3723	0,3638	0,9315	0,3906	2,5605	1,1985		40
	30	0,3752	0,3665	0,9304	0,3939	2,5386	1,1955		30
	40	0,3782	0,3692	0,9293	0,3973	2,5172	1,1926		20
	50	0,3811	0,3719	0,9283	0,4006	2,4960	1,1897		10
			27	11	34	209			
22	0	0,3840	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	1,1868	68	0
	10	0,3869	0,3773	0,9261	0,4074	2,4545	1,1839		50
	20	0,3898	0,3800	0,9250	0,4108	2,4342	1,1810		40
	30	0,3927	0,3827	0,9239	0,4142	2,4142	1,1781		30
	40	0,3956	0,3854	0,9228	0,4176	2,3945	1,1752		20
	50	0,3985	0,3881	0,9216	0,4210	2,3750	1,1723		10
			27	11	35	191			
23	0	0,4014	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	1,1694	67	0
	10	0,4043	0,3934	0,9194	0,4279	2,3369	1,1664		50
	20	0,4072	0,3961	0,9182	0,4314	2,3183	1,1636		40
	30	0,4102	0,3987	0,9171	0,4348	2,2998	1,1606		30
	40	0,4131	0,4014	0,9159	0,4383	2,2817	1,1577		20
	50	0,4160	0,4041	0,9147	0,4417	2,2637	1,1548		10
			26	12	35	177			
24	0	0,4189	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	1,1519	66	0
	10	0,4218	0,4094	0,9124	0,4487	2,2286	1,1490		50
	20	0,4247	0,4120	0,9112	0,4522	2,2113	1,1461		40
	30	0,4276	0,4147	0,9100	0,4557	2,1943	1,1432		30
	40	0,4305	0,4173	0,9088	0,4592	2,1775	1,1403		20
	50	0,4334	0,4200	0,9075	0,4628	2,1609	1,1374		10
			26	12	35	164			
25	0	0,4363	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	1,1345	65	0
	10	0,4392	0,4253	0,9051	0,4699	2,1283	1,1316		50
	20	0,4421	0,4279	0,9038	0,4734	2,1123	1,1286		40
	30	0,4451	0,4305	0,9026	0,4770	2,0965	1,1257		30
	40	0,4480	0,4331	0,9013	0,4806	2,0809	1,1228		20
	50	0,4509	0,4358	0,9001	0,4841	2,0655	1,1199		10
			26	13	36	152			
26	0	0,4538	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	1,1170	64	0
	10	0,4567	0,4410	0,8975	0,4913	2,0353	1,1141		50
	20	0,4596	0,4436	0,8962	0,4950	2,0204	1,1112		40
	30	0,4625	0,4462	0,8949	0,4986	2,0057	1,1082		30
	40	0,4654	0,4488	0,8936	0,5022	1,9912	1,1054		20
	50	0,4683	0,4514	0,8923	0,5059	1,9768	1,1025		10
			26	13	36	142			
27	0	0,4712	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	1,0996	63	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	

ang. = 0° 1′	0° 5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°
arc. = 0,0003	0,0015	2,8562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2823

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
27	0	0,4712	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	1,0996	63	0
	10	0,4741	0,4566	0,8897	0,5132	1,9486	1,0966		50
	20	0,4771	0,4592	0,8884	0,5169	1,9347	1,0937		40
	30	0,4800	0,4617	0,8870	0,5206	1,9210	1,0908		30
	40	0,4829	0,4643	0,8857	0,5243	1,9074	1,0879		20
	50	0,4858	0,4669	0,8843	0,5280	1,8940	1,0850		10
			26	14	37	133			
28	0	0,4887	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	1,0821	62	0
	10	0,4916	0,4720	0,8816	0,5354	1,8676	1,0792		50
	20	0,4945	0,4746	0,8802	0,5392	1,8546	1,0763		40
	30	0,4974	0,4772	0,8788	0,5430	1,8118	1,0734		30
	40	0,5003	0,4797	0,8774	0,5467	1,8291	1,0705		20
	50	0,5032	0,4823	0,8760	0,5505	1,8165	1,0676		10
			25	14	38	125			
29	0	0,5061	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	1,0647	61	0
	10	0,5091	0,4874	0,8732	0,5581	1,7917	1,0617		50
	20	0,5120	0,4899	0,8718	0,5619	1,7796	1,0588		40
	30	0,5149	0,4924	0,8704	0,5658	1,7675	1,0559		30
	40	0,5178	0,4950	0,8689	0,5696	1,7556	1,0530		20
	50	0,5207	0,4975	0,8675	0,5735	1,7437	1,0501		10
			25	15	39	116			
30	0	0,5236	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	1,0472	60	0
	10	0,5265	0,5025	0,8646	0,5812	1,7205	1,0443		50
	20	0,5294	0,5050	0,8631	0,5851	1,7090	1,0414		40
	30	0,5323	0,5075	0,8616	0,5890	1,6977	1,0385		30
	40	0,5352	0,5100	0,8601	0,5930	1,6864	1,0356		20
	50	0,5381	0,5125	0,8587	0,5969	1,6753	1,0326		10
			25	15	40	110			
31	0	0,5411	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	1,0297	59	0
	10	0,5440	0,5175	0,8557	0,6048	1,6534	1,0268		50
	20	0,5469	0,5200	0,8542	0,6088	1,6426	1,0239		40
	30	0,5498	0,5225	0,8526	0,6128	1,6319	1,0210		30
	40	0,5527	0,5250	0,8511	0,6168	1,6212	1,0181		20
	50	0,5556	0,5275	0,8496	0,6208	1,6107	1,0152		10
			25	16	41	104			
32	0	0,5585	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	1,0123	58	0
	10	0,5614	0,5324	0,8465	0,6289	1,5900	1,0094		50
	20	0,5643	0,5348	0,8450	0,6330	1,5798	1,0065		40
	30	0,5672	0,5373	0,8434	0,6371	1,5697	1,0036		30
	40	0,5701	0,5398	0,8418	0,6412	1,5597	1,0007		20
	50	0,5730	0,5422	0,8403	0,6453	1,5497	0,9977		10
			24	16	41	98			
33	0	0,5760	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	0,9948	57	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	
ang. = 0° 1′		0° 5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc. = 0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
33	0	0,5760	0,5446	0,8378	0,6494	1,5399	0,9948	57	0
	10	0,5787	0,5471	0,8371	0,6536	1,5301	0,9919		50
	20	0,5818	0,5495	0,8355	0,6577	1,5204	0,9890		40
	30	0,5847	0,5519	0,8339	0,6619	1,5108	0,9861		30
	40	0,5876	0,5544	0,8323	0,6661	1,5013	0,9832		20
	50	0,5905	0,5568	0,8307	0,6703	1,4919	0,9803		10
			24	17	42	93			
34	0	0,5934	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	0,9774	56	0
	10	0,5963	0,5616	0,8274	0,6787	1,4733	0,9745		50
	20	0,5992	0,5640	0,8258	0,6830	1,4641	0,9716		40
	30	0,6021	0,5664	0,8241	0,6873	1,4550	0,9687		30
	40	0,6050	0,5688	0,8225	0,6916	1,4460	0,9657		20
	50	0,6080	0,5712	0,8208	0,6959	1,4370	0,9628		10
			24	17	43	89			
35	0	0,6109	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	0,9599	55	0
	10	0,6138	0,5760	0,8175	0,7046	1,4193	0,9570		50
	20	0,6167	0,5783	0,8158	0,7089	1,4106	0,9541		40
	30	0,6196	0,5807	0,8141	0,7133	1,4019	0,9512		30
	40	0,6225	0,5831	0,8124	0,7177	1,3934	0,9483		20
	50	0,6254	0,5854	0,8107	0,7221	1,3848	0,9454		10
			24	17	44	84			
36	0	0,6283	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	0,9425	54	0
	10	0,6312	0,5901	0,8073	0,7310	1,3680	0,9396		50
	20	0,6341	0,5925	0,8056	0,7355	1,3597	0,9367		40
	30	0,6370	0,5948	0,8039	0,7400	1,3514	0,9338		30
	40	0,6400	0,5972	0,8021	0,7445	1,3432	0,9308		20
	50	0,6429	0,5995	0,8004	0,7490	1,3351	0,9279		10
			23	18	46	81			
37	0	0,6458	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	0,9250	53	0
	10	0,6487	0,6041	0,7969	0,7581	1,3190	0,9221		50
	20	0,6516	0,6065	0,7951	0,7627	1,3111	0,9192		40
	30	0,6545	0,6088	0,7934	0,7673	1,3032	0,9163		30
	40	0,6574	0,6111	0,7916	0,7720	1,2954	0,9134		20
	50	0,6603	0,6134	0,7898	0,7766	1,2876	0,9105		10
			23	18	47	77			
38	0	0,6632	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	0,9076	52	0
	10	0,6661	0,6180	0,7862	0,7860	1,2723	0,9047		50
	20	0,6690	0,6202	0,7844	0,7907	1,2647	0,9018		40
	30	0,6720	0,6225	0,7826	0,7954	1,2572	0,8988		30
	40	0,6749	0,6248	0,7808	0,8002	1,2497	0,8959		20
	50	0,6778	0,6271	0,7790	0,8050	1,2423	0,8930		10
			23	19	48	74			
39	0	0,6807	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	0,8901	51	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	
ang. = 0° 1′		0° 5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc. = 0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

Angle		arc	sinus	cosinus	tang.	cotang.	arc	Angle	
Deg.	Min.							Deg.	Min.
39	0	0,6807	0,6293	0,7771	0,8098	1,2347	0,8901	51	0
	10	0,6836	0,6316	0,7753	0,8146	1,2276	0,8872		50
	20	0,6865	0,6338	0,7735	0,8195	1,2203	0,8843		40
	30	0,6894	0,6361	0,7716	0,8243	1,2131	0,8814		30
	40	0,6923	0,6383	0,7698	0,8292	1,2059	0,8785		20
	50	0,6952	0,6406	0,7679	0,8342	1,1988	0,8756		10
			22	19	49	70			
40	0	0,6981	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	0,8727	50	0
	10	0,7010	0,6450	0,7642	0,8441	1,1847	0,8698		50
	20	0,7039	0,6472	0,7623	0,8491	1,1778	0,8668		40
	30	0,7069	0,6494	0,7604	0,8541	1,1708	0,8639		30
	40	0,7098	0,6517	0,7585	0,8591	1,1640	0,8610		20
	50	0,7127	0,6539	0,7566	0,8642	1,1571	0,8581		10
			22	19	51	67			
41	0	0,7156	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	0,8552	49	0
	10	0,7185	0,6583	0,7528	0,8744	1,1436	0,8523		50
	20	0,7214	0,6604	0,7509	0,8796	1,1369	0,8494		40
	30	0,7243	0,6626	0,7490	0,8847	1,1303	0,8465		30
	40	0,7272	0,6648	0,7470	0,8899	1,1237	0,8436		20
	50	0,7301	0,6670	0,7451	0,8952	1,1171	0,8407		10
			21	20	52	65			
42	0	0,7330	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	0,8378	48	0
	10	0,7359	0,6713	0,7412	0,9057	1,1041	0,8348		50
	20	0,7389	0,6734	0,7392	0,9110	1,0977	0,8319		40
	30	0,7418	0,6756	0,7373	0,9163	1,0913	0,8290		30
	40	0,7447	0,6777	0,7353	0,9217	1,0850	0,8261		20
	50	0,7476	0,6799	0,7333	0,9271	1,0786	0,8232		10
			21	20	54	62			
43	0	0,7505	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	0,8203	47	0
	10	0,7534	0,6841	0,7294	0,9380	1,0661	0,8174		50
	20	0,7563	0,6862	0,7274	0,9435	1,0599	0,8145		40
	30	0,7592	0,6884	0,7254	0,9490	1,0538	0,8116		30
	40	0,7621	0,6905	0,7234	0,9545	1,0477	0,8087		20
	50	0,7650	0,6926	0,7214	0,9601	1,0416	0,8058		10
			21	21	56	61			
44	0	0,7679	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	0,8029	46	0
	10	0,7709	0,6967	0,7173	0,9713	1,0295	0,7999		50
	20	0,7738	0,6988	0,7153	0,9770	1,0235	0,7970		40
	30	0,7767	0,7009	0,7133	0,9827	1,0176	0,7941		30
	40	0,7795	0,7030	0,7112	0,9884	1,0117	0,7912		20
	50	0,7824	0,7050	0,7092	0,9942	1,0058	0,7883		10
			21	21	58	58			
45	0	0,7854	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	0,7854	45	0
Deg.	Min.							Deg.	Min.
Angle		arc	cosinus	sinus	cotang.	tang.	arc	Angle	
ang. = 0° 1′		0° 5′	135°	180°	225°	270°	315°	360°	
arc. = 0,0003		0,0015	2,3562	3,1416	3,9270	4,7124	5,4978	6,2832	

Première table de nombres du constructeur.

n	$\frac{1}{n}$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	$\sqrt[4]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
0,30	3,333	0,090	0,027	0,548	1,825	0,669	1,495	0,740	1,351
0,375	2,667	0,141	0,053	0,612	1,634	0,721	1,387	0,783	1,277
0,60	1,667	0,360	0,216	0,775	1,291	0,843	1,186	0,880	1,136
0,625	1,600	0,391	0,244	0,791	1,265	0,855	1,170	0,889	1,125
0,70	1,429	0,490	0,343	0,837	1,195	0,888	1,126	0,915	1,093
0,75	1,333	0,563	0,422	0,866	1,155	0,909	1,100	0,931	1,074
0,875	1,143	0,766	0,670	0,935	1,070	0,956	1,047	0,967	1,034
0,90	1,111	0,810	0,729	0,949	1,054	0,965	1,036	0,987	1,013
1,10	0,909	1,210	1,331	1,049	0,953	1,032	0,969	1,016	0,976
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	0,913	1,063	0,941	1,047	0,955
1,25	0,800	1,563	1,953	1,118	0,894	1,077	0,928	1,054	0,946
1,50	0,667	2,250	3,375	1,225	0,816	1,145	0,874	1,105	0,904
1,75	0,571	3,063	5,273	1,323	0,756	1,205	0,830	1,149	0,869
2,0	0,500	4,0	8,0	1,414	0,707	1,260	0,794	1,189	0,841
2,25	0,444	5,063	11,391	1,500	0,667	1,310	0,763	1,225	0,816
2,50	0,400	6,250	15,625	1,581	0,632	1,357	0,737	1,257	0,795
2,75	0,364	7,563	20,797	1,658	0,603	1,401	0,714	1,286	0,777
3,0	0,333	9,0	27,0	1,732	0,577	1,442	0,693	1,318	0,759
3,25	0,308	10,563	34,328	1,803	0,555	1,481	0,675	1,342	0,745
3,50	0,286	12,250	42,875	1,871	0,535	1,518	0,659	1,368	0,731
3,75	0,267	14,063	52,734	1,936	0,516	1,554	0,644	1,392	0,719
4,0	0,250	16,0	64,0	2,0	0,500	1,587	0,630	1,414	0,707
4,5	0,222	20,250	91,125	2,121	0,471	1,651	0,604	1,457	0,687
5,0	0,200	25,0	125,0	2,236	0,447	1,710	0,585	1,495	0,669
5,5	0,182	30,250	166,375	2,345	0,426	1,754	0,567	1,531	0,653
6,0	0,167	36,0	216,0	2,450	0,408	1,817	0,551	1,565	0,639
6,5	0,154	42,25	274,625	2,550	0,392	1,866	0,536	1,597	0,626
7,0	0,143	49,0	243,0	2,646	0,378	1,913	0,523	1,627	0,615
7,5	0,133	56,250	421,875	2,739	0,365	1,957	0,510	1,655	0,604
8,0	0,125	64,0	512,0	2,828	0,354	2,0	0,500	1,682	0,595

n	$\frac{1}{n}$	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	$\sqrt[4]{n}$	$\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$
8,5	0,118	72,250	614,125	2,915	0,343	2,041	0,490	1,708	0,586
9,0	0,111	81,0	729,0	3,000	0,333	2,080	0,481	1,732	0,577
9,5	0,105	90,250	857,375	3,082	0,324	2,118	0,472	1,756	0,570
10	0,100	100,0	1000,0	3,162	0,317	2,154	0,464	1,778	0,562
11	0,091	121,0	1331,0	3,317	0,302	2,224	0,446	1,821	0,549
12	0,083	144	1728	3,464	0,289	2,289	0,436	1,860	0,537
13	0,077	169	2197	3,606	0,277	2,351	0,425	1,899	0,527
14	0,071	196	2744	3,742	0,267	2,410	0,415	1,934	0,517
15	0,067	225	3375	3,873	0,258	2,466	0,405	1,968	0,508
16	0,063	256	4096	4,000	0,250	2,520	0,397	2,000	0,500
17	0,059	289	4913	4,123	0,243	2,571	0,389	2,031	0,492
18	0,056	324	5832	4,243	0,236	2,621	0,381	2,060	0,486
19	0,053	361	6859	4,359	0,229	2,668	0,375	2,088	0,479
20	0,050	400	8000	4,472	0,224	2,714	0,368	2,115	0,473
50	0,020	2500	125000	7,071	0,141	3,684	0,271	2,659	0,376
100	0,010	10000	1000000	10,0	0,10	4,642	0,215	3,162	0,316
1000	0,001	1000000	1000000000	31,623	0,032	10,0	0,100	5,627	0,178
$\pi =$ 3,142	0,318	9,870	31,006	1,772	0,564	1,465	0,683	1,331	0,751
$2\pi =$ 6,283	0,159	39,478	248,050	2,507	0,409	1,845	0,542	1,583	0,632
$\frac{\pi}{2} =$ 1,571	0,637	2,467	3,878	1,253	0,798	1,162	0,860	1,120	0,893
$\frac{\pi}{3} =$ 1,047	0,955	1,097	1,148	1,023	0,977	1,015	0,985	1,012	0,989
$\frac{4}{3}\pi =$ 4,189	0,239	17,546	73,496	2,047	0,501	1,612	0,620	1,431	0,699
$\frac{\pi}{4} =$ 0,785	1,274	0,617	0,484	0,886	1,128	0,923	1,084	0,941	1,062
$\frac{\pi}{6} =$ 0,524	1,910	0,274	0,144	0,724	1,382	0,806	1,241	0,851	1,176
$\pi^2 =$ 9,870	0,101	97,409	961,390	3,142	0,318	2,145	0,466	1,772	0,564
$\pi^3 =$ 31,006	0,032	961,390	29809,910	5,568	1,796	3,142	0,318	2,360	0,424
$\frac{\pi}{32} =$ 0,098	10,186	0,0096	0,001	0,313	3,192	0,461	2,168	0,560	1,787
$\frac{3\pi}{16} =$ 0,589	1,698	0,347	0,204	0,768	1,303	0,838	1,193	0,876	1,142
$g =$ 9,808	0,102	96,197	943,610	3,132	0,319	2,141	0,467	1,770	0,565
$2g =$ 19,616	0,051	384,888	7547,996	4,429	0,226	2,697	0,371	2,105	0,475

Deuxième table de nombres du constructeur.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0,01	0,10000	0,21544	0,26	0,50990	0,63825
0,02	0,14142	0,27144	0,27	0,51962	0,64633
0,03	0,17321	0,31072	0,28	0,52915	0,65421
0,04	0,20000	0,34200	0,29	0,53852	0,66191
0,05	0,22361	0,36840	0,30	0,54772	0,66943
0,06	0,24495	0,39149	0,31	0,55678	0,67679
0,07	0,26458	0,41213	0,32	0,56569	0,68399
0,08	0,28284	0,43089	0,33	0,57446	0,69104
0,09	0,30000	0,44814	0,34	0,58310	0,69795
0,10	0,31623	0,46416	0,35	0,59161	0,70473
0,11	0,33166	0,47914	0,36	0,60000	0,71138
0,12	0,34641	0,49324	0,37	0,60828	0,71791
0,13	0,36056	0,50658	0,38	0,61644	0,72432
0,14	0,37417	0,51925	0,39	0,62450	0,73061
0,15	0,38730	0,53133	0,40	0,63246	0,73681
0,16	0,40000	0,54288	0,41	0,64031	0,74290
0,17	0,41231	0,55397	0,42	0,64807	0,74889
0,18	0,42426	0,56462	0,43	0,65574	0,75478
0,19	0,43589	0,57489	0,44	0,66332	0,76059
0,20	0,44721	0,58480	0,45	0,67082	0,76631
0,21	0,45826	0,59439	0,46	0,67823	0,77194
0,22	0,46904	0,60368	0,47	0,68557	0,77750
0,23	0,47958	0,61269	0,48	0,69282	0,78297
0,24	0,48990	0,62145	0,49	0,70000	0,78837
0,25	0,50000	0,62996	0,50	0,70711	0,79370

$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0,8660.$

$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = 0,9659$; $tg\ 30^\circ = cotg\ 60^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3} = 0,5773$;

$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ = 0,2588$; $cotg\ 30^\circ = tg\ 60^\circ = \sqrt{3} = 1,7321.$

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
0,51	0,71414	0,79896	0,76	0,87178	0,91258
0,52	0,72111	0,80415	0,77	0,87750	0,91657
0,53	0,72801	0,80927	0,78	0,88318	0,92052
0,54	0,73485	0,81433	0,79	0,88882	0,92443
0,55	0,74162	0,81932	0,80	0,89443	0,92832
0,56	0,74833	0,82426	0,81	0,90000	0,93217
0,57	0,75498	0,82913	0,82	0,90554	0,93599
0,58	0,76158	0,83396	0,83	0,91104	0,93978
0,59	0,76811	0,83872	0,84	0,91652	0,94354
0,60	0,77460	0,84343	0,85	0,92195	0,94727
0,61	0,78102	0,84809	0,86	0,92736	0,95097
0,62	0,78740	0,85270	0,87	0,93274	0,95464
0,63	0,79373	0,85726	0,88	0,93808	0,95828
0,64	0,80000	0,86177	0,89	0,94340	0,96190
0,65	0,80623	0,86624	0,90	0,94868	0,96549
0,66	0,81240	0,87066	0,91	0,95394	0,96905
0,67	0,81854	0,87503	0,92	0,95917	0,97259
0,68	0,82462	0,87937	0,93	0,96437	0,97610
0,69	0,83066	0,88366	0,94	0,96954	0,97959
0,70	0,83666	0,88790	0,95	0,97468	0,98305
0,71	0,84261	0,89211	0,96	0,97980	0,98648
0,72	0,84853	0,89628	0,97	0,98489	0,98990
0,73	0,85440	0,90041	0,98	0,98995	0,99329
0,74	0,86023	0,90450	0,99	0,99499	0,99666
0,75	0,86603	0,90856	1,00	1,00000	1,00000

$n = \frac{60 \cdot 75 \cdot 1000}{2\pi} = 716198$; $\frac{1}{n} = 0{,}000\,001\,396$; $\log. n = 5{,}8550322$;

$\sqrt{n} = 846{,}285$; $\sqrt[3]{n} = 89{,}470$; $\sqrt[4]{n} = 29{,}091$; $\log. \pi = 0{,}4971499$;

$\frac{1}{\sqrt{n}} = 0{,}001\,182$; $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0{,}001176$; $\frac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0{,}034\,376$; $\log. g = 0{,}9915805$.

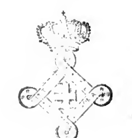


TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Résistance des matériaux.

DEUXIÈME PARTIE.

Notions de graphostatique.

TROISIÈME PARTIE.

Construction des éléments de machines.

I. Boulons et assemblages à boulons.

II. Clavettes et assemblages à clavettes.

III. Rivets et rivures.

IV. Tourillons.

A. Tourillons cylindriques chargés transversalement.

B. Tourillons à pression longitudinale.



B. Paliers d'appui.

IX. Bâtis de paliers.

pages

X. Tambours à courroies ou poulies.

XI. Transmission par câbles en fils de fer.

XII. Roues dentées.

A. Dentures des roues droites.

B. Tracés des dents des roues coniques.

C. Roues et vis sans fin.

D. Engrenages hyperboloïdes

E. Calcul du pas et largeur des dents des engrenages.

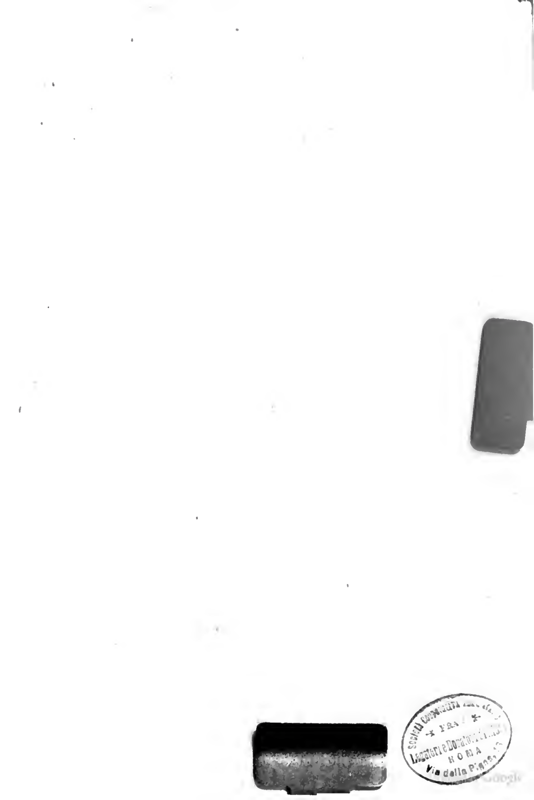
F. Dimensions du corps des roues d'engrenages.


BIBLIOTEC

ERRATA.

Page 15, ligne 3, colonne 1, au lieu de $\frac{l^3}{12}$, lire $\frac{l^3}{24}$.
- 19, - 5, - 2, - — 0,118 b^3, lire = 0,118 b^3.
- 48, N° 4, colonne 3, au lieu de $P = \frac{\pi^2 JE}{l^2}$, lire $P = \frac{4\pi^2 JE}{l^2}$.
- 49, n° 14, ligne 3, colonne 1, au lieu de 28, lire 23.
- 146, ligne 5 du § 57, au lieu de circonscrit, lire inscrit.
- 165. Dans le § 66 remplacer partout *renforcé* par *élargi* et substituer aux six premières lignes les suivantes: „Dans un grand nombre de cas il arrive que, par suite de circonstances particulières, le diamètre d'une vis se trouve être bien supérieur à celui que donnerait la formule (32) pour la vis normale, soumise à la même charge; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour certains stuffing-box (fig. 684, page 620) et pour certains assemblages de tuyaux (fig. 630, p. 595).
- 198. Dans le § 82, remplacer partout *renforcé* par *élargi*.
- 199, ligne 28, au lieu de *fonte*, lire *acier*.
- 250, Exemple 3e, ligne 1, au lieu de moulin, lire laminoir.
- - - - 2, - meules, - cylindres.
- - - - 8, - 100m, lire 100mm.
- 356, ligne 5, au lieu de § 115, lire § 155.
- 372. A la suite de la dernière ligne ajouter: V. Note sur les transmissions de mouvement à l'aide de courroies par M. Kretz (Annales des Mines. 1862).
- 398, ligne 7, au lieu de § 174, lire § 173.

Halle a/Saale, Impr. de la Maison des Orphelins.


FRA
ROMA
Via della

